

К.А. БАТЕНКОВ

**ТОЧНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СВЯЗНОСТИ СЕТЕЙ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА ТИПОВЫХ СОСТОЯНИЙ**

*Батенков К.А. Точные и граничные оценки вероятностей связности сетей связи на основе метода полного перебора типовых состояний.*

**Аннотация.** В работе рассматривается один из методов анализа и синтеза структур сетей связи, основанный на наиболее простом подходе к вопросу расчета вероятности связности — методе полного перебора типовых состояний сети. При этом под типовыми состояниями сети понимаются события связности и несвязности графа сети, представляющие собой простые цепи и сечения данного графа. Несмотря на существенный недостаток метода полного перебора типовых состояний, который заключается в значительной трудоемкости проводимых вычислений, он оказывается достаточно востребованным. Кроме того, на его основе возможно получать граничные оценки вероятности связности сети. Так, при расчете границ Эзари — Прошана используется полный набор несвязных (для верхней) и связных (для нижней) состояний сети связи. Данные границы основаны на утверждении, что вероятность связности сети при тех же условиях выше (ниже), чем у сети, составленной из последовательного (параллельного) соединения полного набора независимых несвязных (связных) подграфов. При расчете границ Литвака — Ушакова используются только реберно-непересекающиеся сечения (для верхней) и связные подграфы (для нижней), то есть подмножества элементов такие, в которых какой-либо элемент не встречается дважды. В данной границе учтено широко известное естественное свойство монотонности, заключающееся в уменьшении (увеличении) надежности сети при снижении (повышении) надежности любого элемента. С точки зрения сложности вычислительных процедур границы Эзари — Прошана имеют существенный недостаток: они предполагают определение всех связных подграфов для расчета верхней границы и минимальных разрезов для нижней, что само по себе нетривиально. Границы Литвака — Ушакова подобными недостатками не страдают: вычисляя их, можно ограничиться перебором необходимого числа вариантов наборов независимых связных и несвязных состояний графа.

**Ключевые слова:** сеть связи, граф, структура, вероятность связности, метод полного перебора типовых состояний, граничные оценки.

**1. Введение.** Сложные многокомпонентные сети являются характерной чертой современного общества [1]. Урбанизация и глобализация, сопровождающиеся быстрым развитием инфраструктуры и технологий, создали возможности построения производительных сетей со все более взаимозависимыми компонентами. Данные сети предназначены для распределения какого-либо ресурса или товара, а их наиболее яркими представителями являются сети связи, например телефонные сети или Интернет. Кроме того, к ним относятся транспортные сети (сети автомобильных, железных дорог и авиасообщений), инженерные сети (сети электро-, газо- и водоснабжения) и так далее.

Системы в виде сетей — неотъемлемая часть мегаполисов; их поломки, хотя и редкие, имеют серьезные последствия для обществен-

ной безопасности [2]. Зависимость нашего общества от технологических систем и информационных сетей растет. В настоящее время мы едва ли можем представить себе нашу жизнь без электричества, телефонов, самолетов и даже без Интернета. В результате возникает потребность в высокой устойчивости современных сетей. При этом количественная оценка устойчивости (и как ее составляющие надежности и живучести) подобных сетей является значимым аспектом проектирования, оптимизации и эксплуатации сети [3, 4].

Если остановиться конкретно на телекоммуникационных сетях, то в последние годы наблюдается резкий всплеск объемов циркулирующего трафика. Ощутим соответствующий рост спроса на компьютерные и коммуникационные сети как по сложности, так и по размерам. По мере роста размеров сетей одновременно варьируется в сложно прогнозируемых пределах количество и частота отказов компонентов. Поэтому целесообразно проектировать сети, способные сохранять работоспособность, несмотря на выход из строя оборудования.

Целью настоящей работы является анализ точных и граничных оценок устойчивости (надежности и живучести) сложных многокомпонентных сетей на основе метода полного перебора типовых состояний, как связанных, так и несвязных. При этом рассматриваются два крайних случая события связности сети — наличие хотя бы одного простого пути между заданной парой вершин и остового дерева, связывающего все вершины между собой, и события несвязности — присутствие минимальных сечений как для направления связи, так и для графа в целом, то есть между любой парой вершин. Исходными данными для анализа сетей выступают вероятности связности их отдельных элементов (ребер графа), представляющие собой аналитический эквивалент коэффициента готовности (надежность) или оперативной готовности (живучесть), на основе которых определяются значения вероятности связности сети в целом.

В зависимости от специфики сетей, их типа (вида) следует оценивать структурную надежность сетей с помощью различных показателей, подразделяемых на детерминированные и вероятностные. Первые из них зависят от топологии сети и определяют степень сложности для вывода ее из строя. В качестве стохастической меры надежности сети используется вероятность связности. Еще раз подчеркнем, что здесь и далее рассматриваются показатели надежности сетей, которые достаточно просто могут быть преобразованы в показатели живучести.

Все методы анализа показателей устойчивости (надежности и живучести) сетей связи можно разделить на две крупные категории: точные и приближенные. Что же касается различий с точки зрения

используемых показателей, то методы также условно делятся на два класса: детерминированные и вероятностные, причем если для детерминированных методов характерно использование в каждом методе своего собственного показателя, то в стохастических он всего один (все оставшиеся являются производными от исходного) — вероятность связности или несвязности. Отличаются же последние друг от друга исключительно используемым математическим аппаратом [4].

Основным недостатком детерминированных методов анализа является сложность их сравнительного анализа в виду различной физической природы используемых показателей. В результате наиболее часто используемыми оказываются вероятностные методы, различие между которыми связано в основном лишь в способе преобразования понятия связности сети, формализуемого в форме различного рода логических функций, в вероятность связности. При этом наиболее наглядными и естественными выглядят методы перебора типовых состояний, поскольку достаточно просто проецируют понятия связного и несвязного состояний на математический язык, а также используют весьма простые способы преобразования логических функций в алгебраическую форму, позволяющую с помощью операций сложения и умножения рассчитывать требуемый показатель.

## **2. Метод полного перебора связных состояний сети связи.**

Следует отметить, что в научной литературе, посвященной анализу надежности сетей связи, метод полного перебора связных состояний называется методом прямого перебора состояний путей системы связи [4] или методом прямого перебора простых цепей [5], а в источниках классической теории надежности — методом минимальных путей [6]. Однако поскольку необходимо проанализировать два случая графов сетей связи — многосвязные и двухсвязные, то целесообразнее рассматривать состояние связности графа как общее понятие, объединяющее и простые цепи, и остовые деревья.

Событию связности многополюсной или двухполюсной сети соответствует факт существования хотя бы одного остового дерева либо простой цепи. Далее остовое дерево и простую цепь будем обозначать термином «связный подграф» [4]. Таким образом, одновременное присутствие двух и более связных подграфов вполне возможно, а значит, для расчета вероятности связности необходимо использовать теорему сложения для совместных событий [5], которая формулируется как совокупность логических высказываний типа «или», откуда следует применимость схемы «или то, или другое, или оба вместе». Следует заметить, что схема «либо» (исключающее «или») предполагает использование высказывания «либо то, либо другое».

Следует отметить, что в ГОСТ Р 53111–2008 [7] определено понятие *вероятность связности* как вероятности исправного состояния хотя бы одной цепи из всех возможных цепей или (при ограничении числа транзитных участков) хотя бы одной цепи с допустимым рангом. При этом при практических расчетах перечень простых цепей или путей между узлами ограничивают только теми путями, которые содержат допустимое число транзитных участков, зависящее от допустимого уровня искажений передаваемой по линии связи информации. В данной работе рассматривается более общий случай, дополнительно затрагивающий событие исправности хотя бы одного остового дерева.

Сущность данного метода расчета вероятности связности заключается в формировании всех существующих вариантов из  $n$  связных подграфов так, что каждая альтернатива включает все элементы графа, принадлежащие формируемому связным подграфам, а также расчету вероятности существования альтернатив и знакопеременному их суммированию [8]. Метод оказывается весьма трудоемким, так как предполагает рассмотрение  $2^n$  всех возможных вариантов из  $n$  связных подграфов, что даже с использованием современных процессоров не всегда допустимо с точки зрения реализации для сложно разветвленных структур сетей связи. В то же время значительным достоинством метода является отсутствие необходимости вычисления индикатора (функции) связности для всех подграфов исходного графа сети [9].

Пусть  $G_i, i = 1, 2, \dots, n$  — множество всех подграфов (остовов или простых цепей) исходного графа  $G$ . Событие, заключающееся в исправности всех элементов связного подграфа  $G_i$ , также обозначено  $G_i$ . Доказано [6], что множество всех исправных состояний сети связи

$\bigcup_{i=1}^n G_i$  совпадает с объединением событий  $G_i$ , а значит, для вероятности связности сети правомерно равенство [6]:

$$p_G = P\left(\bigcup_{i=1}^n G_i\right) = \sum_{i=1}^n P(G_i) - \sum_{i < j} P(G_i G_j) + \sum_{i < j < k} P(G_i G_j G_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(G_1 G_2 \dots G_n). \quad (1)$$

где  $P(G_1 G_2 \dots G_i)$  — вероятность пересечения событий  $G_1, G_2, \dots, G_i$ .

Учитывая, что вероятность совместного события связности сразу нескольких подграфов рассчитывается на основе соответствующих

условных вероятностей, формулу вероятности связности сети (1) можно представить в виде:

$$p_G = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n p_i p_{j,i} + \\ + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n p_i p_{j,i} p_{k,j,i} - \dots + (-1)^{n-1} p_1 p_{2,1} \cdot \dots \cdot p_{n,n-1, \dots, 2,1},$$

где  $p_i = P(G_i)$  — вероятность связности подграфа  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $p_{j,j-1, \dots, i+1, i} = P(G_i / G_{i+1} \dots G_{j-1}, G_j)$  — вероятность связности подграфа  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  без учета элементов, входящих в подграфы  $G_{i+1}$ , ...,  $G_{j-1}$ ,  $G_j$ .

Следует отметить, что по своей сути процедура вычисления вероятности связности подграфа  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  без учета элементов, входящих в подграфы  $G_{i+1}$ , ...,  $G_{j-1}$ ,  $G_j$ , эквивалентна расчету вероятности связности совокупного подграфа, который состоит из элементов графа, входящих хотя бы в одну из объединяемых подграфов в данном слагаемом [5].

Таким образом, процесс накопления точного значения вероятности связности  $p_G$  является аддитивным и знакопеременным [5]. Следует заметить, что результаты суммирований при количестве сумм, меньших числа связных подграфов, в общем случае могут выходить за пределы допустимых значений вероятности, то есть за интервал  $[0, 1]$ . При этом значения нечетных слагаемых всегда будут больше значений четных. Следует также отметить особенность данного метода, которая состоит в том, что чем больше значения вероятностей исправного состояния элементов графа, тем «точнее» слагаемые повторяют поведение огибающих биномиальных коэффициентов.

**3. Методы формирования множеств связных подграфов.** Сами по себе процедуры формирования множеств как простых цепей, так и остовых деревьев являются достаточно нетривиальными. В первую очередь это связано с необходимостью накопления достаточно большого и зачастую частично дублирующего самих себя наборов связных подграфов, количество которых в зависимости от разветвленности исходной сети может достигать сотен, тысяч и даже миллионов комбинаций.

В основе метода формирования множества простых цепей находится предположение о том, что данное множество состоит из всех

возможных комбинаций последовательного перебора связанных друг с другом ребер графа, за исключением тех комбинаций, которые формируют циклы. В связи с этим длина любой приемлемой комбинации не может превышать числа вершин в рассматриваемом графе, а начальная и конечная вершины пути должны, соответственно, содержаться в первом и последнем ребре комбинации. Подобную процедуру достаточно просто реализовать с помощью существующих пакетов прикладных программ математического моделирования, например MathCad, используя в качестве исходных данных матрицу связностей графа сети и номера начальной и конечной вершин направления связи.

Так, первоначально проверяется на наличие единичных (ненулевых) элементов строки (столбца) матрицы смежностей, соответствующей вершине–источнику. Запоминаются все отобранные вершины и для каждой проверяется условие, является ли найденная вершина стоком или нет. При удовлетворении данного условия этот путь сохраняется, а при не выполнении — проводится дальнейший поиск по строкам (столбцам), соответствующим всем оставшимся вершинам, которые не являются стоками, с последующей проверкой вышеупомянутого условия. Для каждого из сохраняемого пути проводится дополнительная проверка на наличие в нем петель (циклов) и его сохранение осуществляется только при их отсутствии. Поиск производится до тех пор, пока либо не будут перебраны все комбинации, то есть они приведут к стокам, либо количество ребер в маршрутах не будет на единицу меньше числа вершин.

Отметим, что подобная процедура оказывается весьма простой не только с точки зрения программной реализации, но и с позиции вычислительной сложности.

В основе метода формирования множества остовых деревьев положено понятие декартового произведения множества сечений вершин [10]. Под сечением вершины при этом понимается множество инцидентных ей ребер. Само декартово произведение трактуется традиционно — производится последовательный перебор всех пар, один из элементов которой принадлежит первому множеству, а второй — второму. Результаты произведения, имеющие в своем составе повторения, уничтожаются. Число выполняемых произведений на две единицы меньше количества вершин в рассматриваемом графе. Отметим, что реализация данного метода также возможна с использованием программы MathCad, а в качестве исходных данных используется только матрица смежностей графа исходной сети.

Несмотря на достаточно простую формализацию, данная процедура довольно громоздка с точки зрения задействованной памяти. Так,

в дальнейшем будет показано, что данное обстоятельство связано, прежде всего, с существенно большим числом остовых деревьев в рассматриваемом графе по сравнению с присутствующими в нем простыми путями. Действительно любое остовое дерево содержит один простой путь, но один и тот же путь может содержаться сразу в нескольких остовых деревьях.

Область практического применения данного метода в основном совпадает с областью применения метода перебора состояний элементов. Он применяется также и для расчета вероятности связности при значительном числе элементов, но небольшом числе связных подграфов сети [11].

#### **4. Метод полного перебора несвязных состояний сети связи.**

Данный метод, по сути, является антиподом метода перебора связных состояний сети связи. Последовательность решения задач сохраняется, но рассматриваются события несвязности. При этом событию несвязности многополюсной или двухполюсной сети соответствует факт несуществования ни одного остового дерева либо простой цепи. В научной литературе по классической теории надежности метод полного перебора несвязных состояний сети связи является частной вариацией метода минимальных сечений [6]. Аналогично ранее рассмотренному подходу необходимо остановиться на двух случаях графов сетей связи — много-связных и двухсвязных. В связи с этим событие несвязности как для многополюсной, так и для двухполюсной сети наступает в случае отказа всех элементов некоторого сечения. При этом в многополюсной сети сечением будет набор элементов, приводящий к несвязному графу, а в двухполюсной — к отсутствию маршрутов между источником и стоком.

Одновременное присутствие двух и более сечений вполне возможно, а значит, аналогично предыдущим выводам для расчета вероятности несвязности необходимо использовать теорему сложения для совместных событий [5].

Сущность данного метода расчета вероятности несвязности заключается в формировании всех существующих вариантов из  $n$  сечений так, что каждая альтернатива включает все элементы графа, принадлежащие формируемому сечению, а также расчету вероятности существования альтернатив и знакопеременному их суммированию [7, 8]. Следует отметить, что трудоемкость данного метода сопоставима со сложностью метода перебора связных состояний, а требование к вычислению индикаторов (функций) связности для всех подграфов исходного графа сети также отсутствует [12].

Пусть  $G_i^j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  — множество всех сечений (многополюсной или двухполюсной сети) исходного графа  $G$ . Событие, за-

ключающееся в неисправности всех элементов сечения  $G'_i$ , обозначено  $G'_i$  и далее трактуется как событие несвязности сечения  $G'_i$ . Отметим, что в отличие от события связности подграфа  $G_i$ , которое возникает при неисправности хотя бы одного из ребер подграфа  $G_i$ , событие несвязности сечения  $G'_i$  возникает только при неисправности всех ребер сечения  $G'_i$ . Аналогично расчету вероятности связности множество всех неисправных состояний сети связи  $\bigcup_{i=1}^n G'_i$  совпадает с объединением событий  $G'_i$ , поэтому для вероятности несвязности сети справедливо равенство:

$$q_G = Q\left(\bigcup_{i=1}^n G'_i\right) = \sum_{i=1}^n Q(G'_i) - \sum_{i<j} Q(G'_i G'_j) + \sum_{i<j<k} Q(G'_i G'_j G'_k) - \dots + (-1)^{n-1} Q(G'_1 G'_2 \dots G'_n), \quad (2)$$

где  $Q(G'_1 G'_2 \dots G'_i)$  — вероятность пересечения событий  $G'_1, G'_2, \dots, G'_i$ .

Учитывая, что вероятность совместного события несвязности сразу нескольких сечений рассчитывается на основе соответствующих условных вероятностей, формулу вероятности несвязности сети (2) можно представить в виде:

$$q_G = \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n q_i q_{j,i} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n q_i q_{j,i} q_{k,j,i} - \dots + (-1)^{n-1} q_1 q_{2,1} \dots q_{n,n-1, \dots, 2,1},$$

где  $q_i = 1 - p_i = Q(G'_i)$  — вероятность несвязности сечения  $G'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $q_{j,j-1, \dots, i+1, i} = P(G'_i / G'_{i+1} \dots G'_{j-1}, G'_j)$  — вероятность несвязности сечения  $G'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  без учета элементов, входящих в сечения  $G'_{i+1}, \dots, G'_{j-1}, G'_j$ .

Отсюда видно, что процедура накопления точного значения вероятности несвязности  $q_G$  является, так же как и вероятности

связности, аддитивной и знакопеременной. При этом все вышеописанные свойства идентичны для методов на основе как связных, так и несвязных подграфов.

### 5. Методы формирования множеств несвязных подграфов.

Процедуры формирования множеств сечений как для направления связи, так и для графа в целом являются несколько более простыми, чем аналогичные процедуры для связных подграфов. Данное обстоятельство обусловлено, прежде всего, тем, что для большинства реальных сетевых топологий количество соответствующих связных подграфов (путей и остовых деревьев) обычно сопоставимо или существенно больше количества несвязных подграфов (сечений в направлении и в целом).

Множества сечений в направлении связи формируются на основе ранее использованных сечений вершин графа [10]. При этом данные сечения разбиваются на три группы. Первая содержит только сечение вершины–истока, вторая — только сечение вершины–стока, а третья — все оставшиеся. Производится последовательный перебор всех комбинаций третьей группы, порядок которых варьируется от одного до значения на три единицы меньшего числа вершин в графе. Для каждой комбинации проверяется два условия. Первое: если комбинация содержит все вершины, входящие в первую группу (сечение вершины–истока), то она отбрасывается. Второе: если комбинация не включает в себя сечений, которые не содержат вершины, входящие во вторую группу (сечение вершины–стока), то она также отбрасывается. Данные условия позволяют существенно сократить количество не минимальных сечений, но полностью, как показали исследования, эту проблему не устраняют.

Каждая из полученных комбинаций третьей группы дополняется первой (сечением вершины–истока) и после удаления дублированных ребер сохраняется как сечение графа в направлении. Следует заметить, что в отличие от подхода, описанного в [10], необходимо дополнительно проверять сохраняемые сечения на минимальность, так как данная процедура формирует сечения, способные потенциально содержать в себе минимальные. Отметим, что подобная процедура также достаточно просто реализуется в программной среде MathCad, а в качестве исходных данных используются, как и при формировании простых путей, матрица смежностей и две вершины — исток и сток.

Множества сечений для графа в целом формируются на основе перебора всех допустимых комбинаций ребер от первого порядка до порядка, в общем случае соответствующего числу ребер в графе сети. При этом для сокращения количества рассматриваемых комбинаций используется прием, когда комбинация, являющаяся сечением, в дальнейшем не

порождает комбинации более высокого порядка. Для каждой комбинации проверяется два условия. Первое: является ли она сечением, то есть на основе метода поиска в ширину осуществляется контроль связности графа, не включающего ребра данной комбинации. Второе: выполняется проверка на минимальность данной комбинации, то есть является ли она подмножеством уже найденных сечений или нет. Реализация данной процедуры также достаточна проста в пакете математического моделирования MathCad, а исходные данные аналогичны используемым при формировании множества остовых деревьев — матрица смежностей.

Отметим, что в отличие от метода формирования сечений в направлении связи этот метод оказывается более громоздким вследствие как несколько большего количества сечений, так и более разветвленной процедуры образования комбинаций для проверки.

**6. Граничные оценки.** Ранее были рассмотрены аналитические методы вычисления точного значения вероятности связности выбранной пары вершин для случая двухполюсной сети [13, 14]. При этом подчеркивалось, что вычисление точного значения вероятности связности на сложно разветвленных сетях из-за большого объема трудозатрат не всегда реализуемо [15]. Кроме того, при проведении исследований структурной надежности сетей связи проектировщика интересует относительная точность вычислений, а не абсолютная, например, точность в первом, втором, третьем и так далее знаке (или значащей цифре) после запятой в значении вероятности связности [5, 16]. Однако эта точность должна быть гарантированной [17]. В этом случае следует оперировать термином «граничная оценка» вероятности связности, оговаривая точность (достигнутую или заданную) проведенных вычислений.

Следует отметить еще одно важное достоинство рассматриваемых методов перебора типовых (связных или несвязных) состояний — на их основе оказывается возможным получать граничные оценки вероятности связности сети. Так, при расчете границ Эзари — Прошана [18] используется полный набор несвязных (для верхней) и связных (для нижней) состояний сети связи. Данные границы основаны на утверждении, что вероятность связности сети при тех же условиях выше (ниже), чем у сети, составленной из последовательного (параллельного) соединения полного набора независимых несвязных (связных) подграфов. При расчете границ Литвака — Ушакова используются только реберно-непересекающиеся сечения (для верхней) и связные подграфы (для нижней), то есть подмножества элементов такие, в которых какой-либо элемент не встречается дважды. В данной границе учтено широко известное естественное свойство монотонности, заключающееся в уменьшении (увеличении) надежности сети при снижении (повышении) надежности любого элемента.

**7. Верхняя граница Эзари — Прошана.** При расчете верхней границы Эзари — Прошана используется полный набор связанных состояний сети связи (простых цепей).

Напомним, что  $G_i, i = 1, 2, \dots, n$  — множество всех подграфов (простых цепей) исходного графа  $G$ , а событие, заключающееся в исправности всех элементов связанного подграфа  $G_i$ , также обозначено

$G_i$ . Кроме того, множество всех исправных состояний сети связи  $\bigcup_{i=1}^n G_i$  совпадает с объединением событий  $G_i$ , а значит, для вероятности связности сети на основе правила де Моргана [19] справедливо равенство:

$$p_G = P\left(\bigcup_{i=1}^n G_i\right) = P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^n \overline{G_i}}\right),$$

где  $\bar{x}$  — событие противоположное событию  $x$ .

Следовательно:

$$q_G = 1 - p_G = P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{G_i}\right).$$

Вероятность совместного осуществления связанных случайных событий больше, чем произведение вероятностей этих событий. Значит, справедливо неравенство:

$$q_G \geq \prod_{i=1}^n P(\overline{G_i}).$$

Данное выражение показывает, что вероятность несвязности сети больше, чем вероятность неработоспособности параллельно соединенных всех независимых минимальных связанных подграфов. Подобное утверждение равносильно тому, что вероятность связности сети меньше при прочих равных условиях, чем у сети, включающей параллельное соединение всего набора независимых связанных подграфов. Таким образом, верхняя оценка Эзари — Прошана для вероятности связности сети имеет вид [18]:

$$p_G \leq p_e^+ = 1 - \prod_{i=1}^n q_i,$$

где  $q_i = P(\overline{G_i})$  — вероятность несвязности связанного подграфа  $G_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Если связный подграф  $G_i$  состоит из  $n_i$  элементов с вероятностью исправной работы  $p_{i,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ , то вероятность несвязности подграфа определяется выражением:

$$q_i = 1 - \prod_{j=1}^{n_i} p_{i,j}.$$

**8. Нижняя граница Эзари — Прошана.** При расчете нижней границы Эзари — Прошана используется полный набор несвязных состояний сети связи (сечений).

Напомним, что  $G'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  — множество всех сечений (двухполюсной сети) исходного графа  $G$ , а событие, заключающееся в том, что все элементы сечения  $G'_i$  неисправны, также обозначено как  $G'_i$ . Кроме того, пересечение обратных событий  $\overline{G'_i}$  однозначно свидетельствует о связности исходного графа  $G$ :

$$p_G = P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{G'_i}\right).$$

Следовательно, на основе неравенства для вероятности одновременной реализации связанных случайных событий справедливо:

$$p_G \geq \prod_{i=1}^n P\left(\overline{G'_i}\right).$$

Таким образом, нижняя оценка Эзари — Прошана для вероятности связности сети имеет вид [18]:

$$p_G \geq p_e^- = \prod_{i=1}^n p_i,$$

где  $p_i = P\left(\overline{G'_i}\right)$  — вероятность связности хотя бы одного элемента сечения  $G'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Если сечение  $G'_i$  состоит из  $n_i$  элементов с вероятностью исправной работы  $q_{i,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ , вероятность связности хотя бы одного элемента этого сечения определяется выражением:

$$p_i = 1 - \prod_{j=1}^{n_i} q_{i,j}.$$

**9. Верхняя граница Литвака — Ушакова.** При расчете верхней границы Литвака — Ушакова используются только реберно-непересекающиеся сечения, то есть подмножества элементов такие, в которых какой-либо элемент не встречается дважды.

Структуры сетей связи обладают естественным свойством монотонности [19]: снижение надежности любого элемента приводит к уменьшению надежности сети. Идея данной оценки базируется на этом свойстве монотонных структур. Выделим в графе сети связи  $G$  различные наборы взаимно независимых минимальных сечений  $G'_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Если в сети выделен определенный набор независимых сечений с индексами, образующими множество  $N_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , то для любого набора  $H_k$  вероятность связности графа, образованного этим набором, определяется как пересечение событий связности хотя бы одного элемента сечения:

$$p_k = P\left(\bigcap_{i \in N_k} \overline{G'_i}\right).$$

Для любого из наборов  $N_k$  выполняется условие  $p_G \leq p_k$ , то есть верхняя граница Литвака — Ушакова  $p_l^+$  имеет вид:

$$p_G \leq p_l^+ = \min_{k=1,2,\dots,N} p_k.$$

Для нахождения вероятностей  $p_k$  учтем, что набор  $H_k$  включает  $m_k$  сечений, то есть  $H_k = \{G'_{k,i}\}_{i=1,2,\dots,m_k}$ ,  $G'_{k,i}$  —  $i$ -е сечение в  $k$ -м наборе с вероятностью связности  $p_{k,i}$ . Следовательно:

$$p_k = \prod_{i=1}^{m_k} p_{k,i}.$$

При этом аналогично ранее рассмотренному варианту, если сечение  $G'_{k,i}$  состоит из  $n_{k,i}$  элементов с вероятностью неисправной работы  $q_{k,i,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_{k,i}$ , вероятность связности хотя бы одного элемента этого сечения определяется выражением:

$$p_{k,i} = 1 - \prod_{j=1}^{n_{k,i}} q_{k,i,j}.$$

В практических приложениях нет необходимости определять все возможные наборы независимых сечений. Если верхняя граница Литвака — Ушакова будет найдена не на всем множестве возможных наборов минимальных сечений, то она все же будет являться верхней границей, хотя может оказаться, что и не очень точной. Данное обстоятельство является очень важным, поскольку позволяет достаточно быстро построить неточную верхнюю границу.

**10. Нижняя граница Литвака — Ушакова.** При расчете нижней границы Литвака — Ушакова используются только реберно-непересекающиеся связные подграфы, то есть подмножества элементов такие, в которых какой-либо элемент не встречается дважды.

Структуры сетей связи обладают неотъемлемым свойством монотонности [19]: увеличение надежности любого элемента влечет за собой повышение надежности сети. Идея данной оценки оценок базируется на этом свойстве монотонных структур.

Выделим в графе сети связи  $G$  разные наборы взаимно независимых минимальных связных подграфов  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , а остальные элементы удалим из сети, снизив их надежность до минимально возможного значения (нуля), и тем самым уменьшим и надежность сети в целом.

Если в сети определен некоторый набор  $H_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  независимых связных подграфов с индексами, образующими множество  $H_k$ , то для любого набора  $H_k$  вероятность связности графа, образованного этим набором, определяется как объединение событий связности:

$$p_k = P\left(\bigcup_{i \in N_k} G_i\right).$$

Применив правило де Моргана и определив математические ожидания обеих частей данного равенства, получаем:

$$p_k = P\left(\bigcup_{i \in N_k} G_i\right) = P\left(\overline{\bigcap_{i \in N_k} \overline{G_i}}\right) = 1 - \prod_{i \in N_k} P(\overline{G_i}).$$

Для любого из наборов  $N_k$  выполняется условие  $p_G \geq p_k$ , то есть нижняя граница Литвака — Ушакова  $p_l^-$  имеет вид:

$$P_G \geq P_l^- = \max_{k=1,2,\dots,N} P_k.$$

Для построения таких наборов  $H_k$  независимых связных подграфов может быть использован следующий набор рекомендаций, дающий хорошие практические результаты [19].

Так как необходимо определить наилучшую из нижних границ, то анализ начинается с кратчайших связных подграфов. Следует отметить, что для двухполюсных сетей метрикой может быть как число ребер в последовательном маршруте, так и максимальная надежность маршрута (т.е. кратчайшим путем может являться максимально надежный путь).

Таким образом, построение наборов  $H_k$  независимых связных подграфов начинается с поиска кратчайшего связного подграфа. Далее из исходного графа исключаются все элементы, содержащиеся в первом связном подграфе, и со вновь образованным графом проводится аналогичная процедура, то есть отыскивается кратчайший связный подграф, а затем его ребра удаляются. Подобный процесс выполняется до тех пор, пока граф не перестанет быть связным.

Для нахождения вероятностей  $p_k$  учтем, что набор  $H_k$  включает  $m_k$  связных подграфов, то есть  $H_k = \{G_{k,i}\}_{i=1,2,\dots,m_k}$ ,  $G_{k,i}$  —  $i$ -й связный подграф в  $k$ -м наборе с вероятностью связности  $p_{k,i} = 1 - q_{k,i}$ . Следовательно:

$$p_k = 1 - \prod_{i=1}^{m_k} q_{k,i}.$$

При этом аналогично ранее рассмотренному варианту, если связный подграф  $G_{k,i}$  состоит из  $n_{k,i}$  элементов с вероятностью исправной работы  $p_{k,i,j}$ ,  $j=1,2,\dots,n_{k,i}$ , то вероятность связности этого подграфа определяется выражением:

$$p_{k,i} = \prod_{j=1}^{n_{k,i}} p_{k,i,j}.$$

Аналогично случаю наборов независимых сечений, также возможно определять негарантированную нижнюю оценку, вовлекая не все возможные наборы связных подграфов, а меньшее их число.

**11. Оценки вероятностей связности магистральной сети Ростелеком «Европа — Азия».** В качестве тестовой сети связи используется магистральная сеть Ростелеком, развернутая с целью формирования потоков в направлении «Европа — Азия» (рисунок 1). Отметим, что линии связи, задействованные в транзите трафика между частями света, обозначены на рисунке толстыми цветными линиями. Именно они и формируют структуру сети, которая в дальнейшем будет подвергнута анализу.

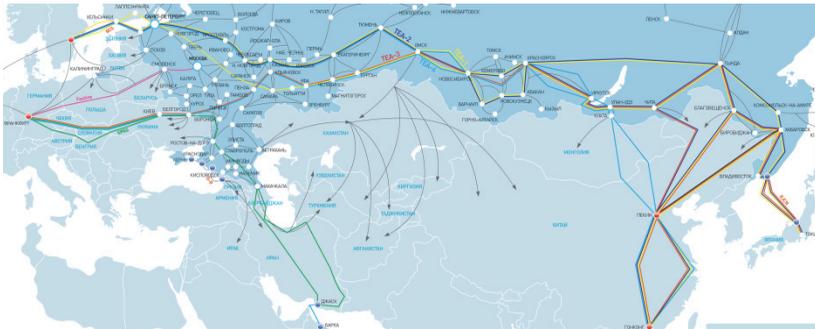


Рис. 1. Магистральная сеть Ростелеком

Помеченный граф рассматриваемой сети связи представлен на рисунке 2, а соответствие между нумерацией вершин и названиями городов приведено в таблице 1. В данной таблице полужирным шрифтом выделены вершины, являющиеся с точки зрения транспортировки трафика источниками и стоками.

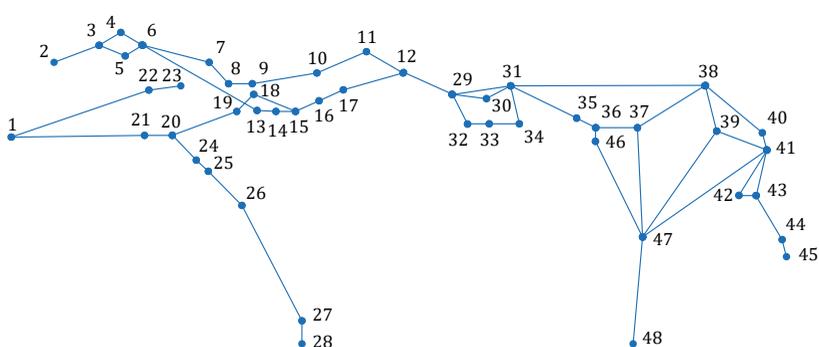


Рис. 2. Граф — модель магистральной сети Ростелеком (рисунок 1)

Таблица 1. Соответствие между нумерацией вершин и названиями городов

Номер вершины	Город	Номер вершины	Город	Номер вершины	Город
1	<i>Франкфурт</i>	17	Курган	33	Новокузнецк
2	–	18	Ульяновск	34	Абакан
3	Хельсинки	19	Пенза	35	Иркутск
4	Лаппеэнранта	20	Белгород	36	Улан-Удэ
5	–	21	Киев	37	Чита
6	Санкт-Петербург	22	Смоленск	38	Тында
7	Ярославль	23	<i>Москва</i>	39	Благовещенск
8	Нижний Новгород	24	Ростов-на-Дону	40	Комсомольск-на-Амуре
9	Казань	25	Ставрополь	41	Хабаровск
10	Екатеринбург	26	Махачкала	42	Владивосток
11	Тюмень	27	Джаск	43	–
12	Омск	28	<i>Барка</i>	44	–
13	Самара	29	Новосибирск	45	<i>Токио</i>
14	Тольятти	30	Кемерово	46	Кяхта
15	Уфа	31	Красноярск	47	Пекин
16	Челябинск	32	Барнаул	48	<i>Гонконг</i>

Вероятность связности  $p_{ij}$  для каждой линии связи задается как ее коэффициент готовности и вычисляется для волоконно-оптических систем передачи на основе протяженности  $d$  [20]:

$$p_{i,j} = 0,99987^{\frac{d}{402,325}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 48.$$

Протяженность  $d$  определяется на основе географических координат городов, между которыми развернута данная линия связи. Рассчитанные параметры линий связи приведены в таблице 2.

В качестве примера на рисунке 3 представлены зависимости вероятности связности  $p_G$  графа от количества  $i$  учтенных подграфов для направления связи 2–48 в случае использования простых цепей и сечений.

Для этого же направления связи 2–48 на рисунке 4 показаны зависимости граничных оценок вероятности связности  $p_G$  графа от количества  $i$  учтенных подграфов. Отметим, что нижняя граница Эзари — Прошана и верхняя Литвака — Ушакова практически совпали, что делает возможным практически близкую к точной оценку вероятности связности на основе данных границ.

Таблица 2. Параметры линий связи

Линия $i - j$	Протяженность $d$ , км	Вероятность связности $p_{ij}$	Линия $i - j$	Протяженность $d$ , км	Вероятность связности $p_{ij}$	Линия $i - j$	Протяженность $d$ , км	Вероятность связности $p_{ij}$
2 – 3	630	0,9998	19 – 20	945	0,99969	35 – 36	135	0,99996
3 – 5	360	0,99988	20 – 21	405	0,99987	36 – 37	585	0,99981
3 – 4	315	0,9999	1 – 21	1710	0,99945	37 – 38	1035	0,99967
4 – 6	315	0,9999	1 – 22	1890	0,99939	31 – 38	2295	0,99926
5 – 6	180	0,99994	22 – 23	450	0,99985	38 – 39	630	0,9998
6 – 7	945	0,99969	20 – 24	495	0,99984	39 – 41	675	0,99978
7 – 8	360	0,99988	24 – 25	180	0,99994	38 – 40	990	0,99968
8 – 9	315	0,9999	25 – 26	675	0,99978	40 – 41	225	0,99993
9 – 10	900	0,99971	26 – 27	1710	0,99945	41 – 42	675	0,99978
10 – 11	675	0,99978	27 – 28	315	0,9999	42 – 43	135	0,99996
11 – 12	585	0,99981	12 – 29	720	0,99977	41 – 43	630	0,9998
12 – 17	855	0,99972	29 – 30	450	0,99985	43 – 44	720	0,99977
16 – 17	315	0,9999	30 – 31	360	0,99988	44 – 45	180	0,99994
15 – 16	360	0,99988	29 – 31	765	0,99975	36 – 46	135	0,99996
14 – 15	180	0,99994	29 – 32	450	0,99985	46 – 47	1395	0,99955
13 – 14	270	0,99991	32 – 33	270	0,99991	37 – 47	1350	0,99956
6 – 13	1755	0,99943	33 – 34	270	0,99991	39 – 47	1710	0,99945
15 – 18	495	0,99984	31 – 34	405	0,99987	41 – 47	1980	0,99936
18 – 19	315	0,9999	31 – 35	945	0,99969	47 – 48	1440	0,99953

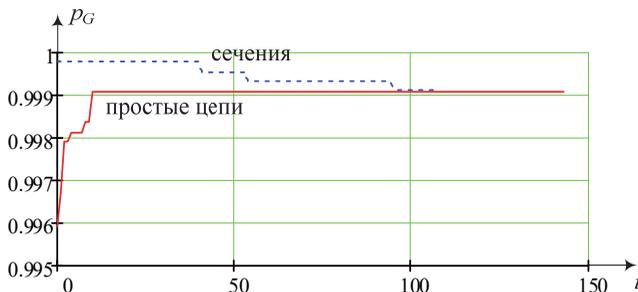


Рис. 3. Зависимости вероятности связности  $p_G$  графа от количества  $i$  учтенных подграфов для направления связи 2–48 (рисунки 1, 2)



Рис. 4. Зависимости граничных оценок вероятности связности  $p_G$  графа от количества  $i$  учтенных подграфов для направления связи 2–48 (рисунки 1, 2)

В таблице 3 приведены сводные данные по точным и граничным оценкам вероятности связи для различных направлений и для графа в целом, а также информация о количестве анализируемых подграфов (простых цепей, деревьев, сечений) и временных затрат на расчет соответствующих параметров. Отметим, что реализация вышеописанных процедур анализа выполнена в программной среде MathCad 15, а вычисления проводились на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM) i5-3470 CPU @ 3,20 ГГц 3,60 ГГц, оперативной памятью 8 ГБ и 64-разрядной операционной системой Windows 7. Отметим, что применение метода полного перебора оказалось малоэффективным для данной сети (рисунок 1), поскольку потребовало проверки  $2^{57}$  состояний.

Таблица 3. Результирующие данные анализа устойчивости магистральной сети Ростелеком

Направление связи	Тип оценки	Число подграфов	Вероятность связности	Время анализа, с
1–23 (Франкфурт – Москва)	верхняя граница Эзари – Прошана	1	0,999 244	0,06
	верхняя граница Литвака – Ушакова	2	0,999 244	0,109
	точная на основе путей	1	0,999 244	0,09
	точная на основе сечений	2	0,999 244	0,09
	нижняя граница Эзари – Прошана	2	0,999 244	0,08
1–28 (Франкфурт – Барка)	нижняя граница Литвака – Ушакова	1	0,999 244	0,06
	верхняя граница Эзари – Прошана	1	0,998 228	0,05
	верхняя граница Литвака – Ушакова	9	0,998 228	0,28
	точная на основе путей	1	0,998 228	0,09
	точная на основе сечений	9	0,998 228	0,28
	нижняя граница Эзари – Прошана	9	0,997 966	0,28
нижняя граница Литвака – Ушакова	1	0,998 228	0,05	

Продолжение таблицы 3.

Направление связи	Тип оценки	Число подграфов	Вероятность связности	Время анализа, с
1–45 (Франкфурт – Токио)	верхняя граница Эзари – Прошана	216	1	0,06
	верхняя граница Литвака – Ушакова	153	0,998 255	6,66
	точная на основе путей	216	0,998 226	5,55
	точная на основе сечений	153	0,998 226	52,54
	нижняя граница Эзари – Прошана	153	0,996 891	1,89
	нижняя граница Литвака – Ушакова	216	0,996 154	0,08
1–48 (Франкфурт – Гонконг)	верхняя граница Эзари – Прошана	72	1	0,05
	верхняя граница Литвака – Ушакова	158	0,998 98	7,11
	точная на основе путей	72	0,998 502	0,52
	точная на основе сечений	158	0,998 502	43,66
	нижняя граница Эзари – Прошана	158	0,996 717	1,05
	нижняя граница Литвака – Ушакова	72	0,996 473	0,05
2–23 («←» – Москва)	верхняя граница Эзари – Прошана	4	1	0,11
	верхняя граница Литвака – Ушакова	76	0,998 69	5,85
	точная на основе путей	4	0,997 791	0,13
	точная на основе сечений	76	0,997 791	1,48
	нижняя граница Эзари – Прошана	76	0,996 398	1,44
	нижняя граница Литвака – Ушакова	4	0,996 907	0,23
2–28 («←» – Барка)	верхняя граница Эзари – Прошана	4	1	0,23
	верхняя граница Литвака – Ушакова	40	0,998 14	1,06
	точная на основе путей	4	0,998 139	0,12
	точная на основе сечений	40	0,998 139	0,75
	нижняя граница Эзари – Прошана	40	0,998 139	0,87
	нижняя граница Литвака – Ушакова	4	0,997 255	0,23
2–45 («←» – Токио)	верхняя граница Эзари – Прошана	432	1	0,18
	верхняя граница Литвака – Ушакова	100	0,999 273	6,57
	точная на основе путей	432	0,999 271	32,33
	точная на основе сечений	100	0,999 271	124,2
	нижняя граница Эзари – Прошана	100	0,999 271	1,65
	нижняя граница Литвака – Ушакова	432	0,996 313	0,3

Продолжение таблицы 3.

Направление связи	Тип оценки	Число подграфов	Вероятность связности	Время анализа, с
2–48 («–» – Гонконг)	верхняя граница Эзари – Прошана	144	1	0,14
	верхняя граница Литвака – Ушакова	105	0,999 098	6,71
	точная на основе путей	144	0,999 097	2,8
	точная на основе сечений	105	0,999 097	201,6
	нижняя граница Эзари – Прошана	105	0,999 097	0,87
	нижняя граница Литвака – Ушакова	144	0,996 632	0,14
23–28 (Моск-ва – Барка)	верхняя граница Эзари – Прошана	1	0,997 473	0,05
	верхняя граница Литвака – Ушакова	15	0,997 473	0,37
	точная на основе путей	1	0,997 473	0,09
	точная на основе сечений	15	0,997 473	0,5
	нижняя граница Эзари – Прошана	1	0,995 358	0,34
	нижняя граница Литвака – Ушакова	15	0,997 473	0,05
23–45 (Моск-ва – Токио)	верхняя граница Эзари – Прошана	216	1	0,2
	верхняя граница Литвака – Ушакова	159	0,997 5	7,02
	точная на основе путей	216	0,997 472	5,71
	точная на основе сечений	159	0,997 472	54,26
	нижняя граница Эзари – Прошана	159	0,993 591	2,03
	нижняя граница Литвака – Ушакова	216	0,995 401	0,065
23–48 (Моск-ва – Гонконг)	верхняя граница Эзари – Прошана	72	1	0,05
	верхняя граница Литвака – Ушакова	164	0,997 326	7,52
	точная на основе путей	72	0,997 298	0,64
	точная на основе сечений	164	0,997 298	51
	нижняя граница Эзари – Прошана	164	0,993 418	1,2
	нижняя граница Литвака – Ушакова	72	0,995 719	0,05
28–45 (Барка – Токио)	верхняя граница Эзари – Прошана	216	1	0,06
	верхняя граница Литвака – Ушакова	129	0,998 053	6,68
	точная на основе путей	216	0,997 82	6,01
	точная на основе сечений	129	0,997 82	41,25
	нижняя граница Эзари – Прошана	129	0,996 369	2,09
	нижняя граница Литвака – Ушакова	216	0,995 748	0,08

Продолжение таблицы 3.

Направле- ние связи	Тип оценки	Число подграфов	Вероят- ность связности	Время анализа, с
28–48 (Барка – Гонконг)	верхняя граница Эзари – Прошана	72	1	0,05
	верхняя граница Литвака – Ушакова	134	0,997 792	7,15
	точная на основе путей	72	0,997 646	0,51
	точная на основе сечений	134	0,997 646	35,83
	нижняя граница Эзари – Прошана	134	0,996 196	1,19
	нижняя граница Литвака – Ушакова	72	0,996 067	0,05
45–48 (Токио – Гонконг)	верхняя граница Эзари – Прошана	22	1	0,37
	верхняя граница Литвака – Ушакова	33	0,999 794	24,16
	точная на основе путей	22	0,999 244	0,44
	точная на основе сечений	33	0,999 244	25,13
	нижняя граница Эзари – Прошана	33	0,998 736	24,68
	нижняя граница Литвака – Ушакова	22	0,998 402	0,39
Сеть в целом	верхняя граница Эзари – Прошана	1 096 704	–	–
	верхняя граница Литвака – Ушакова	190	0,995 718	10,37
	точная на основе путей	1 096 704	–	–
	точная на основе сечений	190	–	–
	нижняя граница Эзари – Прошана	190	0,995 716	2,53
	нижняя граница Литвака – Ушакова	1 096 704	–	–

Данная таблица наглядно демонстрирует преимущество использования точных оценок на основе связанных состояний, не смотря на их большее количество по сравнению с несвязными состояниями, что является следствием особенностей анализируемого графа, которые проявляются в возможности его представления в виде совокупности подграфов и имеют лишь одну точку сочленения. Результатом этого же оказывается вычислительная сложность расчета верхних границ Литвака — Ушакова, поскольку требует рассмотрения огромного количества (более  $10^5$ ) независимых наборов сечений.

Расчет точных значений вероятности связности для графа в целом оказался практически невозможным в связи с нехваткой оперативной памяти. В то же время вычисления на основе тысячи деревьев заняли около 105 секунд и привели к величине вероятности связности  $p_G = 0,992\ 553$ , а на основе ста шестнадцати сечений — 27 секунд и

$p_G = 0,996\ 469$ . Верхняя граница Эзари — Прошана и нижняя Литвака — Ушакова также оказались недоступными для расчетов в виду значительного числа остовых деревьев (более одного миллиона), однако границы, использующие сечения показали величины вероятности связности, различные лишь в шестом знаке после запятой.

**12. Заключение.** В заключение следует отметить, что, несмотря на существенный недостаток метода полного перебора типовых состояний, заключающийся в значительной трудоемкости проводимых вычислений, он оказывается достаточно востребованным, поскольку наглядно и естественно описывает понятия связности и несвязности сети, что приводит к существенному упрощению реализации вычислительных процедур, используемых в рамках анализа устойчивости. Преимущества метода перебора типовых состояний по сравнению с полным перебором всех состояний позволяют применять рассмотренный метод на более сложноразветвленных сетях, характеризующихся значительными мощностями как вершин, так и ребер в графе. Кроме того, на основе метода полного перебора типовых состояний оказывается возможным получать граничные оценки вероятности связности сети, причем одни из них, а именно границы Литвака — Ушакова, позволяют ограничиваться перебором неполного числа вариантов наборов независимых связных и несвязных состояний графа, что также существенно снижает вычислительные сложности решаемых задач.

Следует подчеркнуть, что точные оценки устойчивости сетей, полученные на основе рассмотренного метода, обладают, с одной стороны, приемлемой вычислительной сложностью, а с другой — достаточной достоверностью. Так, практически для всех рассмотренных вариантов направлений связи (таблица 3) точные оценки в сравнении с приближенными имеют различия в третьем знаке после запятой, что является критическим, поскольку требования к устойчивости (надежности и живучести), предъявляемые существующим ГОСТ [7], разнятся во втором и третьем знаке.

### Литература

1. Zuev K.M., Wu S., Beck J.L. Network reliability problem and its efficient solution by Subset Simulation // Probabilistic Engineering Mechanics. vol. 40. pp. 25–35.
2. Mussel C., Hopfensitz M., Kestler H.A. Boolnet package vignette // 2015. 49 p.
3. Teruggia R. Reliability Analysis of Probabilistic Networks: PhD Thesis // University of Turin. 2010. 241 p.
4. Дудник Б.Я., Овчаренко В. Ф. Надежность и живучесть систем связи // М.: Радио и связь. 1984. 216 с.
5. Филин Б.П. Методы анализа структурной надежности сетей связи // Москва : Радио и связь. 1988. 208 с.

6. *Половко А.М., Гуров С.В.* Основы теории надежности // БХВ-Петербург. 2006. 704 с.
7. ГОСТ Р 53111–2008. Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки. // М. : Стандартинформ. 2009. 16 с.
8. *Обоскалов В.П.* Структурная надежность электроэнергетических систем: учеб. пособие // Екатеринбург: УрФУ. 2012. 194 с.
9. *Батенков К.А.* Числовые характеристики структур сетей связи // Труды СПИИРАН. 2017. № 4(53). С. 5–28.
10. *Chaturvedi S.K.* Network Reliability, Measures and Evaluation // John Wiley & Sons. 2016. 237 p.
11. *Tamm V.* Теория графов // М.: Мир. 1988. 424 с.
12. *Zhao J., Yagan O., Gligor V.* On the Strengths of Connectivity and Robustness in General Random Intersection Graphs // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. 2014. pp. 3661–3668.
13. *Yagan O., Makowski A.M.* Zero-one Laws for Connectivity in Random Key Graphs // IEEE Transactions on Information Theory. 2012. vol. 58. no. 5. pp. 2983–2999.
14. *Zhao J., Yagan O., Gligor V.* Connectivity in Secure Wireless Sensor Networks under Transmission Constraints // 2014 52nd Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. 2014. pp. 1294–1301.
15. *Nuñez A. et al.* Detecting series periodicity with horizontal visibility graphs // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. vol. 22. no. 07. pp. 1250160.
16. *Zhang H.C. et al.* Connection effect on amplitude death stability of multi-module floating airport // Ocean Engineering. 2017. vol. 129. pp. 46–56.
17. *Батенков К.А.* Устойчивость сетей связи // Академия ФСО России. 2017. 277 с.
18. *Brown J.I., Tufts J.* On the roots of domination polynomials // Graphs and Combinatorics. 2014. vol. 30. no. 3. pp. 527–547.
19. *Ушаков И.А.* Курс теории надежности систем // М.: Дрофа. 2008. 239 с.
20. *Pino W., Gomes T., Kooij R.* A Comparison between Two All-Terminal Reliability Algorithms // Journal of Advances in Computer Networks. 2015. vol. 3. no. 4. pp. 284–290.

**Батенков Кирилл Александрович** — д-р техн. наук, доцент, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: статистическая теория связи, модели и методы обработки сигналов, анализ качества сетей связи. Число научных публикаций — 150. [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru); ул. Приборостроительная, 35, 302015, Орёл, Российская Федерация; р.т.: +7(486)254-13-25.

K.A. BATENKOV  
**ACCURATE AND BOUNDARY ESTIMATE OF  
COMMUNICATION NETWORK CONNECTIVITY PROBABILITY  
BASED ON MODEL STATE COMPLETE ENUMERATION  
METHOD**

---

*Batenkov K.A. Accurate and Boundary Estimate of Communication Network Connectivity Probability Based on Model State Complete Enumeration Method.*

**Abstract.** We consider one of communication network structure analysis and synthesis methods, based on the simplest approach to connectivity probability calculation – a method of full network typical state search. In this case, the typical states of the network are understood as the events of network graph connectivity and disconnection, which are simple graph chains and sections. Despite significant drawback of typical state enumeration method, which involves significant calculation complexity, it is quite popular at stage of debugging new analysis methods. In addition, on its basis it is possible to obtain boundary estimates of network connectivity probability. Thus, when calculating Asari–Proshana boundaries use full set of incoherent (top) and cohesive (bottom) communication network states. These boundaries are based on statement that network connectivity probability under same conditions is higher (lower) than that of network composed of independent disjoint (connected) subgraph complete set serial (parallel) connection. When calculating Litvak–Ushakov boundaries, only edge-disjoint sections (for upper) and connected subgraphs (for lower) are used, i.e. subsets of elements such that any element does not meet two-rods. This boundary takes into account the well-known natural monotonicity property, which is to reduce (increase) network reliability with decrease (increase) any element reliability. From a computational view point Asari–Proshana boundaries have huge drawback: they require references of all connected subgraphs to compute upper bounds and all minimal cuts for bottom, which in itself is non-trivial. Litvak–Ushakov boundaries are devoid of these drawback: by calculating them, we can stop at any searching step for variants of sets of independent connected and disconnected graph states.

**Keywords:** Network, Graph Structure, Probability of Connectedness, Model State Complete Enumeration Method, Boundary Evaluation.

---

**Batenkov Kirill Aleksandrovich** — Ph.D., Dr.Sci., Associate Professor, Researcher, Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: statistical communication theory, models and methods of signal processing, communications network quality analysis. The number of publications — 150. [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru); 35, Priborostroitel'na-ya str., 302015, Orel, Russian Federation; office phone: +7(486)254-13-25.

### References

1. Zuev K.M., Wu S., Beck J.L. Network reliability problem and its efficient solution by Subset Simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*. vol. 40. pp. 25–35.
2. Mussel C., Hopfensitz M., Kestler H.A. Boolnet package vignette. 2015. 49 p.
3. Teruggia R. Reliability Analysis of Probabilistic Networks: PhD Thesis. University of Turin. 2010. 241 p.
4. Dudnik B. Ya., Ovcharenko V. F. *Nadezhnost' i zhivuchest' sistem svyazi* [The reliability and survivability of communication systems]. M.: Radio i svyaz'. 1984. 216 p. (In Russ.).
5. Filin B P. *Metody analiza strukturnoj nadezhnosti setej svyazi* [Methods of analysis of structural reliability of communication networks]. M.: Radio i svyaz'. 1988. 208 p. (In Russ.).

6. Polovko A.M., Gurov S.V. *Osnovy teorii nadezhnosti* [Fundamentals of reliability theory]. BHV-Peterburg. 2006. 704 p. (In Russ.).
7. GOST R 53111–2008. *Ustojchivost' funkcionirovaniya seti svyazi obshchego pol'zovaniya. Trebovaniya i metody proverki* [Stability of the public communication network. Requirements and verification methods]. M.: Standartinform. 2009. 16 p. (In Russ.).
8. Oboskalov V.P. *Structural reliability of electric power systems* [Structural reliability of electric power systems]. Ekaterinburg: UrFU. 2012. 194 p. (In Russ.).
9. Batenkov K.A. [Numerical characteristics of the structures of communication networks]. *Trudy SPIIRAN – Proceedings of SPIIRAS*. 2017. vol. 4(53). pp. 5–28. (In Russ.).
10. Chaturvedi S.K. Network Reliability. Measures and Evaluation. John Wiley & Sons. 2016. 237 p.
11. Tutte W.T. Graph Theory. AddisonWesley Publishing Company. 1984. 333 p. (Russ. ed.: Tatt U. *Teoriya grafov*. M.: Mir. 1988. 424 p.).
12. Zhao J., Yagan O., Gligor V. On the Strengths of Connectivity and Robustness in General Random Intersection Graphs. 53rd IEEE Conference on Decision and Control. 2014. pp. 3661–3668.
13. Yagan O. Makowski A.M. Zero-one Laws for Connectivity in Random Key Graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2012. vol. 58. no. 5. pp. 2983–2999.
14. Zhao J., Yagan O., Gligor V. Connectivity in Secure Wireless Sensor Networks under Transmission Constraints. 2014 52nd Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. 2014. pp. 1294–1301.
15. Nuñez A. et al. Detecting series periodicity with horizontal visibility graphs. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2012. vol. 22. no. 07. pp. 1250160.
16. Zhang H.C. et al. Connection effect on amplitude death stability of multi-module floating airport. *Ocean Engineering*. 2017. vol. 129. pp. 46–56.
17. Batenkov K. A. *Ustojchivost' setej svyazi* [Network stability]. Akademiya FSO Rossii. 2017. 277 p. (In Russ.).
18. Brown J.I., Tufts J. On the roots of domination polynomials. *Graphs and Combinatorics*. 2014. vol. 30. no. 3. pp. 527–547.
19. Ushakov I.A. *Kurs teorii nadezhnosti sistem* [Course in the theory of reliability systems]. M.: Drofa. 2008. 239 p. (In Russ.).
20. Pino W., Gomes T., Kooij R. A Comparison between Two All-Terminal Reliability Algorithms. *Journal of Advances in Computer Networks*. 2015. vol. 3. no. 4. pp. 284–290.