УДК 519.71 **DOI** 10.15622/sp.49.4

Н.В. Прытков, А.Л. Пережогин

АЛГОРИТМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Прытков Н.В., Пережогин А.Л. **Алгоритмы восстановления дискретных динамических систем с пороговыми функциями.**

Аннотация. Задача восстановления динамической системы по ее функционированию актуальна в теории управляющих систем. В качестве модели поведения регуляторного контура генной сети была предложена дискретная динамическая система, в которой координаты соответствуют концентрации веществ, а за их увеличение или уменьшения отвечают специальные функции, зависящие от значений системы в предыдущий момент времени. Ранее были получены псевдополиномиальные алгоритмы восстановления таких дискретных динамических систем с аддитивными и мультипликативными функциями. В настоящей статье рассматривается обобщение на случай произвольных пороговых функций. Приведены алгоритмы восстановления существенных переменных и алгоритм упорядочивания весов пороговых функций, имеющие псевдополиномиальную сложность тестирования. Эти алгоритмы позволяют либо полностью восстановить систему, либо уменьшить размерность пороговых функций.

Ключевые слова: Дискретная динамическая система, генная сеть, пороговая функция, тестирование, задача восстановления.

1. Введение. Дискретные динамические системы активно используются для моделирования разнообразных структур и процессов. Примером таких структур являются генные сети, которые представляют собой сложные системы, состоящие из генов, РНК, белков, кодируемых соответствующими генами, а также других веществ и соединений. Функционирование генной сети можно представить как изменение с течением времени концентраций веществ, входящих в ее состав. Одним из важнейших свойств генных сетей является способность изменять концентрацию веществ сети в ответ на изменение условий внешней и внутренней среды. В связи с массовым секвенированием геномов резко возросла актуальность изучения закономерностей функционирования генных сетей в живых системах. В частности, стоит проблема восстановления структурно-функциональных связей в генных сетях по данным экспериментального анализа временных траекторий изменения концентраций веществ, синтезируемых в процессе функционирования генных сетей. Подробнее о дискретных моделях генных сетей можно прочитать в [1].

Задача восстановления структуры генной сети с использованием модели дискретной динамической системы с аддитивными и мультипликативными функциями была рассмотрена в [2, 3], а в [4] изучался вопрос восстановления структуры генной сети с произвольными булевыми функциями при фиксации значений некоторых переменных. В данной работе исследуется модель дискретной динамической системы с пороговыми функциями. Целью работы является разработка и анализ алгоритмов восстановления частичной информации о функциях, а также всей системы в целом и оценивание сложности тестирования данных систем.

2. Дискретная динамическая система. Дискретная динамическая система (ДДС) представляет собой пару (S, δ), где S — непустое множество, элементы которого называются состояниями системы, а отображение $\delta : S \to S$ определяет функционирование системы. Восстановление дискретной динамической системы подразумевает нахождение множества тестов, однозначно определяющих систему по экспериментальным данным. Тестом будем называть пару $\langle s, \delta(s) \rangle$, где $s \in S$, причем s будем называть запросом, а $\delta(s)$ — результатом теста. Задача алгоритмов восстановления состоит в нахождении множества тестов, восстанавливающих информацию о системе. Мощность этого множества назовем тестовой сложностью алгоритма восстановления.

В данной работе рассматриваются ДДС n-мерных векторов из Z_p^n, функционирование которых происходит следующим образом: пусть $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ — состояние системы, тогда следующее состояние определяется как:

$$x' = \delta(x) = (\delta_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, \delta_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})),$$

где $\delta_i : \mathrm{Z}_p^n \to \mathrm{Z}_p$ — некоторая функция, отвечающая за изменение значений i-ой компоненты системы в очередной момент времени, $0 \le i \le n-1$. В [5,6] исследовалось функционирование ДДС с линейными функциями δ_i. В [7] в качестве дискретной модели регуляторного контура генной сети была введена и рассмотрена ДДС со следующими функциями:

$$\delta_i(x) = \begin{cases} x_i - 1, & \text{если } f_i(x) = 1 \text{ и } x_i > 0, \\ x_i + 1, & \text{если } f_i(x) = 0 \text{ и } x_i < p - 1, \\ x_i, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (1)$$

В [8] в качестве функций f_i предлагалось рассматривать аддитивную функцию:

$$f_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{i_k} x_k \ge 1, \alpha_{i_k} \in \{0,1\} \, \forall k$$

или мультипликативную функцию:

$$f_i(x_0,\ldots,x_{n-1})=1 \Leftrightarrow \prod_{k=0}^{n-1} y_{i_k}>0, \text{где } y_{i_k}=\begin{cases} x_k, & \text{если } \alpha_{i_k}=1,\\ 1, & \text{если } \alpha_{i_k}=0.\end{cases}$$

Коэффициенты $\alpha_{i_0},\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{n-1}}$ фиксированы и отвечают за набор переменных, от которых существенно зависит функция f_i.

В работах [5, 6, 8-15] для визуализации множества существенных переменных рассматривается граф-носитель ДДС: $G=(V,E)$, где $V=\{0,\ldots,n-1\}, E=\{ji \mid j$-ая координата функции f_i существенная$\}$. В [8, 9] исследовалось функционирование ДДС с аддитивными функциями f_i, у которых граф-носитель является циркулянтом. В частности, описаны неподвижные состояния, состояния, в которые нельзя перейти из другого, некоторые зацикливающиеся серии состояний. В [10] анализировались ДДС с другими графами-носителями.

В [2, 3] рассматривалось восстановление ДДС с аддитивными и мультипликативными функциями. В [2] приведен алгоритм с тестовой сложностью $2n$, определяющий тип функций f_i для любого i. В [3] показано, что для полного восстановления ДДС с аддитивными и мультипликативными функциями при ограничениях d на количество существенных переменных и длину теста необходимо $O(n^d)$ и достаточно $O(n^{d+1})$ тестов.

В настоящей статье в качестве функций f_i рассматриваются пороговые функции:

$$f_i(x_0,\ldots,x_{n-1})=1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} w_{ik}x_k \geq T_i, \tag{2}$$

причем $T_i \in \mathrm{Z}$, $w_{i_0},\ldots,w_{i_{n-1}} \in \mathrm{Z}_q$, $q \leq p$. Заметим, что аддитивные функции, а также мультипликативные в случае $p=2$, являются частными случаями пороговых функций.

Если для некоторой функции f_i имеем $T_i \leq 0$ или $T_i > \sum_{k=0}^{n-1} w_{ik}(p-1)$, то значение такой функции одинаково для всех состояний системы, а значит, значение соответствующей компоненты всегда будет не убывать или не возрастать. Такие компоненты будем называть вырожденными.

Из определения пороговой функции видно, что компонента i состояний дискретной динамической системы будет вырожденной тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

– $f_i(0,\ldots,0)=1$;

– $f_i(p-1,\ldots,p-1)=0$.

Таким образом результаты 2-х запросов $(0,\ldots,0)$ и $(p-1,\ldots,p-1)$ определяют все вырожденные компоненты, поэтому в дальнейшем рассматриваются системы без вырожденных компонент.

Рассмотрим множество переменных, соответствующих ненулевым весам пороговой функции f_i. Такие переменные будем называть существенными для f_i. Из определения непосредственно следует:

Утверждение 1. Переменная x_j является существенной для пороговой функции f_i тогда и только тогда, когда существуют $a_0,\ldots,a_{n-1}\in \mathrm{Z}_p$ такие, что $a_j<p-1$ и

$$f_i(a_0,\ldots,a_j,\ldots,a_{n-1})\neq f_i(a_0,\ldots,a_{j-1},a_j+1,a_{j+1},\ldots,a_{n-1}).$$

В разделе 3 приводятся алгоритмы восстановления множества существенных переменных всех функций $f_0,\ldots,f_{n-1}$ (т.е. графа носителя ДДС). В разделе 4 приводится алгоритм восстановления частичной информации о весах пороговой функции f_i.

3. Восстановление множества существенных переменных. Будем называть алгоритм восстановления системы условным, если в процессе работы он запрашивает определенные данные, и безусловным, если все необходимые данные он получает до начала работы.

Основополагающим для алгоритма 1 построения множества существенных переменных произвольной пороговой функции f_i ДДС является следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть s_1 и s_2 такие, что

$$s_1=(\underbrace{0,\ldots,0}_{k},\ \alpha_k\ ,p-1,\ldots,p-1), \tag{3}$$

$$s_2=(\underbrace{0,\ldots,0}_{k},\ \alpha_k+1\ ,p-1,\ldots,p-1), \tag{4}$$

$$f_i(s_1)=0, f_i(s_2)=1. \tag{5}$$

Тогда:

– если заменить любой ноль в состоянии s_1 на $p-1$, то значение пороговой функции изменится тогда и только тогда, когда соответствующая координата является существенной для f_i;

– если заменить любое значение $p-1$ в состоянии s_2 на ноль, то значение пороговой функции изменится тогда и только тогда, когда соответствующая координата является существенной для f_i.

Доказательство: Если для некоторого j, $0 \le j < k$, имеем $f_i(\underbrace{0,\ldots,0}_{j}, p-1,0,\ldots,0,\alpha_k, p-1,\ldots, p-1) = 1$, то по утверждению 1 для i-ой функции j-ая переменная является существенной. Если же $f_i(\underbrace{0,\ldots,0}_{j}, p-1,0,\ldots,0,\alpha_k, p-1,\ldots, p-1) = 0$, то в силу того, что $(p-1)w_j \ge w_k$, j-ая переменная не является существенной для i-ой функции. Аналогичные рассуждения позволяют однозначно определить существенность каждой переменной x_j, $j > k$, рассматривая запросы вида $(\underbrace{0,\ldots,0,\alpha_k, p-1,\ldots, p-1}_{j},0, p-1,\ldots, p-1)$. Утверждение 2 доказано.

Алгоритм 1 восстановления множества существенных переменных функции f_i.

1) Методом бинарного поиска находим состояния s_1, s_2 и позицию k, удовлетворяющие условиям (3-5). Добавляем k в X.

2) Для всех $0 \le j < k$ тестируем состояние $s_j = (\underbrace{0,\ldots,0}_{j}, p-1, 0,\ldots,0, \alpha_k, p-1,\ldots, p-1)$. Если $f_i(s_j) = 1$, то добавляем j в X.

3) Для всех $k < j \le n-1$ тестируем состояние $s_j = (\underbrace{0,\ldots, 0, \alpha_k, p-1,\ldots, p-1}_{j}, 0, p-1,\ldots, p-1)$. Если $f_i(s_j) = 0$, то добавляем j в X.

4) Выводим X.

В алгоритме 1 на первом шаге бинарным поиском находятся состояния s_1 и s_2, удовлетворяющие (3-5). Такие состояния существуют, так как функция f_i не является вырожденной. На втором и третьем шагах, последовательно заменяя нулевые значения состояния s_1 на $p-1$, а затем значения $p-1$ состояния s_2 на 0, восстанавливаем все существенные переменные пороговой функции.

Применение данного условного алгоритма к каждой пороговой функции позволяет восстановить все существенные зависимости в системе. Для этого потребуется не более $n^2 + n\lfloor \log_2(n(p-1)) \rfloor$ тестовых пар. Однако, при использовании этого алгоритма для безусловного тестирования сложность будет $n^3(p-1)$. Рассмотрим модификацию алгоритма, позволяющую уменьшить сложность безусловного тестирования.

Идея алгоритма состоит в использовании в качестве запросов только состояний вида:

$$0^a x(p-1)^b 0^c \quad \text{или} \quad (p-1)^a 0^b x(p-1)^c, \tag{6}$$

где $a+b+c=n-1,\ a,b,c \geq 0,\ 0 < x \leq p-1$, т.е. значения 0 и $p-1$ идут только подряд, если рассматривать состояние как циклическую структуру.

Утверждение 3.

Пусть $\pi^t(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n-1}) = (\alpha_t,\alpha_{t+1},\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_0,\ldots,a_{t-1})$, тогда для любого $t \in \mathrm{Z}$ существуют позиция k и состояния s_1 и s_2 такие, что:

$$s_1 = (c_0,\ldots,c_{n-1}) = \pi^t(\underbrace{0,\ldots,0}_{k}, \quad \alpha_k \quad, p-1,\ldots,p-1), \tag{7}$$

$$s_2 = (c'_0,\ldots,c'_{n-1}) = \pi^t(\underbrace{0,\ldots,0}_{k}, \alpha_k+1, p-1,\ldots,p-1), \tag{8}$$

$$f_i(s_1) = 0, f_i(s_2) = 1. \tag{9}$$

Это утверждение очевидно следует из монотонности и невырожденности пороговой функции f_i.

Алгоритм 2 восстановления множества существенных переменных функции f_i:

1) Пусть $t = 0$.

2) Если $t > n-1$, то переходим на шаг 4, иначе методом бинарного поиска находим состояния s_1, s_2 и позицию k, удовлетворяющие условиям (7-9) для заданного t. Добавляем в X номер компоненты, в которой различаются состояния s_1 и s_2.

3) Тестируем состояние $s_2' = \pi^t(\underbrace{0,\ldots,0}_{k}, \alpha_k + 1, p-1, \ldots, p-1, 0)$.

Увеличиваем значение t на единицу. Если $f_i(s_2') = 0$, то добавляем номер компоненты, в которой различаются состояния s_2 и s_2' в X, и переходим на шаг 2. Иначе переходим на шаг 3.

4) Выводим X.

В алгоритме 2, после нахождения состояний s_1 и s_2, удовлетворяющих (7-9), начинается поочередное выполнение двух шагов пока не будут проверены все переменные. Первый шаг состоит в замене нулей на значение $p-1$ с одного края ненулевых значений состояния, в котором значение пороговой функции равно единице, и увеличении параметра t на число равное количеству этих замен. Второй шаг заключается в поиске следующих состояний, удовлетворяющих (7–9) для нового значения параметра t.

Таким образом, сложность безусловного тестирования всей системы равна количеству состояний вида (6), а именно $n^2(p-1) - n + 1$, хотя сложность условного тестирования увеличится по сравнению с алгоритмом 2 и будет равна $n\lfloor \log_2(n(p-1)) \rfloor + n$ для одной пороговой функции.

В дискретной динамической системе при $q = 2$, частным случаем которой является система с аддитивными функциями, все ненулевые коэффициенты w_i равны единице, следовательно, в этом случае алгоритм восстановления существенных переменных восстанавливает всю систему.

4. Упорядочивание весов пороговой функции. Рассмотрим пороговую функцию с порогом T. Введем обозначение $\tau = \dfrac{T}{p-1}$ и $\bar{\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} w_i - \dfrac{T}{p-1}$. Пусть для всех $w_i < w_j$ выполняется:

$$w_i < \min\left\{\frac{(p-1)\tau}{\left\lceil\frac{(p-1)\tau}{w_j}\right\rceil}, \frac{(p-1)\bar{\tau}}{\left\lceil\frac{(p-1)\bar{\tau}}{w_j}\right\rceil}\right\}, \tag{10}$$

Данное условие обеспечивает необходимую разницу между весами при малых или очень больших значениях порога.

Разобьем множество всех весов на четыре множества:

$$X_0 = \{w_i \mid w_i = 0\}, X_1 = \{w_i \mid w_i \geq \tau\},$$
$$X_2 = \{w_i \mid w_i > \bar{\tau}\}, X_3 = \{w_i \mid w_i < \tau \text{ или } w_i \leq \bar{\tau})\}.$$

Заметим, что хотя бы одно из множеств $X_1 \setminus X_2$, $X_2 \setminus X_1$ пусто. Очевидно, для любых $w_i \in X_3$ и $w_j \in X_1 \cup X_2$ выполняется $w_i < w_j$.

Рассмотрим следующий алгоритм упорядочивания весов. На первом шаге алгоритм 3 разделяет все веса на множества X_0, X_1, X_2 и X_3. Множество X_0 выделяется алгоритмами 1 или 2. Вес i лежит в множестве X_1 тогда и только тогда, когда $f(0,\ldots,0,p-1,0,\ldots,0) = 0$ (ненулевое значение на i-ом месте). Аналогично, вес i лежит в множестве X_2 тогда и только тогда, когда $f(p-1,\ldots,p-1,0,p-1,\ldots,p-1) = p-1$ (нулевое значение на i-ом месте). Следовательно, не более чем за $2k$ тестов можно определить, к какому множеству принадлежат все ненулевые веса.

На втором шаге алгоритм 3 упорядочивает веса внутри множеств.

Для любого веса $w_i \in X_1$ определим число a_i, удовлетворяющее условию

$$(a_i - 1)w_i < T \leq a_i w_i. \tag{11}$$

Утверждение 4. Для любых w_i и w_j из множества X_1 справедливо $w_i > w_j$ тогда и только тогда, когда $a_i < a_j$.

Доказательство: Пусть $a_i < a_j$, тогда, так как $a_i w_i \geq T > (a_j - 1)w_j$, имеем $w_j < \frac{a_i w_i}{a_j - 1} \leq \frac{(a_j - 1)w_i}{a_j - 1} = w_i$.

Пусть $w_i > w_j$, тогда в силу (10) $w_j < \dfrac{T}{\lceil \frac{T}{w_i} \rceil}$. Так как $\lceil \frac{T}{w_i} \rceil = a_i$, то $w_j < \dfrac{T}{a_i}$, следовательно, $a_i w_j < T \le a_j w_j$, а значит, $a_i < a_j$. Утверждение 4 доказано.

Аналогично, для любого веса $w_i \in X_2$, определим число b_i, удовлетворяющее условию:

$$(b_i - 1) w_i \le (p-1)\bar{\tau} < b_i w_i. \qquad (12)$$

Утверждение 5. Для любых w_i и w_j из множества X_2 справедливо $w_i > w_j$ тогда и только тогда, когда $b_i < b_j$.

Пусть веса w_i, w_j из множества X_3. Состояния s_1 и s_2 разделяют веса w_i и w_j, если

- s_1 и s_2 удовлетворяют условиям (7-9) для некоторого t;
- $c_i = c_i' = p-1$;
- $c_j = c_j' = 0$.

Утверждение 6. Пусть s_1 и s_2 разделяют веса w_i и w_j из множества X_3. Тогда $w_j > w_i$, если и только если $f(s_1') = 1$, и $w_j < w_i$, если и только если $f(s_2') = 0$, где состояния s_1' и s_2' получены перестановкой значений c_i и c_j в s_1 и s_2 соответственно.

Доказательство: Пусть $w_j > w_i$, тогда:

$$\sum_{k \in \{0,\ldots,n-1\} \setminus \{i,j\}} w_k c_k + (p-1) w_j \ge \sum_{k \in \{0,\ldots,n-1\} \setminus \{i,j\}} w_k c_k + (p-1)(w_i + 1)$$
$$\ge \sum_{k=0}^{n-1} w_k c_k' \ge T.$$

Следовательно, $f(s_1') = 1$. Пусть $f(s_1') = 1$, тогда:

$$\sum_{k \in \{0,\ldots,n-1\} \setminus \{i,j\}} w_k c_k + (p-1) w_j \ge T > \sum_{k \in \{0,\ldots,n-1\} \setminus \{i,j\}} w_k c_k + (p-1) w_i .$$

Следовательно, $w_j > w_i$. Случай когда $w_j < w_i$ доказывается аналогично. Утверждение 6 доказано.

Алгоритм 3 упорядочивания весов.

1) Удаляем из рассмотрения несущественные переменные.

2) Для всех i тестируем состояния $s_i = (\underbrace{0,\dots,0}_{i}, p-1, 0,\dots,0),\ s'_i = (\underbrace{p-1,\dots,p-1}_{i}, 0, p-1,\dots,p-1)$.

Если $f(s_i)=1$, то добавляем w_i в X_1, если $f(s'_i)=0$, то добавляем w_i в X_2, остальные — в X_3.

3) Для всех $w_i \in X_1$ бинарным поиском находим значения a_i, удовлетворяющие (11), упорядочиваем веса по неубыванию a_i.

4) Для всех $w_i \in X_2$ бинарным поиском находим значения b_i, удовлетворяющие (12), упорядочиваем веса по неубыванию b_i.

5) Используем любой эффективный алгоритм сортировки для весов из множества X_3. Для нужных пары w_i, w_j бинарным поиском находим разделяющие состояния и по утверждению 6 упорядочиваем эту пару.

6) Объединяем множества X_1, X_2, X_3 и выводим упорядоченное множество весов X.

Для сравнения двух весов в X_3 потребуется $O(log(n(p-1)))$ тестов, следовательно, тестовая сложность алгоритма упорядочивания весов равна $O(n\log(n)\log(n(p-1)))$.

Переменные с одинаковым весом можно заменить одной новой переменной:

$$(x_{i_0}w_i + x_{i_1}w_i + \ldots + x_{i_{k-1}}w_i) = y_i w_i,\ 0 < y_i \le k(p-1).$$

В результате получим пороговую функцию от m переменных $g(y_{j_0},\dots,y_{j_{m-1}})$.

Назовем алгоритм восстановления пороговой функции псевдополиномиальным, если он имеет оценку сложности тестирования $O(Pol(n,\log(p-1)))$, где Pol — некоторый полином от двух переменных. Известно, что задача восстановления произвольной пороговой функции не разрешима за псевдополиномиальное количество тестов, и в [16] представлен алгоритм восстановления с тестовой сложностью $O(\log^n(p-1))$. Таким образом, справедлива теорема: пусть D —

произвольная дискретная динамическая система (1) с пороговыми функциями (2), удовлетворяющими (10). Тогда алгоритмы 1, 2 и 3 позволяют получить эквивалентную систему D', для которой существует алгоритм полного восстановления с тестовой сложностью $O(\sum_{i=0}^{n-1} \log^{m_i}(n-m_i+1)(p-1))$, где m_i — количество переменных пороговой функции g_i, полученной в результате применения алгоритма 3 к пороговой функции f_i системы D, $i=0,\ldots,n-1$.

5. Заключение. Заметим, что если в результате применения алгоритма 3 к пороговой функции f_i получим:

– $m_i = 1$, то полагаем все веса функции f_i равными единице и однозначно определяем пороговое значение T_i,

– $m_i = q-1$, то в определении (2) функции f_i присутствуют все допустимые веса, а следовательно, они и пороговое значение определяются однозначно алгоритмом упорядочивания весов.

Поскольку при $q=2$ и $q=3$ для любой пороговой функции f_i имеем $m_i \in \{1, q-1\}$, то при таких значениях параметра алгоритмы 1-3 восстанавливают дискретную динамическую систему за псевдополиномиальное количество тестов. Остается открытым вопрос существования псевдополиномиальных алгоритмов восстановления системы при других значениях параметра q.

Литература

1. *Wang R.-S., Saadatpour A., Albert R.* Boolean modeling in systems biology: an overview of methodology and applications // Physical Biology. 2012. vol. 9. no. 5.
2. *Евдокимов А.А., Комаров А.В.* О восстановлении структуры дискретных моделей функционирования генных сетей // Вестник ТГУ. 2005. № 14. С. 213–217.
3. *Евдокимов А.А., Комаров А.В.* О восстановимости дискретных моделей генных сетей // Вестник ТГУ. 2006. № 3. С. 437–467.
4. *Akutsu T., Kuhara S., Maruyama O., Miyano S.* Identification of genetic networks by strategic gene disruptions and gene overexpressions under a boolean model // Theoretical Computer Science. 2003. vol. 298. pp. 235–251.
5. *Евдокимов А.А., Пережогин А.Л.* Дискретные динамические системы циркулянтного типа с линейными функциями в вершинах сети // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2011. № 18(3). С. 39–48.
6. *Корниенко А.С.* Структура функциональных графов для циркулянтов с линейными булевыми функциями в вершинах // Прикладная дискретная математика. 2014. №1. С. 84–95.
7. *Демиденко Г.В. и др.* Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 12. С. 2276–2295.

8. *Григоренко Е.Д., Евдокимов А.А., Лихошвай В.А., Лобарева И.А.* Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник ТГУ. Приложение. 2005. № 14. С. 206–212.
9. *Kutumova E.O., Evdokimov A.A.* Reversible states of functioning the regulatory circuits discrete models the gene nets // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 14(1). С. 85–94.
10. *Нажмиденова А.М., Пережогин А.Л.* Дискретная динамическая система на двойном циркулянте // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2014. № 21(4). С. 80–88.
11. *Евдокимов А.А., Кочемазов С.Е. Отпущенников И.В., Семенов А.А.* Исследование динамических свойств некоторых дискретно-автоматных отображений, заданных случайными графами // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 75–76.
12. *Евдокимов А.А., Кочемазов С.Е. Отпущенников И.В., Семенов А.А.* Исследование дискретно-автоматных моделей генных сетей нерегулярой структуры методами символьных вычислений // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2014. № 21(3). С. 25–40.
13. *Батуева Ц.Ч.-Д.* Свойства генных сетей циркулянтного типа с пороговыми функциями // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2013. № 6. С. 72–73.
14. *Батуева Ц.Ч.-Д.* Дискретные динамические системы циркулянтного типа с пороговыми функциями в вершинах // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2014. № 21(4). С. 25–32.
15. *Быков И.С.* Функционирование дискретной динамической системы циркулянтного типа с пороговыми функциями в вершинах // Прикладная дискретная математика. 2014. №4. С. 84–95.
16. *Золотых Н.Ю., Шевченко В.Н.* Расшифровка пороговых функций k-значной логики // Дискретн.анализ и исслед. опер. 1995. Т. 2. № 3. С. 18–23.

Прытков Николай Владимирович — магистрант механико-математического факультета, ФГБОУ ВПО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (НГУ). Область научных интересов: анализ и синтез управляющих систем, теория графов. Число научных публикаций — 3. nikolass@ngs.ru; ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090; р.т.: +79139042047.

Пережогин Алексей Львович — к-т техн. наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории дискретного анализа, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН), доцент кафедры дискретного анализа и исследования операций факультета информационных технологий, ФГБОУ ВПО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (НГУ). Область научных интересов: анализ и синтез управляющих систем, комбинаторика, теория графов. Число научных публикаций — 20. pereal@math.nsc.ru; ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090; р.т.: +79138934890.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00507).

DOI 10.15622/sp.49.4

N.V. PRYTKOV, A.L. PEREZHOGIN

RECOVERY ALGORITHMS FOR DISCRETE DYNAMIC SYSTEMS WITH THRESHOLD FUNCTIONS

Prytkov N.V., Perezhogin A.L. **Recovery Algorithms for Discrete Dynamic System with Threshold Functions.**

Abstract. Recovery of a dynamic system from its functioning is a problem of current interest in the theory of control systems. As a behavior model of gene network regulatory circuit, a discrete dynamic system has been proposed, where coordinates correspond to the concentration of substances, while special functions, which depend on the system value in the previous moment, account for their increase or decrease. Pseudo-polynomial discrete dynamic system recovery algorithms with additive and multiplicative functions have been obtained earlier. The generalized case of arbitrary threshold functions is considered in this article. Algorithms for significant variables recovery and threshold functions weight regulation, having pseudo-polynomial testing complexity, are given. These algorithms allow one either to recover the system completely, or to lower the threshold function dimension.

Keywords: discrete dynamic system, genetic network, threshold function, testing, recovery problem.

Prytkov Nikolay Vladimirovich — master of mechanics and mathematics faculty, Novosibirsk State University (NSU). Research interests: control systems analysis and synthesis, combinatorics, graph theory. The number of publications — 3. nikolass@ngs.ru; 1, Pirogova str., Novosibirsk, 630009; office phone: +79139042047.

Perezhogin Aleksei L'vovich — Ph.D., associate professor, senior researcher of discrete analysis laboratory, Sobolev Institute of Mathematics of Russian Academy of Science, assistant professor of discrete analysis and operational research department of information technology faculty, Novosibirsk State University (NSU). Research interests: control systems analysis and synthesis, combinatorics, graph theory. The number of publications — 20. pereal@math.nsc.ru; 1, Pirogova str., Novosibirsk, 630009; office phone: +79138934890.

Acknowledgements. This research is supported by RFBR (grant 14-01-00507).

References

1. Wang R.-S., Saadatpour A., Albert R. Boolean modeling in systems biology: an overview of methodology and applications. *Physical Biology*. 2012. vol. 9. no. 5.
2. Evdokimov A.A., Komarov A.V. [On the gene networks functioning discrete models recovery]. *Vestnik TGU – Herald of TSU*. 2005. vol. 14. pp. 213–217. (In Russ.).
3. Evdokimov A.A., Komarov A.V. [On the reconstruction of gene networks discrete model]. *Vestnik TGU – Herald of TSU*. 2006. vol. 3. pp. 437–467. (In Russ.).
4. Akutsu T., Kuhara S., Maruyama O., Miyano S. Identification of genetic networks by strategic gene disruptions and gene overexpressions under a boolean model. *Theoretical Computer Science*. 2003. vol. 298. pp. 235–251.
5. Evdokimov A.A., Perezhogin A.L. [Discrete dynamical systems of a circulant type with linear functions at vertices of network]. *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii – Discrete analysis and operations research.* 2011. vol. 18(3). pp. 39–48. (In Russ.).

6. Kornienko A.S. [Functional graphs structure of circulants with linear boolean functions at vertices]. *Prikladnaja diskretnaja matematika – Applied Discrete Mathematics*. 2014. vol.1. pp. 84-95. (In Russ.).
7. Demidenko G.V. et al. [Gene network regulatory circuit mathematical modeling]. *Zhurnal vych. matematiki i mat. Fiziki – Computational math. and math. physics*. 2004. Issue 44. vol. 12. pp. 2276–2295. (In Russ.).
8. Grigorenko E.D., Evdokimov A.A., Likhoshvai V.A., Lobareva I.A. [Stationary points and cycles of automatic mappings modeling gene network functioning]. *Vestnik TGU. Prilozhenie – Herald of TSU. Application*. 2005. vol. 14. pp. 206–212. (In Russ.).
9. Kutumova E.O., Evdokimov A.A. Reversible states of functioning the regulatory circuits discrete models the gene nets. *Vestnik TGU. Upravlenie, vych. tehnika i informatika – TSU Journal of Control and Computer Science*. 2011. vol. 14(1). pp. 85–94.
10. Nazhmidenova A.M., Perezhogin A.L. [Discrete dynamic system on double circulant]. *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii – Discrete analysis and operations research*. 2014. vol. 21(4). pp. 80–88. (In Russ.).
11. Evdokimov A.A., Kochemazov S.E. Otpuschennikov I.V., Semenov A.A. [Dynamical properties of some discrete automaton mappings defined by random graphs]. *Prikladnaja diskretnaja matematika. Prilozhenie – Applied Discrete Mathematics. Application*. 2013. vol. 6. pp. 75–76. (In Russ.).
12. Evdokimov A.A., Kochemazov S.E. Otpuschennikov I.V., Semenov A.A. [Analysis of discrete automaton models of gene networks with irregular structure using symbolic algorithms]. *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii – Discrete analysis and operations research*. 2014. vol. 21(3). pp. 25–40. (In Russ.).
13. Batueva Ts.Ch.-D. [Properties of gene networks with threshold functions]. *Prikladnaja diskretnaja matematika. Prilozhenie – Applied Discrete Mathematics. Application*. 2013. vol. 6. pp. 72–73. (In Russ.).
14. Batueva Ts.Ch.-D. [Discrete dynamic systems of a circulant type with threshold function in the vertices]. *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii – Discrete analysis and operations research*. 2014. vol. 21(4). pp. 25–32. (In Russ.).
15. Bykov I.S. [Functioning of discrete dynamic circulant-type systems with threshold functions]. *Prikladnaja diskretnaja matematika – Applied Discrete Mathematics*. 2014. vol. 4. pp. 84-95. (In Russ.).
16. Zolotykh N.Yu., Shevchenko V.N. [Deciphering of threshold functions of k-valued logic]. *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii – Discrete analysis and operations research*. 1995. Issue 2. vol. 3. pp. 18–23. (In Russ.).