

С.В. КОКОРИН, Ю.И. РЫЖИКОВ  
**СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО МЕТОДОВ  
РАСЧЁТА МОМЕНТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ  
ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВОК В СЕТЯХ МАССОВОГО  
ОБСЛУЖИВАНИЯ**

---

*Кокорин С.В., Рыжиков Ю.И. Сравнение аналитического и численного методов расчёта моментов распределения времени пребывания заявок в сетях массового обслуживания.*

**Аннотация.** Предлагается аналитический метод расчёта моментов времени пребывания заявок в сетях массового обслуживания общего вида и проводится сравнение оценок, полученных данным способом, с оценками по имитационной модели и, полученных численным методом.

**Ключевые слова:** Сети массового обслуживания, аналитический расчёт, пропускная способность.

*Kokorin S.V., Ryzhikov Ju.I. Comparison of analytical and numerical methods for calculation of sojourn time distribution's moments in a queueing networks.*

**Abstract.** The analytic method for calculation of moments of a sojourn time distribution has been proposed. The comparison with estimations from simulation model and numerical calculations has been considered.

**Keywords:** queueing networks, analytical and numerical methods, sojourn time distribution approximation.

---

**1. Введение.** Чрезвычайно широкий круг задач организации производства, логистики, бытового обслуживания населения, поддержания городской инфраструктуры, ремонтных служб, здравоохранения, военного дела и т. п., связанный с обработкой потока заявок случайной трудоемкости, может быть решен средствами теории массового обслуживания (ТМО). Время прохождения заявкию сети является одной из основных целевых характеристик сети массового обслуживания (СеМО). Точные аналитические оценки для распределения данной величины могут быть получены только для простейших моделей. В данной работе рассматривается метод получения приближённых оценок начальных моментов данного распределения.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим открытую СеМО, заданную пятёркой  $\langle M, \Lambda, B, n, R \rangle$ , где  $M$  - количество узлов в сети,  $\Lambda$  - интенсивность входящего потока,  $B$  - матрица первых  $m$  начальных моментов распределения времени обслуживания в каналах для всех узлов,  $n$  - вектор-столбец числа каналов для всех узлов,

$R$  - матрица стационарных вероятностей переходов между узлами, включая источник и сток. Полная матрица переходов может быть представлена в форме

$$R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ Q & T \end{pmatrix},$$

где  $Q$  - матрица стационарных вероятностей переходов между узлами;  $T$  - вектор-столбец стационарных вероятностей покинуть сеть из узлов;  $P$  - вектор-строка вероятностей распределения заявок из источника между узлами.

Начальные моменты  $\nu_1, \nu_2, \dots$  распределения времени пребывания заявки в сети можно получить как

$$\nu_i = (-1)^i \gamma^{(i)}(s) \Big|_{s=0} \quad (1)$$

(верхний индекс определяет порядок производной),  $\gamma(s)$  - функция преобразования Лапласа (ПЛС) для распределения суммарного времени пребывания заявки в сети.

Можно показать [3], что

$$\gamma(s) = P(I - \Gamma(s))^{-1} N(s)T, \quad (2)$$

где

- $I$  - единичная матрица размера  $M \times M$ ;
- $N(s) = \text{diag}(\gamma_1(s), \dots, \gamma_M(s))$  - диагональная матрица ПЛС времени пребывания при однократном посещении каждого из узлов;
- $\Gamma(s) = N(s) \cdot Q$ .

Отметим, что этот подход применим к сетям произвольной структуры, в том числе к СеМО с циклами. Для расчёта моментов распределения времени пребывания заявки в сети можно воспользоваться формулой (1). Операцию дифференцирования ПЛС можно реализовать как численным, так и аналитическим методом.

**3. Численный метод.** Ниже во всех формулах раздела «для упрощения» будем опускать индекс узла. Так как ПЛС легко вычисляется для показательных функций. В [4] предлагается воспользоваться аппроксимацией распределения времени пребывания в каждом из узлов с помощью гамма-распределения с поправочным множителем:

$$f(t|\alpha, \mu, g) = \frac{\mu(\mu t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu t} \sum_{i=0}^m g_i t^i, \quad (3)$$

где  $\alpha, \mu$  - параметры гамма-распределения,  $g = (g_0, \dots, g_m)$  - вектор коэффициентов многочлена,  $m$  - заданное число моментов. Для оценки параметров гамма-распределения используются следующие формулы:

$$\mu = \frac{v_1}{v_2 - v_1^2}, \quad \alpha = v_1 \mu,$$

где  $v_k$  -  $k$ -й момент распределения времени однократного пребывания в узле. Коэффициенты  $\{g_i\}$  в формуле (3) получены из полиномов Лагерра так, чтобы подправленная плотность сохраняла заданные значения высших начальных моментов. Многочлен является тождественной единицей, если задано 2 момента.

В случае распределения, близкого к вырожденному, используется простая оценка  $\gamma(s) = e^{-s v_1}$ . В противном случае (практически, если коэффициент вариации больше 0.2), для оценки производных  $\gamma_i(s)$  в точке  $s$  используется ПЛС для гамма-распределения с поправочным многочленом [4]:

$$\gamma^{(k)}(s) = (-1)^k \left( \frac{\mu}{s + \mu} \right)^\alpha \left( \frac{1}{s + \mu} \right)^k \sum_{i=0}^N \frac{g_i}{s + \mu} \frac{\Gamma(\alpha + k + i)}{\Gamma(\alpha)},$$

где  $k = 1, 2, \dots$

Численное дифференцирование применяется к интерполяционному полиному в окрестности нуля, построенному по методу Стирлинга [2]. Строится конечно-разностная схема для  $\gamma(s)$  с шагом  $h$  и  $n_h$  точек по каждую сторону от нуля. По полученной разностной схеме вычисляются оценки для производных заданного порядка  $\gamma(s)$  в нуле.

При всей универсальности идеи метода численного дифференцирования, успех его реализации зависит от точности таблицы разностей и параметров  $(h, n_h)$ . Из определения производной следует, что шаг необходимо выбирать минимально возможным, но нужно отметить, что выбор шага по-разному сказывается на оценках различных моментов. При счёте в ограниченной разностной сетке с уменьшением шага существенно сокращается количество верных

значащих цифр старших моментов. Поэтому выбор параметров для применения численного дифференцирования является не тривиальной задачей, требующей численных экспериментов.

**4. Аналитический расчёт.** При выполнении расчётов, когда распределения интервалов между появлением заявок и времени обслуживания в узлах оцениваются статистически, погрешность оценки входных старших моментов возрастает очень быстро. Сложность приведённых ниже формул заметно увеличивается с увеличением порядка моментов, с другой стороны в прикладной практике, первых трёх моментов времени пребывания заявки в сети достаточно для адекватной оценки формы функции распределения времени пребывания в сети и оценки вероятностей уложиться в заданный директивный срок. Чтобы избежать необходимости выбора параметров  $(h, n_h)$  численного дифференцирования, предложен метод, опирающийся на аналитическое представление оценок для  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ .

Формула (2) демонстрирует функциональную зависимость  $\gamma(s)$  от  $\{\gamma_i(s)\}$ . В совокупности с (1) она позволяет выразить  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  через начальные моменты распределения однократного времени пребывания заявки в узле. Заметим, что аналитический метод не требует дополнительных предположений о распределении времени пребывания в узлах, в отличие от численного.

Введём дополнительные обозначения

$$\begin{aligned} A(s) &= (I - \Gamma(s))^{-1}, \\ \gamma(s) &= P \cdot A(s) N(s) \cdot T, \\ N^{(i)}(s) &= \text{diag}(\gamma_1^{(i)}(s), \dots, \gamma_M^{(i)}(s)). \end{aligned}$$

Последовательно дифференцируя правую часть (2) по  $s$  получаем

$$\begin{aligned}
\gamma^{(1)}(s) &= P \cdot A(s)N^{(1)}(s)(R \cdot A(s)N(s) + I) \cdot T, \\
\gamma^{(2)}(s) &= P \cdot A(s) \cdot (2 \cdot N^{(1)}(s)R \cdot A(s)N^{(1)}(s) \\
&\quad + N^{(2)}(s))(RA(s)N(s) + I) \cdot T, \\
\gamma^{(3)}(s) &= PA(s)\left(N^{(1)}(s)RA(s)\left(2N^{(1)}(s)RA(s)N^{(1)}(s) + N^{(2)}(s)\right)\right. \\
&\quad + \left.2\left(N^{(2)}(s)RA(s)N^{(1)}(s)\right.\right. \\
&\quad + \left. N^{(1)}(s)RA(s)N^{(1)}(s)RA(s)N^{(1)}(s)\right. \\
&\quad + \left. N^{(1)}(s)RA(s)N^{(2)}(s)\right) + N^{(3)}(s)\left. \right) \\
&\quad + \left(2N^{(1)}(s)RA(s)N^{(1)}(s) + N^{(2)}(s)\right)RA(s)N^{(1)}(s) \\
&\quad \cdot (RA(s)N^{(1)}(s) + I)T.
\end{aligned}$$

Отметим, что громоздкие формулы, могут быть достаточно сильно упрощены, при подстановке точки ноль, так как

$$N(s)\Big|_{s=0} = I,$$

$$N^{(i)}(s)\Big|_{s=0} = \text{diag}((-1)^i \nu_{1i}, \dots, (-1)^i \nu_{Mi}),$$

$$A(s)\Big|_{s=0} = (I - R)^{-1}.$$

**5. Имитационная модель.** Хотя получение практически одинаковых результатов для «численных» и «аналитических» оценок демонстрирует их взаимотестирование и корректность, реализация симуляции для моделей, используемых в численных экспериментах, позволяет дополнительно подтвердить их адекватность.

Для имитации использовалась потоко-ориентированная библиотека SimPy [1]. Для каждой заявки фиксировались события: появления в сети, прохождение узлов, ожидание в очереди каждого из узлов, общее время пребывания заявки в сети. По данным характеристикам оценивались как моменты распределения суммарного времени пребывания в сети, так и моменты распределения однократного пребывания в узлах. Для проведённых моделирований в качестве критерия останова использовалось достижение  $10^6$  единиц модельного времени.

**6. Численные эксперименты.** Для численных экспериментов была использована модель сети, представленная на Рис. 1.

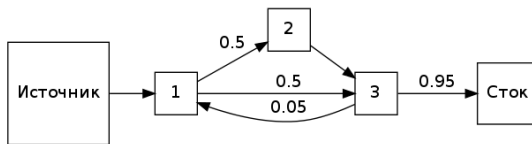


Рис. 1. Модель сети.

Входящий поток предполагается простейшим. Сети рассчитывались при различных распределениях времени обслуживания с сохранением средних. Были рассмотрены случаи показательного закона, гамма-распределения с параметрами формы и масштаба ( $\alpha = 0.3, \mu = 3$ ) соответственно, регулярное обслуживание. Количество каналов в каждом из узлов принималось равным индексу узла. Для расчёта  $\nu_k$  численным методом требуется принять количество шагов  $n_h \geq k$ . В качестве базового значения было принято использовать  $n_h = 4$ .

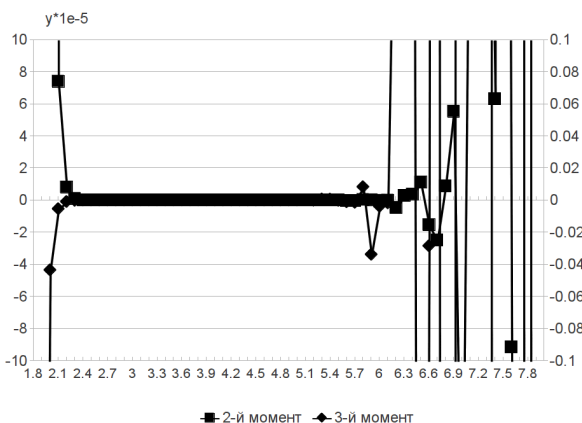


Рис. 2. Относительные погрешности моментов для шага.

На Рис. 2 представлен график относительных погрешностей расчёта  $\nu_2, \nu_3$  двумя методами при различных  $h$ . По оси  $x$  откладывается  $\log_{10}(h)$ , по оси  $y$  - относительная погрешность оценок, полученных с использованием численного дифференцирования («численных»), по отношению к «аналитическим». Оценки, получаемые из аналитических формул, совпадают со значением, получаемым при оптимальном значении численного дифференцирования, с точностью до 8 знаков. Оптимальные значения

достигаются при длине шага  $10^{-3} - 10^{-5}$ . При меньших шагах происходит постепенное понижение точности получаемых оценок вплоть до шага  $10^{-8}$ . При длине шага  $\geq 10^{-2}$  происходит резкая потеря в точности получаемых оценок.

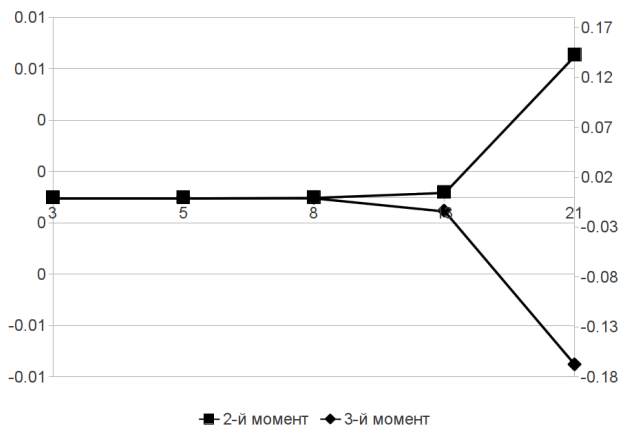


Рис. 3. Отклонение оценок численного дифференцирования.

На Рис. 3 представлен график относительных погрешностей оценок численного дифференцирования  $\nu_2, \nu_3$  в зависимости от числа узлов в цепочке с возвратами, с показательным распределением между поступающими заявками, с интенсивностью  $\Lambda \approx 0.75$  и гамма-распределением времени обслуживания с параметрами формы и масштаба  $(1/3, 3)$ , соответственно, при значениях  $h = 1^{-3}$ ,  $n_h = 4$ . По оси  $x$  отложено число узлов в цепочке, по оси  $y$  - относительная погрешность «численных оценок» в сравнении с «аналитическим».

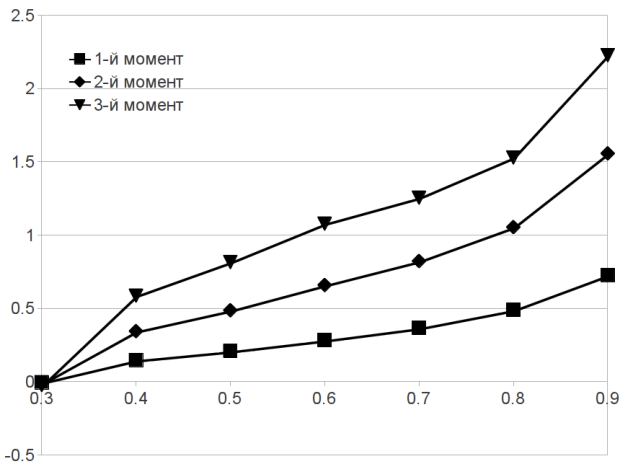


Рис. 4. Относительная погрешность.

На Рис. 4 представлен график относительных погрешностей оценок  $V_1, V_2, V_3$ , полученных из численной модели для сети Рис. 1 по отношению к оценкам из имитационной модели. Время обслуживания в каналах каждого узла предполагается регулярным со средним 1. По оси  $x$  отложена интенсивность входящего потока, по оси  $y$  - относительная погрешность. Как видно погрешность оценок растёт с ростом индекса моментов и при увеличении загрузки сети. Данная тенденция прослеживается для всех рассчитанных моделей.

В качестве базового значения предлагается использовать  $h = 10^{-3}$ . Увеличение коэффициента загрузки узлов ухудшает точность оценок, полученных численным дифференцированием. Увеличение количества узлов также требует корректировки параметров. Уменьшение шага до  $h = 10^{-4} - 10^{-5}$  в экспериментах с 10 – 50 узлами показывает хорошие результаты численного дифференцирования. Критерием правильного выбора шага дифференцирования может служить отсутствие изменения оценок результирующих параметров  $V_1, V_2, V_3$  при незначительном увеличении параметра  $n_h$ .

**7. Реализация.** Численные методы расчёта характеристик СеМО разрабатывались и используются в рамках библиотеки прикладных программ МОСТ. Данная библиотека предназначена для проведения профессионального моделирования и оценки параметров широкого



класса систем и сетей массового обслуживания. В данной работе использовались процедуры численного дифференцирования и аналитического подсчёта начальных моментов распределения времени пребывания в сети. В свою очередь данные процедуры опираются на декомпозицию и расчёт узлов вида  $M/H/n$ . Данная библиотека реализована на языке Fortran 90.

**8. Заключение.** Результаты, представленные в данной работе, позволяют получить оценки  $v_1, v_2, v_3$  без использования неустойчивой технологии численного дифференцирования. Рекомендуемые формулы расчётов приведены. Результаты счёта хорошо согласуются с результатами имитационного моделирования и с оценками, полученными с использованием численного дифференцирования.

Данный подход не связан с дисциплинами обслуживания в каждом узле. Информация о конкретной дисциплине обслуживания отражается на расчёте распределения времени пребывания в узле и не влияет на общую схему метода.

Также данный метод может быть обобщён на случай неоднородных заявок. Исходная пятёрка  $\langle M, \Lambda, B, n, R \rangle$ , определяющая однородную сеть, должна быть расширена до  $\langle M', K, \Lambda', B', n', R' \rangle$ , где

- $M'$  - число узлов в сети;
- $K$  - число типов заявок;
- $\Lambda$  - вектор размера  $K$ , интенсивность каждого типа заявок;
- $B'$  -  $K$  матриц, определяющих начальные моменты распределения времени обслуживания заявок заданного типа в узлах;
- $n'$  - количество каналов в каждом из узлов;
- $R'$  -  $K$  матриц, определяющих стационарные вероятности переходов между узлами для соответствующих типов заявок.

Распределение времени однократного пребывания в каждом из узлов считается отдельно для каждого типа заявок, но с учётом их совокупного занятия узла. Общее время пребывания в сети считается по формуле (2) независимо для каждого типа заявок.

Слабым местом обоснования метода является игнорирование зависимости распределений времени пребывания заявки в последовательно проходимых ею узлах. Учёт этой зависимости представляет собой труднорешаемую задачу. Однако можно предполагать, что чем больше размер матрицы передач и чем менее разрежена матрица  $R$ , тем менее проявляется эта зависимость.

Данную гипотезу планируется проверить в рамках специального исследования.

### Литература

1. *Matloff N.* Advanced Features of the SimPy Language // Advanced Features of the SimPy Language. - 2008.
2. *Демидович Б.П. and Марон И.А.* Основы вычислительной математики. - [s.l.] : Физматгиз, 1963. - с. 660.
3. *Рыжиков Ю.И.* Компьютерное моделирование систем с очередями. Курс лекций. - СПб : ВКА им. А. Ф. Можайского, 2007. - с. 125.
4. *Рыжиков Ю.И.* Машинные методы расчёта систем массового обслуживания. СПб: ВИКИ им А. Ф. Можайского, 1979. - с. 177.

**Сергей Владимирович Кокорин** — аспирант, СПИИРАН, лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании; автор 9 научных работ; научный интерес: теория очередей, численное и имитационное моделирование. E-mail: kokorins@yandex.ru. СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; +7 (812) 328-01-03. Научный руководитель - Б.В. Соколов.

**Sergey V. Kokorin** — Ph.d.-student. Professional Interests: numerical methods, queueing theory. E-mail: kokorins@yandex.ru. SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St.-Petersburg, 199178, Russia; office phone +7 (812) 328-01-03. Scientific advisor — B.V. Sokolov.

**Юрий Иванович Рыжиков** — д-р техн. наук, профессор; ведущий научный сотрудник, лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании СПИИРАН; автор более 260 научных работ. Научные интересы: имитационное и численные методы, теория очередей, теория управления запасами. СПИИРАН, лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании. E-mail: ryzhbox@yandex.ru СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; +7 (812) 328-01-03.

**Yuriy I. Ryzhikov** — Professor, Doctor of Technical Sciences. Honoured scientist of Russia. An author of over 230. Professional Interests: numerical methods, queueing theory, supply management theory. E-mail: ryzhbox@yandex.ru. SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St.-Petersburg, 199178, Russia; office phone +7 (812) 328-01-03.

**Поддержка исследований.** Представленная работа поддержана грантами 09-07-00066-а, 10-07-00311-а, 11-08-01016-а, 10-08-00906а, 12-07-13119-офи\_м\_РЖД.

Рекомендовано д.т.н., профессор Соколов Борис Владимирович.  
Статья поступила в редакцию 21.08.2012.

## РЕФЕРАТ

### *Кокорин С.В., Рыжиков Ю.И.* Сравнение аналитического и численного методов расчёта моментов распределения времени пребывания заявок в сетях массового обслуживания.

Оценка распределения времени пребывания заявок в сети является одной из основных временных характеристик производительности сети. В классическом подходе используется метод «потоко-эквивалентной декомпозиции» сети. Важным этапом такого метода является рекомбинация временных характеристик отдельных узлов в оценки моментов искомого общего распределения. Как правило, для решения задачи оценки моментов распределения времени пребывания заявок в сети предлагается приближённый численный подход, который требует интерполяции значений производных функции преобразования Лапласа-Стилтьеса в окрестности нуля в модели гамма-распределения.

В представленной статье проводится анализ применимости данного подхода и так же описан альтернативный вариант построения оценок, свободный от дополнительных параметров и предположений о структуре распределения. А также представлены формулы для аналитического расчёта начальных моментов распределения времени пребывания заявки в сети через производные преобразования Лапласа-Стилтьеса свёртки распределений времени пребывания заявок при однократном посещении узлов, сравниваются ограничения, области применимости и точность оценок каждого метода, и рассматривается чувствительность метода численного дифференцирования к выбору вспомогательных параметров. Как результат, разработаны критерии предпочтения выбора одного из подходов в зависимости от класса и параметров конкретной сети.

Проведённое в рамках исследования компьютерное моделирование позволяет говорить о согласии результатов рассмотренных методов для различных классов сетей массового обслуживания как между собой, так и в сравнении с аналогичными имитационными моделями. Следовательно, несмотря на некоторые ограничения, предложенный аналитический подход является более предпочтительным с точки зрения скорости вычислений по сравнению с имитационным моделированием, а отсутствие дополнительных параметров позволяет получить устойчивый результат на более широком классе моделей теории массового обслуживания по сравнению с общепринятым подходом.

## SUMMARY

*Kokorin S.V., Ryzhikov Ju.I.* **Comparison of analytical and numerical methods for calculation of sojourn time distribution's moments in a queuing networks.**

An estimation of an order sojourn time distribution in a network is one of the principal temporal characteristics of the network performance. The classical approach uses a method of a «flow-equivalent decomposition» of the network. An important step of the method is the recombination of the temporal characteristics of individual nodes to an estimation of the initial moments of a distribution. As a rule, to solve the problem of the order sojourn time distribution moments estimating on the network is proposed as an approximate numerical approach, which requires interpolation of the derivatives of the Laplace-Stieltjes transform in a neighborhood of zero in the model of the gamma-distribution.

In the paper the analysis of the approach applicability is reviewed, an alternative for estimates constructing is described as independent of additional parameters and assumptions about the distribution. An analytical formula for calculating of the initial moments of orders on the network sojourn time distribution is also presented in terms of the Laplace-Stieltjes transformation derivatives of a single visit sites orders' sojourn time convolution, compared to the limitations of applicability and accuracy of estimates of each method and the sensitivity of the numerical differentiation method to the choice of auxiliary parameters is discussed. As a result, the criteria for choosing one of the approaches depending on the class and the parameters of the network has been developed.

Computer modeling held in the frames of the study allows to accept the methods results considered for the various queuing networks classes, both between themselves and in comparison to similar simulations. Consequently, despite some limitations, the proposed analytical approach is preferable in terms of computation speed compared with simulations, and the absence of additional parameters allows to obtain a stable result for a wider class of queuing theory models compared with the conventional approach.