

С.В. БЫСТРОВ, Н.А. ВУНДЕР, М.М. СИНЕТОВА, А.В. УШАКОВ
**АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КОМПЕНСАТОРА ДЛЯ СИСТЕМ С
ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА ОСНОВЕ МОДИФИКАЦИИ ТИПОВЫХ
ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ**

Быстров С.В., Вундер Н.А., Синетова М.М., Ушаков А.В. Аналитическое конструирование последовательного компенсатора для систем с запаздыванием на основе модификации типовых полиномиальных моделей.

Аннотация. Целью работы является построение алгоритма аналитического конструирования последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с запаздыванием на основе модификации типовых полиномиальных моделей. Получена аналитическая связь характеристической частоты и частоты среза передаточной функции прямой ветви желаемой типовой полиномиальной модели. На основе данной связи произведена модификация типовых полиномиальных моделей с учетом величины запаздывания технического объекта.

Управление техническим объектом с запаздыванием с помощью последовательного компенсатора обладает рядом преимуществ. К ним относятся: минимальный объем измерительной информации для его реализации, представляемый сигналом ошибки воспроизведения системой задающего воздействия, что снимает необходимость введения в состав системы динамического наблюдателя для формирования сигналов оценки компонентов вектора состояния объекта; отсутствие проблемы ненулевых начальных условий, которые могут возникнуть при кратковременных нарушениях нормального функционирования системы, порождаемых наличием в составе системы динамического наблюдателя; простота процедуры конструирования последовательного компенсатора, а также единообразие этой процедуры для технических объектов типа «одномерный вход-одномерный выход» и типа «многомерный вход-многомерный выход».

Ключевые слова: аналитическое представление частоты среза, звено чистого запаздывания, модифицированные типовые полиномиальные модели с размещением корней Ньютона и Баттерворта, характеристическая частота, алгоритм аналитического конструирования последовательного компенсатора.

1. Введение. Наличие звена чистого запаздывания в составе непрерывных технических объектов стало заметной системной трудностью в решении задачи наделения систем, в состав которых входят объекты с гарантированной устойчивостью и гарантированным качеством процессов. Причем проблема чистого запаздывания оказалась сложной как для аппарата вход-выходных представлений в виде передаточных функций, так и для аппарата, основанного на векторно-матричном формализме метода пространства состояний. Однако существуют различные решения данной проблемы. Хорошо зарекомендовали себя графо-аналитические методы [1, 2] синтеза систем, в состав которых входит технический объект с запаздыванием, основанные на использовании аппарата логарифмических амплитудных частотных и фазовых частотных

характеристик путем контроля частоты среза и фазового сдвига, вносимого звеном чистого запаздывания. Нашли свою нишу методы [3, 4], основанные на аналитических аппроксимациях передаточной функции звена чистого запаздывания. Идея О. Смита [5, 6], высказанная им еще в 50-е годы и состоящая в выносе звена чистого запаздывания за пределы замкнутого контура, в последнее время получила интенсивное развитие и применение [7-13]. Отдельно можно выделить работы [14, 15], основанные на векторно-матричном формализме метода пространства состояний [16] в его интегральном представлении. Каждый из перечисленных методов не лишен пользовательских недостатков.

В предлагаемой статье при формировании алгоритма аналитического конструирования последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с запаздыванием авторы опирались на возможности аппарата вход-выходных представлений, потому что частотная версия этих представлений позволяет достаточно прозрачно представить эффект воздействия звена чистого запаздывания на качество процессов управления, сводящегося к уменьшению запаса устойчивости системы. Метод модального управления [17] в решаемой задаче слабо приемлем, потому что звено чистого запаздывания не имеет модального представления на комплексной плоскости [18]. В этой связи предлагается подход, основанный на использовании аналитического представления показателей типовых полиномиальных моделей, таких как частота среза, запас устойчивости по фазе, полосы пропускания отношения вход-выход и отношения вход-ошибка, добротность по скорости. Данный подход при заданном запаздывании позволяет априорно оценивать уменьшение запаса устойчивости, а следовательно, и величины колебательности процессов и их длительности. В своем решении представленный подход является однопараметрическим, так что аналитическое конструирование последовательного компенсатора на основе типовых полиномиальных моделей, параметризованных характеристической частотой, сводится к определению значения последней.

2. Аналитические представления показателей качества типовых полиномиальных моделей, параметризованных характеристической частотой. Рассмотрим непрерывную стационарную линейную замкнутую систему, где передаточная функция имеет параметризованную характеристическую частоту ω_0 в форме:

$$\Phi(s, \omega_0) = \frac{v_n \omega_0^n}{s^n + \sum_{i=1}^n v_i \omega_0^i s^{n-i}} = \frac{v_n \omega_0^n}{D(s, \omega_0)}, \quad (1)$$

где коэффициенты v_i – определяют тип размещения корней $D(s, \omega_0)$ полинома знаменателя (ПЗ) $\Phi(s, \omega_0)$, ω_0 определяет размер области локализации этого размещения. Основным преимуществом представления передаточной функции $\Phi(s, \omega_0)$ в форме (1) является то, что ее использование при фиксированных V_i сводит задачу синтеза к однопараметрической задаче поиска значения характеристической частоты ω_0 , от которой зависят длительность переходного процесса, добротность по скорости, частота среза, полоса пропускания. Поставим задачу анализа общесистемных показателей системы с передаточной функцией (1), зависящей от V_i и ω_0 . Сделаем это в форме утверждений.

Утверждение 1 (VI). Тип размещения корней ПЗ передаточной функции (1) совпадает с типом размещения корней ПЗ передаточной функции:

$$\Phi(s) = \frac{v_n}{s^n + \sum_{i=1}^n v_i s^{n-i}} = \frac{v_n}{D(s)} \quad (2)$$

с точностью до размера ω_0 области локализации этого размещения.

Доказательство. Разделим числитель и знаменатель передаточной функции (1) на ω_0^n , тогда получим:

$$\Phi(\bar{s}) = \frac{v_n}{\bar{s}^n + \sum_{i=1}^n v_i \bar{s}^{n-i}}, \quad (3)$$

где $\bar{s} = s/\omega_0$.

Примечание 1(III). Доказанное утверждение делает справедливым положение о том, что корни $s_i (i = \overline{1, n})$ полинома $D(s)$ и корни $s_i(\omega_0) (i = \overline{1, n})$ полинома $D(s, \omega_0)$ связаны соотношением $s_i(\omega_0) = \omega_0 s_i (i = \overline{1, n})$. Как следствие, у систем (1) и (2) будут одинаковые запасы устойчивости, перерегулирования и показатели колебательности, зависящими от ω_0 будут степень устойчивости по фазе, частота среза, резонансная частота, время переходного процесса, добротность по скорости и полосы пропускания на уровне различных значений амплитудных частотных характеристик системы по выходу и ошибке.

Утверждение 2 (У2). Оценка $\hat{\omega}_c$ частоты среза ω_c системы с передаточной функцией ВВ (1) определяется выражением:

$$\hat{\omega}_c = \frac{v_n}{v_{n-1}} \omega_0. \quad (4)$$

Доказательство. Частота среза ω_c удовлетворяет соотношению:

$$\omega_c = \arg \left(\left| W(j\omega, \omega_0) \right|_{\omega=\omega_c} = 1 \right), \quad (5)$$

где передаточная функция $W(s, \omega_0)$ прямой ветви системы с ПФ (1) определяется выражением:

$$W(s, \omega_0) = \frac{\eta(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{\Phi(s, \omega_0)}{1 - \Phi(s, \omega_0)} = \frac{v_n \omega_0^n}{s^n + v_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots + v_{n-1} \omega_0^{n-1} s}. \quad (6)$$

В силу определения частоты среза (5) оказывается справедливой цепочка равенств, доказывающая справедливость соотношения (4),

$$\left| W(j\omega, \omega_0) \right| = \left| \frac{v_n \omega_0^n}{s^n + v_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots + v_{n-1} \omega_0^{n-1} s} \right|_{s=j\omega} \Big|_{\omega=\omega_c} \cong \frac{v_n \omega_0}{v_{n-1} \hat{\omega}_c} = 1. \quad (7)$$

Утверждение 3 (У3). Запас $\Delta\varphi$ устойчивости по фазе системы с передаточной функцией ВВ (1) в силу положений утверждения 1 не зависит от характеристической частоты ω_0 , а потому определяется в силу (2) цепочкой соотношений:

$$\Delta\varphi = \pi + \arg \left\{ W(s) \right\}_{s=j\omega_c} = \frac{\pi}{2} + \arg \left\{ \frac{v_n}{s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} v_i s^{n-1-i}} \right\}_{s=j \frac{v_n}{v_{n-1}}}, \quad (8)$$

где в силу (2) $W(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)} = \frac{v_n}{\left(s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} v_i s^{n-1-i} \right) s}$.

Доказательство утверждения 3 строится на представлении (4) оценки частоты среза при $\omega_0 = 1$.

Примечание 2 (П2). Формула (8) позволяет сформировать аналитические представления запаса устойчивости по фазе ТПМ вида (2) как функции коэффициентов $v_i (i = \overline{1, n})$, приведенные в таблице 1 для ТПМ с первого по пятый порядок.

Таблица 1. Аналитические представления запасов устойчивости по фазе ТПМ

Порядок ТПМ n	Аналитическое представление запаса устойчивости по фазе $\Delta\varphi = \Delta\varphi(v_i; i = \overline{1, n})$
$n = 1$	$\Delta\varphi = \pi/2 - \arctg(0/v_1) = \pi/2$
$n = 2$	$\Delta\varphi = \pi/2 - \arctg(v_2/v_1^2)$
$n = 3$	$\Delta\varphi = \pi/2 - \arctg(v_1(v_3/v_2)/(v_2 - (v_3/v_2)^2))$
$n = 4$	$\Delta\varphi = \pi/2 - \arctg((v_4/v_3)(v_2 - (v_4/v_3)^2)/(v_3 - v_1(v_4/v_3)^2))$
$n = 5$	$\Delta\varphi = \pi/2 - \arctg((v_5/v_4)(v_3 - v_1(v_5/v_4)^2)/(v_4 - v_2(v_5/v_4)^2 + (v_5/v_4)^4))$

Утверждение 4 (У4). Оценка $\hat{\Delta}_y \omega$ полосы пропускания $\Delta_y \omega = \arg \left(\left| \Phi(s, \omega_0) \right|_{s=j\omega} \Big|_{\omega \geq \Delta_y \omega} \leq \delta_y \ll 1 \right)$ системы с передаточной функцией ВВ (1) определяется выражением:

$$\hat{\Delta}_y \omega = (v_n)^{1/n} \omega_0 / (\delta_y)^{1/n}. \quad \square(9)$$

Доказательство. Рассмотрим определение полосы пропускания $\Delta_y \omega$, задаваемое соотношением:

$$\Delta_y \omega = \arg \left(\left| \frac{v_n \omega_0^n}{s^n + \sum_{i=1}^n v_i \omega_0^i s^{n-i}} \right|_{s=j\omega} \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \cong \frac{v_n \omega_0^n}{\omega^n} \leq \delta_y \right) = (v_n)^{1/n} \omega_0 / (\delta_y)^{1/n}. \quad \blacksquare(10)$$

Утверждение 5 (У5). Оценка $\hat{\Delta}_\varepsilon \omega$ полосы пропускания $\Delta_\varepsilon \omega = \arg \left(\left| \Phi_\varepsilon(s, \omega_0) \right|_{s=j\omega} \Big|_{\omega \leq \Delta_\varepsilon \omega} \leq \delta_\varepsilon \ll 1 \right)$ системы с передаточной

функцией ВВ (1) на уровне δ_ε относительной частотной ошибки определяется выражением:

$$\hat{\Delta}_\varepsilon \omega = \delta_\varepsilon \frac{v_n \omega_0}{v_{n-1}}. \quad (11)$$

Доказательство. В силу определения полосы пропускания $\Delta_\varepsilon \omega$ ТПМ (1) по ошибке $\varepsilon(t)$ можно записать соотношения:

$$\Delta_\varepsilon \omega = \arg \left\{ \frac{|\Phi_\varepsilon(s, \omega_0) = 1 - \Phi(s, \omega_0)|_{s=j\alpha \omega_0 \rightarrow \infty} = \left| \frac{s^n + v_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots + v_{n-1} \omega_0^{n-1} s}{s^n + v_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots + v_{n-1} \omega_0^{n-1} s + v_n \omega_0^n} \right|_{s=j\alpha \omega_0 \rightarrow \infty} \cong \frac{v_{n-1} \omega}{v_n \omega_0} \leq \delta_\varepsilon}{=} \delta_\varepsilon \frac{v_n \omega_0}{v_{n-1}} \right\}. \quad (12)$$

Утверждение 6 (У6). Добротность D_1 по скорости системы с передаточной функцией ВВ (1) определяется выражением:

$$D_1 = (v_n \omega_0) / v_{n-1}. \quad (13)$$

Доказательство. Добротность по скорости является характеристикой системы в установившемся кинетическом режиме при входном воздействии $g(t) = \dot{g}_0 t$, изменяющимся с постоянной скоростью \dot{g}_0 . Содержательно добротность по скорости задается выражением:

$$D_1 = \dot{g}_0 / \varepsilon_y, \quad (14)$$

где ε_y — значение установившейся ошибки, определяемое как $\varepsilon_y = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$. В соответствии с теоремой о конечном значении оригинала можно записать цепочку соотношений:

$$\varepsilon_y = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_\varepsilon(s, \omega_0) g(s), \quad (15)$$

где $\varepsilon(s), g(s)$ — Лапласовы образы ошибки и входного воздействия $\varepsilon(t), \Phi_\varepsilon(s, \omega_0)$ — передаточная функция (ПФ) системы по ошибке, вычисляемая с помощью соотношений:

$$\Phi_\varepsilon(s, \omega_0) = \frac{\varepsilon(s)}{g(s)} = 1 - \Phi(s, \omega_0) = \frac{s^n + v_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots + v_{n-1} \omega_0^{n-1} s}{s^n + v_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots + v_{n-1} \omega_0^{n-1} s + v_n \omega_0^n}. \quad (16)$$

Для входного воздействия $g(t) = \dot{g}_0 t$ его Лапласов образ $g(s)$ задается выражением:

$$g(s) = \dot{g}_0 / s^2. \quad (17)$$

Если в выражение (15) подставить (16) и (17) и совершить предельный переход $s \rightarrow 0$, то получим $\varepsilon_y = \dot{g}_0 \frac{v_{n-1}}{v_n \omega_0}$, что с использованием (14) приводит к (13).

Утверждение 7 (У7). Длительность переходного процесса $t_{\Pi} = t_{\Pi}(\omega_0)$ системы с передаточной функцией ВВ (1) удовлетворяет соотношению:

$$t_{\Pi} = t_{\Pi}(\omega_0) = t_{\Pi}(\omega_0 = 1) / \omega_0, \quad (18)$$

где $t_{\Pi}(\omega_0 = 1)$ время переходного процесса системы с передаточной функцией ВВ (2).

Доказательство. Справедливость утверждения 7 следует из примечания 1.

Примечание 3 (ПЗ). При этом длительность переходного процесса $t_{\Pi}(\omega_0 = 1)$ определяется путем моделирования, а для случая разложения Ньютона корней ПЗ $D(s)$ передаточной функции (2) может быть определена аналитически в силу уравнения

$$t_{\Pi} = \operatorname{arg} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} t_{\Pi}^i = 0.05 e^{t_{\Pi}} \right).$$

В таблице 2 приведены общесистемные характеристики системы ТПМ(1).

Таблица 2. Общесистемные характеристики ТПМ с ПФ (1)

Аналитическое представление полинома знаменателя $D(s, \omega_0)$	σ	$\omega_c(\omega_0)$	$\Delta\varphi$	Полоса пропускания $\Delta\omega/\omega_0$		$D_1(\omega_0)$	$t_{\Pi}(\omega_0)$
				$M(\omega) \geq \delta_y$	$\delta(\omega) \leq \delta_\varepsilon$		
1	2	3	4	5	6	7	8
$s^n + \sum_{i=1}^n v_i \omega_0^i s^{n-i}$	σ^*	$\frac{v_n \omega_0}{v_{n-1}}$	$\Delta^{**} \phi(v_i)$	$\left(\frac{v_n}{\delta_y} \right)^{1/n}$	$\frac{\delta_\varepsilon v_n}{v_{n-1}}$	$\frac{v_n \omega_0}{v_{n-1}}$	$\frac{t_{\Pi}^*}{\omega_0}$

В таблице 2 приведены общесистемные показатели ТПМ с ПФ (1), полученные в силу приведенных выше утверждений. В графе 2 таблицы указана величина перерегулирования, в графе 3 — частота среза, в графе 4 — запас устойчивости по фазе, в графах 5-6 указаны

полосы пропускания системы, в графе 7 — добротность по скорости, в графе 8 — время переходного процесса, показатели при этом со знаком (*) являются показателями ТПМ с ПФ вида (2), которые определяются моделированием, показатель со знаком (**) вычисляется с помощью выражений, приведенных в таблице 1.

В случае использования таблицы 2 при синтезе систем с размещением Ньютона корней полинома знаменателя $D(s, \omega_0)$ надо помнить, что его коэффициенты определяются соотношениями:

$$v_i = C_n^i \omega_0^i \quad (i = \overline{1, n}), \quad (19)$$

а при синтезе систем с круговым размещением Баттерворта корней полинома $D(s, \omega_0)$ его коэффициенты определяются соотношениями:

$$v_1 = \frac{1}{\sin(\pi/2n)} \omega_0, \quad v_i = \frac{v_{i-1} \cos((i-1)\pi/2n)}{\sin(i\pi/2n)} \omega_0^i, \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad v_n = \omega_0^n. \quad (20)$$

3. Аналитическое конструирование последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с запаздыванием на основе модификации типовых полиномиальных моделей. Наличие аналитического представления (4) частоты среза типовой полиномиальной модели и запасов устойчивости по фазе (таблица 1) позволяет осуществлять аналитическое конструирование последовательного компенсатора [19-21], формирующего сигнал управления техническим объектом с запаздыванием на основе модификации типовых полиномиальных моделей, опираясь на факт уменьшения запаса устойчивости по сравнению с исходной ТПМ на величину $\Delta \Delta \varphi$, определяемую соотношением:

$$\Delta \Delta \phi = -\omega_c \tau = -\frac{v_n}{v_{n-1}} \omega_0 \tau, \quad (21)$$

где τ — величина чистого запаздывания, вносимого звеном запаздывания, описываемым передаточной функцией $W_{\text{ЭЗ}}(s) = \exp(-\tau s)$. Таким образом, динамические показатели системы с передаточной функцией прямой цепи:

$$W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{v_n \omega_0^n}{N(s, v_i, \omega_0)}, \quad (22)$$

где $N(s, \omega_0) = D(s, \omega_0) - v_n \omega_0^n$, $D(s, \omega_0)$ — полином знаменателя передаточной функции (1) ТПМ, могут быть параметризованы величиной $\Delta \varphi$, а следовательно, при фиксированном значении запаздывания τ характеристической частотой ω_0 . Формулы (8) и (21) позволяют сформировать аналитические представления запаса устойчивости по фазе модифицированных ТПМ с первого по пятый порядок с передаточными функциями вход-выход вида:

$$\Phi(s, \omega_0, \tau) = \frac{W(s, \omega_0, \tau)}{1 + W(s, \omega_0, \tau)} \quad (23)$$

с помощью передаточной функции прямой ветви вида (22) как функции коэффициентов $v_i (i = \overline{1, n})$, которые приведены в таблице 3.

Таблица 3. Аналитические представления запасов устойчивости по фазе модифицированных ТПМ

Порядок ТПМ n	Аналитическое представление запаса устойчивости по фазе $\Delta \varphi = \Delta \varphi(v_i; i = \overline{1, n})$
$n = 1$	$\Delta \varphi = \pi/2 - \omega_0 \tau$
$n = 2$	$\Delta \varphi = \pi/2 - \arctg(v_2/v_1^2) - (v_2/v_1) \omega_0 \tau$
$n = 3$	$\Delta \varphi = \pi/2 - \arctg(v_1(v_3/v_2)/(v_2 - (v_3/v_2)^2)) - (v_3/v_2) \omega_0 \tau$
$n = 4$	$\Delta \varphi = \pi/2 - \arctg((v_4/v_3)(v_2 - (v_4/v_3)^2)/(v_3 - v_1(v_4/v_3)^2)) - (v_4/v_3) \omega_0 \tau$
$n = 5$	$\Delta \varphi = \pi/2 - \arctg((v_5/v_4)(v_3 - v_1(v_5/v_4)^2)/(v_4 - v_2(v_5/v_4)^2 + (v_5/v_4)^4)) - (v_5/v_4) \omega_0 \tau$

В таблицах 4 и 5 приведены показатели качества систем с передаточной функцией (22) прямой ветви для случаев полиномов $N(s, \omega_0) = D(s, \omega_0) - v_n \omega_0^n$ таких, что $D(s, \omega_0)$ характеризуется соответственно размещением их корней Ньютона и Баттерворта.

Таблица 4. Показатели качества систем с передаточной функцией прямой ветви (22) с размещением корней Ньютона

$W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{\omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$	$N(s, \omega_0) = s$	$N(s, \omega_0) = s^2 + 2\omega_0 s$	$N(s, \omega_0) = s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s$	$N(s, \omega_0) = s^4 + 4\omega_0 s^3 + 6\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0^3 s$	$N(s, \omega_0) = s^5 + 5\omega_0 s^4 + 10\omega_0^2 s^3 + 10\omega_0^3 s^2 + 5\omega_0^4 s$	
σ_0	0	0	0	0	0	
$\Delta\varphi$	1.57	1.326	1.24	1.194	1.168	
$t_{II} \omega_0$	3	4.74	6.3	7.75	9.15	
$\sigma = \sigma_0 + 5\%$	$t_{II} \omega_0$	1.67	3.6	5.27	6.82	8.3
	$\Delta\Delta\varphi$	0.515	0.264	0.173	0.129	0.104
$\sigma = \sigma_0 + 10\%$	$t_{II} \omega_0$	1.65	3.5	5.17	6.74	8.25
	$\Delta\Delta\varphi$	0.581	0.35	0.251	0.2	0.17
$\sigma = \sigma_0 + 15\%$	$t_{II} \omega_0$	1.66	3.51	5.19	6.78	8.33
	$\Delta\Delta\varphi$	0.639	0.418	0.317	0.251	0.221
$\sigma = \sigma_0 + 20\%$	$t_{II} \omega_0$	1.69	3.55	5.26	6.89	8.47
	$\Delta\Delta\varphi$	0.694	0.482	0.376	0.321	0.285

Таблица 5. Показатели качества систем с передаточной функцией прямой ветви (22) с размещением его корней Баттерворта

$W(s, \omega_0, \tau) = e^{-\tau s} \frac{\omega_0^n}{N(s, \omega_0)}$	$N(s, \omega_0) = s$	$N(s, \omega_0) = s^2 + 1.414\omega_0 s$	$N(s, \omega_0) = s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s$	$N(s, \omega_0) = s^4 + 2.6\omega_0 s^3 + 3.4\omega_0^2 s^2 + 2.6\omega_0^3 s$	$N(s, \omega_0) = s^5 + 3.24\omega_0 s^4 + 5.24\omega_0^2 s^3 + 5.24\omega_0^3 s^2 + 3.24\omega_0^4 s$	
σ_0	0	4	8	11	13	
$\Delta\varphi$	1.57	1.107	1.052	1.057	1.065	
$t_{II} \omega_0$	3	4.5	6	6.87	7.65	
$\sigma = \sigma_0 + 5\%$	$t_{II} \omega_0$	1.67	5.53	6.67	7.53	8.6
	$\Delta\Delta\varphi$	0.515	0.14	0.075	0.06	0.06
$\sigma = \sigma_0 + 10\%$	$t_{II} \omega_0$	1.65	5.82	7.06	10.52	9.5
	$\Delta\Delta\varphi$	0.581	0.237	0.142	0.118	0.12
$\sigma = \sigma_0 + 15\%$	$t_{II} \omega_0$	1.66	6.01	10.45	12	14.22
	$\Delta\Delta\varphi$	0.639	0.318	0.205	0.175	0.178
$\sigma = \sigma_0 + 20\%$	$t_{II} \omega_0$	1.69	8.76	11.22	13.08	15.87
	$\Delta\Delta\varphi$	0.694	0.39	0.264	0.23	0.235

Обнаружено, что характеристики систем управления для установившегося режима их функционирования, таких как добротность по скорости и частотные характеристики, практически от величины чистого запаздывания, не приводящей к потере устойчивости, не зависят, а потому для оценки можно воспользоваться их представлениями, приведенными в таблице 2.

Алгоритм аналитического конструирования последовательного компенсатора в задаче управления техническим объектом с запаздыванием принимает следующий вид:

0. Сформировать требование к показателям качества системы в переходном и установившемся режимах.

1. Задать передаточную функцию технического объекта с запаздыванием в форме $W(s, \tau) = e^{-s\tau} W(s, \tau = 0)$ и оценить его размерность n по степени полинома знаменателя передаточной функции $W(s, \tau = 0)$ и значение запаздывания τ .

2. Выбрать передаточную функцию (1) полиномиальной модели с желаемым размещением корней полинома знаменателя степени $\deg D(s, \omega_0) = n$.

3. Оценить аналитически значение частоты среза выбранной ТПМ в силу соотношения (4), позволяющее записать $\hat{\omega}_c = \frac{v_n}{v_{n-1}} \omega_0$.

4. Задать допустимое $\Delta\sigma$ приращение перерегулирования σ , вызываемое запаздыванием.

5. Оценить величину $\Delta\Delta\varphi = -\frac{v_n}{v_{n-1}} \omega_0 \tau$ уменьшения запаса устойчивости, порождающее допустимое приращение перерегулирования.

6. Оценить допустимое значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 \leq -\Delta\Delta\varphi \frac{v_{n-1}}{v_n \tau}$.

7. Оценить показатели качества системы со значением характеристической частоты ω_0 из п. 6 на предмет выполнения условий п. 0, в случае выполнения этих условий перейти к п. 8 алгоритма, иначе — к п. 4 с целью увеличения допустимого $\Delta\sigma$ приращения перерегулирования σ .

8. Сформировать желаемую передаточную функцию $W(s, \omega_0) = \frac{v_n \omega_0^n}{N(s, v_i, \omega_0)}$ прямой ветви проектируемой системы.

9. Сформировать передаточную функцию $W_{ПК}(s)$ последовательного компенсатора с помощью соотношения $W_{ПК}(s) = W(s, \omega_0) / W(s, \tau = 0)$.

10. Провести комплексное исследование спроектированной системы в оболочке Matlab на предмет удовлетворения спроектированной системы требованиям, изложенным в п. 0. Если они удовлетворяются, то перейти к п. 11, если нет, то перейти к п. 6 с тем, чтобы нарастить значение характеристической частоты, допустив тем самым больший рост перерегулирования.

11. Осуществить техническую реализацию системы со спроектированным последовательным компенсатором на микроконтроллерах. Для этого перейти от непрерывного представления последовательного компенсатора п. 9 к его дискретному представлению с помощью процедуры `s2d` пакета Matlab [22].

Приведенный алгоритм аналитического конструирования последовательного компенсатора для систем с запаздыванием, решая основную задачу, в общем случае не будет доставлять системе минимальную реализацию, имеющую место в случае, когда полюса передаточной функции ТО совпадают с полюсами желаемой передаточной функции (6) ТПМ (1).

4. Примеры. *Пример 1.* Решим задачу аналитического конструирования устройства управления техническим объектом с запаздыванием, реализуемого в форме последовательного компенсатора с помощью предложенного алгоритма.

0. Сформируем требования к показателям качества системы в переходном и установившемся режимах: время переходного процесса t_{Π} и добротность по скорости D_1 должны удовлетворять условиям $t_{\Pi} \leq t_{\text{ПР}} = 0.5 \text{ с}$, $D_1 \geq D_{1R} = 25 \text{ с}^{-1}$, перерегулирование σ формируется в процессе конструирования компенсатора.

1. Технический объект с запаздыванием задается передаточной функцией вида:

$$W_{\text{ТО}}(s, \tau) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)s} = \frac{62.8e^{-0.01s}}{(0.04s + 1)(0.3s + 1)s}. \quad (24)$$

где $K = 62.8 \text{ рад/с} \cdot \text{В}$, $T_1 = 0.04 \text{ с}$, $T_2 = 0.3 \text{ с}$, размерность объекта $n = 3$, значение запаздывания $\tau = 0.01 \text{ с}$.

2. Выберем передаточную функцию (1) полиномиальной модели с желаемым размещением Ньютона корней полинома знаменателя степени $\deg D(s, \omega_0) = n = 3$:

$$\Phi(s, \omega_0) = \frac{\omega_0^3}{s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3}.$$

3. Оценим аналитически значение частоты среза выбранной ТПМ с помощью соотношения (4), позволяющее записать $\hat{\omega}_c = \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}} \omega_0 = \frac{1}{3} \omega_0$.

4. Зададим первое допустимое значение приращения перерегулирования, вызываемое запаздыванием: $\Delta\sigma_R = 5\%$.

5. Оценим $\Delta\Delta\phi$ величину уменьшения запаса устойчивости, порождающее допустимое приращение перерегулирования: согласно таблице 4 для ТПМ 3-го порядка при допустимом приращении перерегулирования $\Delta\sigma_R = 5\%$, величина уменьшения запаса устойчивости составит $\Delta\Delta\phi = -0.173$ рад.

6. Оценим допустимое значение характеристической частоты ω_0 в силу соотношения $\omega_0 = -\Delta\Delta\phi \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n \tau} = 0.173 \frac{3}{0.01} = 52 \text{ c}^{-1}$.

7. Оценим время переходного процесса $t_{\Pi} \omega_0 = 5.27 \Rightarrow t_{\Pi} = \frac{5.27}{52} \cong 0.1 < t_{\text{ПР}} = 0.5 \text{ c}$.

Оценим добротность по скорости $D_1 = \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}} \omega_0 = \frac{1}{3} 52 = 17.3 < D_{1R} = 25 \text{ c}^{-1}$.

Требуемые показатели качества не выполняются. В соответствии с алгоритмом возвращаемся к п.4 с тем, чтобы увеличить допустимое приращение перерегулирования, вызываемое запаздыванием, до значения $\Delta\sigma_R = 10\%$.

Вернемся к п.5 алгоритма, чтобы оценить величину $\Delta\Delta\phi$ уменьшения запаса устойчивости, порождающее допустимое приращение перерегулирования: согласно таблице 4 для ТПМ 3-го порядка при допустимом приращении перерегулирования $\Delta\sigma_R = 10\%$, величина уменьшения запаса устойчивости составит $\Delta\Delta\phi = -0.251$ рад.

Вернемся к п.6 алгоритма, чтобы оценить допустимое значение характеристической частоты в силу соотношения $\omega_0 = -\Delta\Delta\phi \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n \tau} = 0.251 \frac{3}{0.01} = 75 \text{ c}^{-1}$.

Вернемся к п. 7 алгоритма, чтобы оценить показатели качества системы: время переходного процесса $t_{\Pi} \omega_0 = 5.17 \Rightarrow t_{\Pi} = \frac{5.17}{75} \cong 0.07 < t_{\text{ПР}} = 0.5 \text{ c}$, добротность по скорости

$D_1 = \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}} \omega_0 = \frac{1}{3} 75 = 25 = D_{1R} = 25 \text{ c}^{-1}$.

Требуемые показатели качества выполняются.

8. Сформируем желаемую передаточную функцию $W(s, \omega_0)$ прямой ветви проектируемой системы:

$$W(s, \omega_0) = \frac{\omega_0^3}{s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s} = \frac{421875}{s^3 + 225s^2 + 16875s}.$$

9. Сформируем передаточную функцию $W_{ПК}(s)$ последовательного компенсатора с помощью соотношения:

$$\begin{aligned} W_{ПК}(s) &= \frac{W(s, \omega_0)}{W_{ГО}(s, \tau = 0)} = \frac{421875(0.04s + 1)(0.3s + 1)s}{(s^3 + 225s^2 + 16875s)62.8} = \\ &= \frac{6717.75(0.04s + 1)(0.3s + 1)}{s^2 + 225s + 16875}. \end{aligned}$$

Сконструированный последовательный компенсатор физически реализуем, так как порядок полинома числителя его передаточной функции не превышает порядка полинома знаменателя.

10. Проведем комплексное исследование спроектированной системы в оболочке Matlab на предмет удовлетворения спроектированной системы требованиям, изложенным в п. 0. На рисунке 1 приведена ее переходная характеристика.

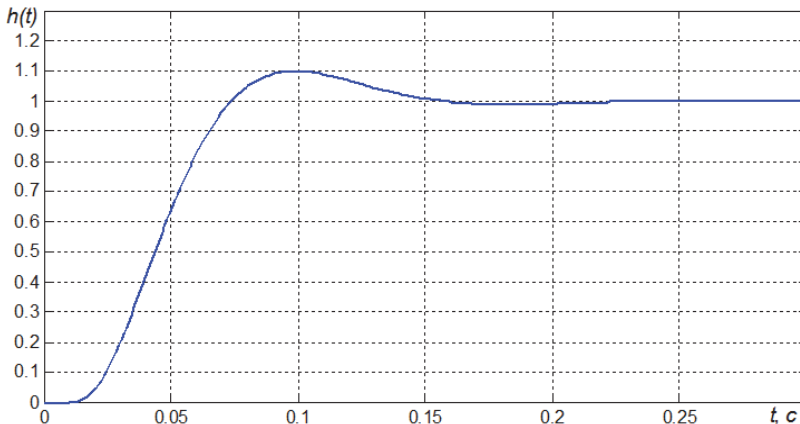


Рис. 1. Переходная характеристика спроектированной системы

На рисунке 2 приведены кривые входного воздействия $g(t) = t$ (кривая 1), выходного сигнала $y(t)$ (кривая 2) и ошибки $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ (кривая 3).

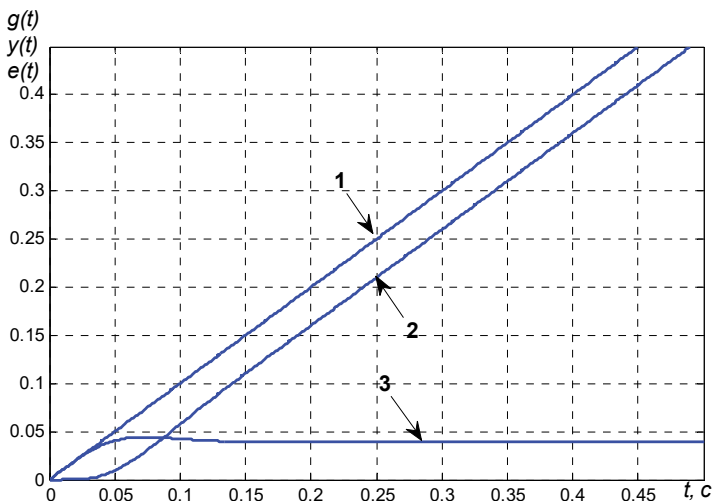


Рис. 2. Входной сигнал $g(t) = t$ (кривая 1), выходной сигнал $y(t)$ (кривая 2), сигнал ошибки $\varepsilon(t)$ (кривая 3) спроектированной системы

Из приведенных кривых видно, что показатели качества процессов в системе в переходном и установившемся режимах соответствуют техническим требованиям.

Пример 2. Назначим показатели качества из примера 1.

1. Рассмотрим технический объект (24) из примера 1, положив значение запаздывания $\tau = 0.1$ с.

2. Выберем передаточную функцию (1) полиномиальной модели из примера 1.

3. Аналитическая оценка значения частоты среза выбранной ТПМ представлена в примере 1.

4. Зададим первое допустимое значение приращения перерегулирования, вызываемое запаздыванием: $\Delta\sigma_R = 5\%$.

5. Оценим $\Delta\Delta\varphi$ величину уменьшения запаса устойчивости, порождающую допустимое приращение перерегулирования: согласно таблице 4 для ТПМ 3-го порядка при допустимом приращении перерегулирования $\Delta\sigma_R = 5\%$, величина уменьшения запаса устойчивости составит $\Delta\Delta\varphi = -0.173$ рад.

6. Оценим допустимое значение характеристической частоты ω_0

$$\text{в силу соотношения } \omega_0 = -\Delta\Delta\varphi \frac{V_{n-1}}{V_n \tau} = 0.173 \frac{3}{0.1} = 5.2 \text{ c}^{-1} .$$

7. Оценим время переходного процесса

$$t_{\Pi} \omega_0 = 5.27 \Rightarrow t_{\Pi} = \frac{5.27}{5.2} \cong 1 > t_{\text{ПР}} = 0.5 \text{ c} . \text{ Оценим добротность по скоро-}$$

$$\text{сти } D_1 = \frac{V_n}{V_{n-1}} \omega_0 = \frac{1}{3} 5.2 = 1.73 < D_{1R} = 25 \text{ c}^{-1} .$$

Требуемые показатели качества не выполняются. В соответствии с алгоритмом возвращаемся к п. 4 с тем, чтобы увеличить допустимое приращение перегулирования, вызываемое запаздыванием, до значения $\Delta\sigma_R = 10\%$.

Вернемся к п. 5 алгоритма, чтобы оценить величину $\Delta\Delta\varphi$ уменьшения запаса устойчивости, порождающую допустимое приращение перегулирования: согласно таблице 4 для ТПМ 3-го порядка при допустимом приращении перегулирования $\Delta\sigma_R = 10\%$, величина уменьшения запаса устойчивости составит $\Delta\Delta\varphi = -0.251$ рад.

Вернемся к п.6 алгоритма, чтобы оценить допустимое значение характеристической частоты в силу соотношения

$$\omega_0 = -\Delta\Delta\varphi \frac{V_{n-1}}{V_n \tau} = 0.251 \frac{3}{0.1} = 7.5 \text{ c}^{-1} .$$

Вернемся к п.7 алгоритма, чтобы оценить показатели качества системы: время переходного процесса

$$t_{\Pi} \omega_0 = 5.17 \Rightarrow t_{\Pi} = \frac{5.17}{7.5} \cong 0.7 > t_{\text{ПР}} = 0.5 \text{ c} , \text{ добротность по скорости}$$

$$D_1 = \frac{V_n}{V_{n-1}} \omega_0 = \frac{1}{3} 7.5 = 2.5 < D_{1R} = 25 \text{ c}^{-1} .$$

Требуемые показатели качества не выполняются. В соответствии с алгоритмом возвращаемся к п.4 с тем, увеличить допустимое приращение перегулирования, вызываемое запаздыванием, до значения $\Delta\sigma_R = 15\%$.

Вернемся к п.5 алгоритма с тем, чтобы оценить величину $\Delta\Delta\varphi$ уменьшения запаса устойчивости, порождающую допустимое приращение перегулирования: согласно таблице 4 для ТПМ 3-го порядка при допустимом приращении перегулирования $\Delta\sigma_R = 15\%$, величина уменьшения запаса устойчивости составит $\Delta\Delta\varphi = 0.317$.

Вернемся к п. 6 алгоритма, чтобы оценить допустимое значение характеристической частоты в силу соотношения

$$\omega_0 = -\Delta\Delta\varphi \frac{v_{n-1}}{v_n \tau} = 0.317 \frac{3}{0.1} = 9.5 \text{ c}^{-1}.$$

Вернемся к п.7 алгоритма, чтобы оценить показатели качества системы: время переходного процесса

$$t_{\Pi} \omega_0 = 5.17 \Rightarrow t_{\Pi} = \frac{5.19}{9.5} \cong 0.54 > t_{\text{ПР}} = 0.5 \text{ c}, \text{ добротность по скорости}$$

$$D_1 = \frac{v_n}{v_{n-1}} \omega_0 = \frac{1}{3} 9.5 = 3.16 < D_{1R} = 25 \text{ c}^{-1}.$$

Требуемые показатели качества не выполняются. В соответствии с алгоритмом возвращаемся к п.4, чтобы увеличить допустимое приращение перерегулирования, вызываемое запаздыванием, до значения $\Delta\sigma_R = 20\%$.

Вернемся к п.5 алгоритма, чтобы оценить величину $\Delta\Delta\varphi$ уменьшения запаса устойчивости, порождающее допустимое приращение перерегулирования: согласно таблице 4 для ТПМ 3-го порядка при допустимом приращении перерегулирования $\Delta\sigma_R = 20\%$, величина уменьшения запаса устойчивости составит $\Delta\Delta\varphi = 0.376$ рад.

Вернемся к п.6 алгоритма, чтобы оценить допустимое значение характеристической частоты в силу соотношения

$$\omega_0 = -\Delta\Delta\varphi \frac{v_{n-1}}{v_n \tau} = 0.376 \frac{3}{0.1} = 11.3 \text{ c}^{-1}.$$

Вернемся к п. 7 алгоритма, чтобы оценить показатели качества системы: время переходного процесса

$$t_{\Pi} \omega_0 = 5.26 \Rightarrow t_{\Pi} = \frac{5.26}{11.3} \cong 0.47 < t_{\text{ПР}} = 0.5 \text{ c}, \text{ добротность по скорости}$$

$$D_1 = \frac{v_n}{v_{n-1}} \omega_0 = \frac{1}{3} 11.3 \text{ c}^{-1} = 3.76 \text{ c}^{-1} < D_{1R} = 25 \text{ c}^{-1}.$$

8. Сформируем желаемую передаточную функцию $W(s, \omega_0)$ прямой ветви проектируемой системы:

$$W(s, \omega_0) = \frac{\omega_0^3}{s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s} = \frac{1443}{s^3 + 34s^2 + 383s}$$

9. Сформируем передаточную функцию $W_{\text{ПК}}(s)$ последовательного компенсатора с помощью соотношения:

$$W_{ПК}(s) = \frac{W(s, \omega_0)}{W_{ТО}(s, \tau = 0)} = \frac{1443(0.04s + 1)(0.3s + 1)s}{(s^3 + 34s^2 + 383s)62.8} = \frac{23(0.04s + 1)(0.3s + 1)}{s^2 + 34s + 383}.$$

Сконструированный последовательный компенсатор физически реализуем, так как порядок полинома числителя его передаточной функции не превышает порядка полинома знаменателя.

10. Проведем комплексное исследование спроектированной системы в оболочке Matlab на предмет удовлетворения спроектированной системы требованиям, изложенным в п. 0. На рисунке 3 приведена переходная характеристика спроектированной системы.

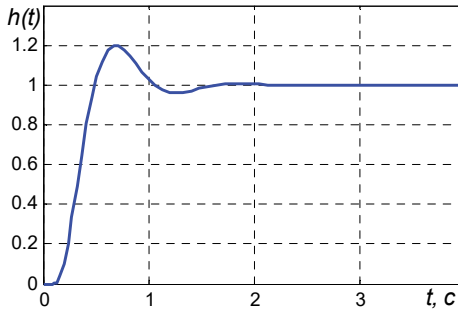


Рис. 3. Переходная характеристика спроектированной системы

На рисунке 4 приведены кривые входного воздействия $g(t) = t$ (кривая 1), выходного сигнала $y(t)$ (кривая 2) и ошибки $\epsilon(t) = g(t) - y(t)$ (кривая 3).

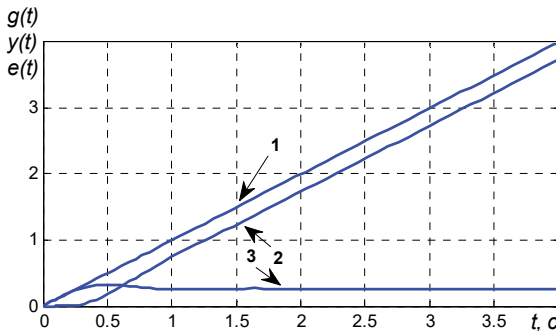


Рис. 4. Входной сигнал $g(t) = t$ (кривая 1), выходной сигнал $y(t)$ (кривая 2), сигнал ошибки $\epsilon(t)$ (кривая 3) спроектированной системы

5. Заключение. Аналитическое конструирование последовательного компенсатора на основе модификации типовых полиномиальных

моделей дает решение проблемы управления техническим объектом с фиксированной величиной запаздывания с контролем величины пере-регулирования переходных процессов. Более того, полученная в статье аналитическая связь запаса устойчивости системы по фазе с коэффициентами ПЗ ТПМ, характеристической частотой и величиной запаздывания позволяет решать задачу оценки чувствительности запаса устойчивости к вариациям указанных системных параметров.

Литература

1. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления: изд. 4-е, перераб. и доп. // СПб.:Изд-во «Профессия». 2006. 752 с.
2. *Основы автоматического регулирования. Теория / Под редакцией В.В. Солодовникова // М.: Машгиз. 1954. 1117 с.*
3. *Ким Д.П.* Алгебраический метод синтеза систем управления с чистым запаздыванием // Мехатроника, Автоматизация, Управление. 2012. № 10. С. 2–7.
4. *Дударенко Н.А., Полинова Н.А., Сержантова М.В., Ушаков А.В.* Кратные биномиальные структуры в задаче аппроксимации динамических цепей, содержащих звено чистого запаздывания // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2014. Т. 57. № 7. С. 12–17.
5. *Smith O.J.M.* A controller to overcome dead time // ISA J. 1959. vol. 6. no. 2. pp. 28–32.
6. *Smith O.J.M.* Close Control of Loops with Dead Time // Chemical Engineering Progress. 1957. vol. 53. pp. 217–235.
7. *Rodriguez C., Normey-Rico J.E., Guzmán J.L., Berenguel M.* On the filtered Smith predictor with feedforward compensation // Journal of Process Control. 2016. vol. 41. pp. 35–46.
8. *Padhan D.G., Reddy B.R.* A new tuning rule of cascade control scheme for processes with time delay // In Conference on Power, Control, Communication and Computational Technologies for Sustainable Growth. 2015. pp. 102–105.
9. *Mataušek M.R., Ribić A.I.* Control of stable, integrating and unstable processes by the Modified Smith Predictor // Journal of Process Control. 2012. vol. 22. Issue 1. pp. 338–343.
10. *Majhi S., Atherton D.A.* A new Smith predictor and controller for unstable and integrating processes with time delay // In 37th IEEE CDC'98 (Conference on decision and control). Tampa, FL. 1998. pp. 1341–1345.
11. *Palmor Z.J.* Time-delay compensation—Smith predictor and its modifications // The control handbook. CRSC Press. Boca Raton, FL, USA. 1996. vol. 1. pp. 224–237.
12. *Aström K.J., Hang C.C., Lim B.C.* A new Smith predictor for controlling a process with an integrator and long deadtime // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. vol. 39. no. 2. pp. 343–345.
13. *Vunder N.A., Ushakov A.V.* Sensitivity analysis of systems with a cascade compensator embedded in a Smith predictor to dead-time variation // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2016. vol. 52. no. 3. pp. 274–279.
14. *Karafyllis I., Krstić M.* Delay-robustness of linear predictor feedback without restriction on delay rate // Automatica. 2013. vol. 49. pp. 1761–1767.
15. *Zhou B.* Input delay compensation of linear systems with both state and input delays by adding integrators // Systems and Control Letters. 2015. vol. 82. pp. 51–63.
16. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем (Метод пространства состояний): пер. с англ. // М.: Наука. 1970. 703 с.
17. *Porter B., Grossley R.* Modal control. Theory and applications // London: Taylor and Francis. 1972. 233 p.
18. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control // Birkhäuser. Basel. 2014. 362 p.

19. *Гайдук А.П.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход) // М. Физматлит. 2012. 360 с.
20. *Brasch F.M., Pearson J.B.* Pole placement using dynamic compensators // IEEE Trans. Automat. Contr. 1970. vol. 15. no. 1. pp. 34–43.
21. *Быстров С.В., Вундер Н.А., Ушаков А.В.* Решение проблемы сигнальной неопределенности при аналитическом конструировании последовательного компенсатора в задаче управления пьезопроводом // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 3. С. 451–459.
22. The official home of MATLAB software URL: www.mathworks.com/products/matlab.html (дата обращения 05.12.2016).

Быстров Сергей Владимирович — к-т техн. наук, доцент, доцент кафедры систем управления и информатики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО). Область научных интересов: системы управления с исполнительными устройствами на пьезокерамике. Число научных публикаций — 54. sbystrov@mail.ru; Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: +7(812)595-41-28.

Вундер Нина Александровна — аспирант кафедры систем управления и информатики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО). Область научных интересов: матричный формализм метода пространства состояния, эллипсоидные оценки качества процессов в многомерных системах, управление в условиях неопределенности, системы с интервальными параметрами, обобщенное модальное управление, управление методом последовательного компенсатора, системы с запаздыванием, большие отклонения свободного движения линейных устойчивых систем. Число научных публикаций — 32. polinova_nina@mail.ru; Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: +7(812)595-41-28.

Синетова Мадина Мансуровна — магистрант кафедры систем управления и информатики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО). Область научных интересов: управление методом последовательного компенсатора, системы с запаздыванием. Число научных публикаций — 6. sinetovamadina@gmail.com; Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: +7(812)595-41-28.

Ушаков Анатолий Владимирович — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры систем управления и информатики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО). Область научных интересов: матричный формализм метода пространства состояния, эллипсоидные оценки качества процессов в многомерных системах, модальная робастность, управление в условиях неопределенности, системы с интервальными параметрами, проблемы вырождения сложных динамических систем, обобщенное модальное управление, решение задач помехозащиты методами двойного наблюдения и двойными рекуррентными процедурами, цифровое дистанционное управление, сложные системы с антропокомпонентами. Число научных публикаций — 350. Ushakov-AVG@yandex.ru; Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: +7(812)595-41-28.

Поддержка исследований. Работа написана при поддержке правительства Российской Федерации (Грант 074-U01), Министерства образования и науки Российской Федерации (Проект 14. Z50.31.0031), гранта президента Российской Федерации (№14.Y31.16.9281-НШ).

S.V. BYSTROV, N.A. VUNDER, M.M. SINETOVA, A.V. USHAKOV
**ANALYTICAL DESIGN OF CONSECUTIVE COMPENSATOR FOR
 CONTROL SYSTEMS WITH DELAY BASED ON MODIFICATION
 OF TYPICAL POLYNOMIAL MODELS**

Bystrov S.V., Vunder N.A., M.M. Sinetova, Ushakov A.V. Analytical Design of Consecutive Compensator for Control Systems With Delay Based on Modification of Typical Polynomial Models.

Abstract. The purpose of this paper is to develop an algorithm for analytical design of consecutive compensator for the control system with delay based on typical polynomial dynamical models modification. A formula relating to the characteristic frequency and the cutoff frequency of a transfer function of open loop of the desired polynomial dynamic model was derived. Using this formula a modification of polynomial models was made taking into account a value of delay element of a plant.

Control of the plant with delay using the consecutive compensator has several advantages: it requires a minimum amount of measuring data and eliminates the need to introduce observer; there is no problem of non-zero initial conditions, which may arise during short-term disruption of a normal functioning of the system; a simple construction of consecutive compensator procedures for SISO and MIMO systems.

Keywords: cutoff frequency, delay element, modified polynomial dynamic models with Newton and Battervort placement of eigenvalues, characteristic frequency, algorithm development of analytical construction of consecutive compensator.

Bystrov Sergey Vladimirovich — Ph.D., associate professor, associate professor of control systems and informatics department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: control systems on piezoceramic actuators. The number of publications — 54. sbystrov@mail.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +7(812)595-41-28.

Vunder Nina Aleksandrovna — Ph.D. student of control systems and informatics department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: state space method, ellipsoidal estimates for MIMO-systems, control with uncertainty, generalized modal control, consecutive compensators, control systems with delay, peaks of free motion of linear stable systems. The number of publications — 32. polinova_nina@mail.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +7(812)595-41-28.

Sinetova Madina Mansurovna — master of control systems and informatics department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: consecutive compensators, control systems with delay. The number of publications — 6. sinetovamadina@gmail.com; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +7(812)595-41-28.

Ushakov Anatoly Vladimirovich — Ph.D., Dr. Sci., professor, professor of control systems and informatics department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: state space method, ellipsoidal estimates for MIMO-systems, modal robustness, control with uncertainty, control systems with interval parameters, degeneracy of complex dynamic systems, generalized modal control, anti-jam facility based on binary observer and binary recurrent method, digital remote control, complex systems with anthropo-aspects. The number of publications — 350. Ushakov-AVG@yandex.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +7(812)595-41-28.

Acknowledgements. This work was supported by Government of Russian Federation (grant 074-U01); the Ministry of Education and Science of Russian Federation (project 14.Z50.31.0031); Russian Federation President Grant (№14.Y31.16.9281-H11)

References

1. Besekerskiy V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [The theory of automatic control systems]. SPb.: Professiya. 2006. 752 p. (In Russ.).
2. *Osnovy avtomaticheskogo regulirovaniya. Teoriya. Pod red. V.V. Solodovnikova* [Fundamentals of automatic control. Theory. Edited by V.V.Solodovnikov]. M.: Mashgiz. 1954. 1117 p. (In Russ.).
3. Kim D.P. [Algebraic Method of the Synthesis Control System for a Plant with a Pure (Transport) Delay]. *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie – Mechatronics, Automation, Control*. 2012. vol. 10. pp 2–7. (In Russ.).
4. Dudarenko N.A., Polinova N.A., Serzhantova M.V., Ushakov A.V. [Multiple binomial structures in the problem of approximation of dynamic circuit with a pure delay unit]. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 2014. vol. 57. no. 7. pp. 12–17. (In Russ.).
5. Smith O.J.M. A controller to overcome dead time. *ISA J*. 1959. vol. 6. no. 2. pp. 28–32.
6. Smith O.J.M. Close Control of Loops with Dead Time. *Chemical Engineering Progress*. 1957. vol. 53. pp. 217–235.
7. Rodríguez C., Normey-Rico J.E., Guzmán J.L., Berenguel M. On the filtered Smith predictor with feedforward compensation. *Journal of Process Control*. 2016. vol. 41. pp. 35–46.
8. Padhan D.G., Reddy B.R. A new tuning rule of cascade control scheme for processes with time delay. In Conference on Power, Control, Communication and Computational Technologies for Sustainable Growth. 2015. pp. 102–105.
9. Mataušek M.R., Ribić A.I. Control of stable, integrating and unstable processes by the Modified Smith Predictor. *Journal of Process Control*. 2012. vol. 22. no. 1. pp. 338–343.
10. Majhi S., Atherton D. A new Smith predictor and controller for unstable and integrating processes with time delay. In 37th IEEE CDC'98 (Conference on decision and control). Tampa, FL. 1998. pp. 1341–1345.
11. Palmor Z.J. Time-delay compensation—Smith predictor and its modifications. The control handbook. CRC Press. Boca Raton, FL. USA. 1996. pp. 224–237.
12. Aström K.J., Hang C.C., Lim B.C. A new Smith predictor for controlling a process with an integrator and long deadtime. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1994. vol. 39. no. 2. pp. 343–345.
13. Vunder N.A., Ushakov A.V. Sensitivity analysis of systems with a cascade compensator embedded in a Smith predictor to dead-time variation. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2016. vol. 52. no. 3. pp. 274–279.
14. Karafyllis I., Krstić M. Delay-robustness of linear predictor feedback without restriction on delay rate. *Automatica*. 2013. vol. 49. pp. 1761–1767.
15. Zhou B. Input delay compensation of linear systems with both state and input delays by adding integrators. *Systems and Control Letters*. 2015 vol. 82. pp. 51–63.
16. Zadeh L.A., Desoer C.A. *Linear System Theory: The State Space Approach*. NY: McGraw-Hill. 1963. 628 p. (Russ. ed.: Zade L., Dezoer Ch. *Teoriya linejnyh sistem (Metod prostranstva sostojanij)*. M.: Nauka. 1970. 703 p.)
17. Porter B., Grossley R. *Modal control. Theory and applications*. London: Taylor and Francis. 1972. 233 p.
18. Fridman E. *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Birkhäuser. Basel. 2014. 362 p.
19. Gajduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravlenija (polinomial'nyj podhod)* [The theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. M. Fizmatlit. 2012. 360 p. (In Russ.).
20. Brasch F.M., Pearson J.B. Pole placement using dynamic compensators. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1970. vol. 15. no. 1. pp. 34–43.
21. Bystrov S.V., Vunder N.A., Ushakov A.V. [Solution of signal uncertainty problem at analytical design of consecutive compensator in piezo actuator control]. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki – Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2016. vol. 16. Issue. 3. pp. 451–459. (In Russ.).
22. The official home of MATLAB software. Available at: www.mathworks.com/products/matlab.html (accessed 05.12.2016).