

А.М. ЖУКОВА

**НАБОРЫ ВПИСАННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ
ТИПИЧНЫХ ШАРНИРНЫХ ПЯТИУГОЛЬНИКОВ**

Жукова А.М. Наборы вписанных конфигураций типичных шарнирных пятиугольников.

Аннотация. Равновесные положения плоского полигонального шарнирного механизма суть его вписанные конфигурации. Мы описываем все возможные наборы вписанных конфигураций типичного шарнирного пятиугольника.

Ключевые слова: шарнирный многоугольник, равновесное положение, ориентированная площадь, конфигурационное пространство, индекс Морса.

Zhukova A.M. Sets of cyclic configurations of a pentagonal linkage.

Abstract. Equilibrium shapes of a planar polygonal linkage are cyclic configurations. We describe all possible sets of cyclic configurations for pentagonal linkages.

Keywords: polygonal linkage, equilibrium shape, configuration space, signed area, Morse index.

1. Введение. *Шарнирным многоугольником* называется набор из n жестких стержней, соединенных по циклу шарнирами. Эта конструкция находится в плоскости и может изгибаться в местах соединений, возможно, пересекая саму себя.

Шарнирный многоугольник допускает различные плоские формы, совокупность которых есть *конфигурационное пространство шарнирного многоугольника*.

Мы изучаем конфигурационные пространства шарнирных многоугольников с помощью теории Морса.

Для всех конфигураций многоугольника задается некоторая функция энергии и изучаются изгибания многоугольника в соответствующем силовом поле на конфигурационном пространстве. Мы рассматриваем шарнирный многоугольник как плоский контейнер, наполненный газом. Газ создает давление на ребра многоугольника согласно закону Паскаля. Совокупность сил, приложенных к ребрам шарнирника, порождает некоторое изгибание многоугольника, который в итоге стабилизируется в положении равновесия. В процессе изгибания шарнирный многоугольник стремится к конфигурациям с большей площадью, то есть, его движения описываются градиентным потоком функции площади.

Положение равновесия может оказаться как устойчивым (после малого шевеления градиентный поток возвращает многоугольник в то же положение), так и неустойчивым (после малого шевеления

градиентный поток перемещает многоугольник в некоторое другое положение равновесия). Индекс Морса положения равновесия (т.е. размерность пространства малых шевелений, после которых шарнирный многоугольник возвращается в то же самое положение равновесия) можно рассматривать как некоторую меру устойчивости положения равновесия.

Следует отметить, однако, что в нашем случае для конфигурации с самопересечениями физическая интерпретация несколько отличается (и в некотором смысле, она контринтуитивна): давление газа в разных областях, ограниченных конфигурацией, пропорционально индексу обхода. Так, например, в центральной части "звезды" (см., например, вторую конфигурацию на рис. 9) давление в два раза больше, чем в лучевых областях той же звезды.

Следующие определения формализуют описанные объекты:

Определение 1. Шарнирным многоугольником называется набор из n положительных вещественных чисел l_1, l_2, \dots, l_n , реализуемых в виде сторон некоторого многоугольника.

Определение 2. Конфигурацией шарнирного многоугольника называется набор из n точек на плоскости $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, таких, что $|p_i, p_{i+1}| = l_i$. При этом первые две точки зафиксированы: $p_1 = (0, 0)$ и $p_2 = (l_1, 0)$. Нумерация считается циклической, то есть, например, $p_0 = p_n$, $p_{n+1} = p_1$.

Совокупность конфигураций с зафиксированными вершинами p_1 и p_2 есть *конфигурационное пространство* $\mathcal{M}(L)$ шарнирного многоугольника (оно может быть рассмотрено как некоторое подмножество евклидова пространства \mathbb{R}^{2n-4}). В общем случае конфигурационное пространство является гладким многообразием, размерность которого равна $n - 3$.

Определение 3. Для данной конфигурации $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ шарнирного многоугольника L , где $p_i = (x_i, y_i)$, ее *ориентированная площадь* определяется следующим образом:

$$2A(P) = (x_1y_2 - x_2y_1) + \dots + (x_ny_1 - x_1y_n).$$

Конфигурация P называется *вписанной*, если все ее вершины лежат на одной окружности.

Теорема, доказанная Я. Штейнером (см., например, в [4]) гласит, что функция A достигает максимального значения в выпуклой

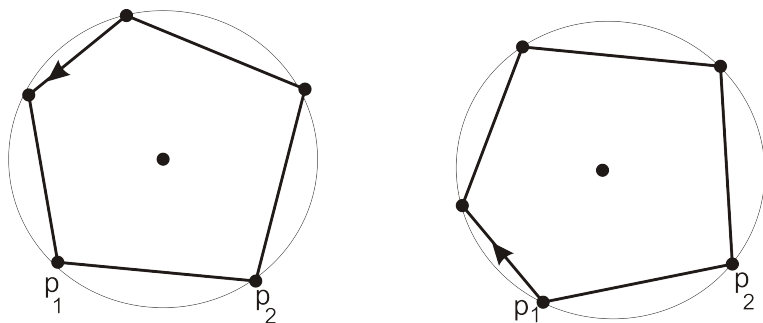


Рис. 1: Глобальные максимум и минимум функции A .

положительно ориентированной (то есть ориентированной против часовой стрелки) вписанной конфигурации шарнирного многоугольника L . Следовательно, A достигает минимума в *антivyпуклой* (выпуклой отрицательно ориентированной) вписанной конфигурации шарнирного многоугольника L . Антivyпуклая конфигурация симметрична выпуклой относительно прямой (p_1, p_2) (см. рис. 1).

Следующая теорема связывает функцию A и вписанные многоугольники:

Теорема 1. [2] *Критические точки функции площади плоского полигонального шарнирного многоугольника суть вписанные конфигурации.*

Приведем пример, который будет использован в дальнейшем.

Пример 1. *Конфигурационное пространство типичного четырехугольника одномерно. На нем встречаются только два типа критических точек — локальные максимумы и минимумы. Существует два вида типичных четырехзвенных полигональных шарнирных многоугольников:*

1. *Сумма длин наибольшей и наименьшей стороны шарнирного многоугольника меньше суммы длин двух оставшихся сторон. В этом случае конфигурационное пространство $M(L)$ несвязно. Оно гомеоморфно паре окружностей, и на нем существуют четыре критические точки. Они приведены на рис. 2 слева вместе с их индексами Морса.*

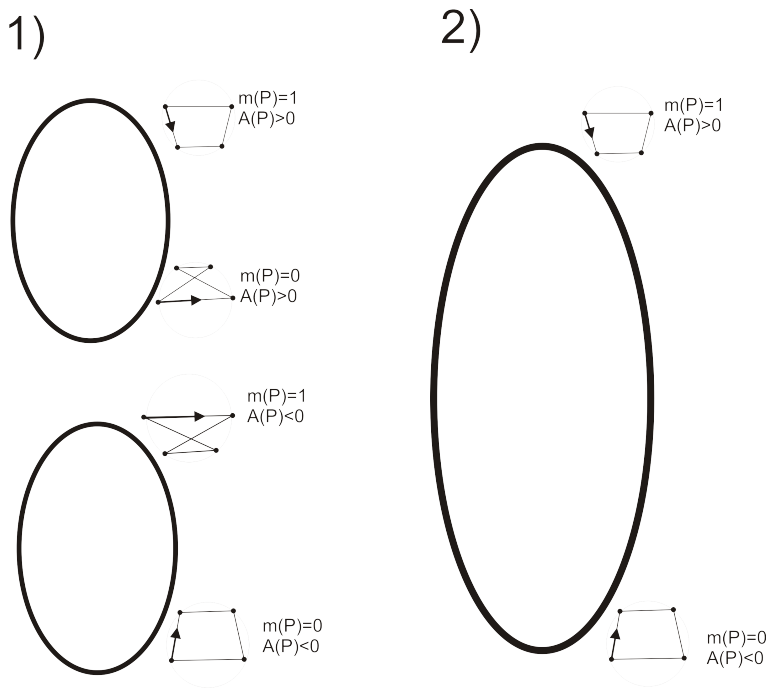


Рис. 2: Два типа конфигурационных пространств четырехзвенных шарнирных многоугольников вместе с критическими точками.

2. Сумма длин наибольшей и наименьшей стороны шарнирного многоугольника больше суммы длин двух оставшихся сторон. В этом случае конфигурационное пространство $\mathcal{M}(L)$ связно. Оно гомеоморфно окружности, и на нем существуют две критические точки (см. рис. 2, справа).

Цель настоящей работы состоит в классификации всех возможных наборов вписанных конфигураций шарнирных пятиугольников.

2. Шарнирные пятиугольники и основная теорема. В данной статье рассматриваются только шарнирные пятиугольники. Результаты сформулированы для *типичного* шарнирного пятиугольника. Это означает, что выполнен следующий набор усло-

вий:

1. Конфигурационное пространство гладко. Условие негладкости описывается ненулевыми линейными уравнениями в пространстве параметров \mathbb{R}_+^n (см. [1]).
2. Ни одна из вписанных конфигураций не является центральной.
3. Критические точки невырождены. Условие наличия вырожденной критической точки описывается ненулевым аналитическим уравнением в пространстве параметров \mathbb{R}_+^n , которое можно получить из [3], теорема 3.1.
4. Ни для какой вписанной конфигурации P не выполняется $\delta(P) = 0$. Условие $\delta(P) = 0$ описывается конечной системой ненулевых аналитических уравнений в пространстве параметров \mathbb{R}_+^n . В [3] в предложении 4.1 доказывается, что они определяют замкнутое множество с пустой внутренностью.
5. Ни в одной вписанной конфигурации нет совпадающих вершин.
6. Все вышеуказанные свойства 1–5 выполняются для шарнирных многоугольников, порожденных подконфигурациями всех вписанных конфигураций шарнирного многоугольника L .

Каждое из этих условий "выкидывает" из множества всех шарнирных пятиугольников замкнутое множество с пустой внутренностью. Условий конечное количество, следовательно, все вместе они также "выкидывают" замкнутое множество с пустой внутренностью. Таким образом, определенное нами множество "типичных" шарнирных пятиугольников открыто и всюду плотно в множестве всех шарнирных пятиугольников.

Мы будем пользоваться следующими фактами:

1. Конфигурационное пространство типичного шарнирного пятиугольника — ориентируемая поверхность. Ее род определяется линейными соотношениями между длинами сторон следующим образом (см. [6]). Мы покажем в начале §3, что достаточно ограничиться только шарнирными пятиугольниками, ребра которых упорядочены по убыванию: $a \geq b \geq c \geq$

$d \geq e \geq d$. Пространство всех таких шарнирных пятиугольников — область в четырехмерном пространстве R^4 , ограниченная гиперплоскостями $b + c + d + e = a$, $b = a$, $c = b$, $d = c$, $e = d$, $d = 0$. Эта область разрезана на камеры гиперплоскостями $a + b - c - d - e = 0$, $a - b - c + d + e = 0$, $a - b - c - d + e = 0$, $a - b - c + d - e = 0$ и $a - b + c - d - e = 0$. Внутри каждой камеры все шарнирные многоугольники имеют один и тот же топологический тип конфигурационного пространства. Ниже приводится список всех типов конфигурационных пространств шарнирных многоугольников и неравенства, задающие соответствующую камеру внутри рассматриваемой области.

- (а) конфигурационное пространство — сфера
 $a - b - c - d + e > 0$.
- (б) конфигурационное пространство — тор
 $a - b - c - d + e < 0$ и
 $a - b - c + d - e > 0$.
- (с) конфигурационное пространство — поверхность рода два
 $a - b - c + d + e > 0$,
 $a - b - c + d - e < 0$ и
 $a - b + c - d - e > 0$.
- (d) конфигурационное пространство — пара торов
 $a - b - c + d + e < 0$.
- (е) конфигурационное пространство — поверхность рода три
 $a + b - c - d - e > 0$ и
 $a - b + c - d - e < 0$.
- (f) конфигурационное пространство — поверхность рода четыре
 $a + b - c - d - e < 0$.

2. Теорема Д. Роббинса–В. Варфоломеева дает некоторую оценку сверху для количества вписанных конфигураций шарнирного многоугольника (см., например, [5]). В частности, у пятизвенного шарнирного многоугольника может быть не более четырнадцати вписанных конфигураций (с учетом ориентации).

3. Поскольку конфигурационное пространство шарнирного пятиугольника — двумерная поверхность, критические точки на нем бывают трех типов: локальные максимумы (индекс Морса равен 2, устойчивые равновесные конфигурации), локальные минимумы (индекс Морса равен 0, неустойчивые равновесные конфигурации) и седловые точки (индекс Морса равен 1, неустойчивые равновесные конфигурации).
4. На конфигурационном пространстве шарнирного многоугольника существует непрерывная инволюция γ , переводящая конфигурацию в симметричную ей относительно прямой (p_1p_2) . Эта инволюция переводит вписанные конфигурации во вписанные, причем $A(\gamma(P)) = -A(P)$, а поскольку размерность пространства равна двум, имеем $m(\gamma(P)) = 2 - m(P)$. То есть, эта инволюция переводит локальные максимумы в локальные минимумы, а седловые точки — в седловые. Таким образом, количество локальных максимумов c_2 на конфигурационном пространстве равно количеству локальных минимумов c_0 , а количество седловых точек c_1 четно.
5. Из теории Морса известно, что общее число критических точек на двумерной поверхности рода g не может быть менее $2g + 2$. Кроме того, нам понадобится равенство Морса: $c_0 - c_1 + c_2 = 2 - 2g$.

Таким образом, на конфигурационном пространстве шарнирного многоугольника может быть не менее $2g + 2$, где g — род конфигурационного пространства, и не более четырнадцати критических точек. Кроме того, из равенства Морса следует, что $c_0 + c_1 + c_2 = 2 - 2g + 2c_1$, и, поскольку c_1 — четное число, общее количество критических точек сравнимо с $2g - 2$ по модулю четыре.

Основной результат этой статьи — классификация всех возможных наборов критических точек типичного шарнирного пятиугольника, приведенная в теореме. Мы докажем, что у типичных шарнирных пятиугольников никакие другие наборы критических точек, кроме указанных в ней, не встречаются. Однако не удалось доказать существование двух типов шарнирных многоугольников из приведенных в теореме: имеющих четырнадцать критических точек на поверхности рода два и двенадцать критических точек на

паре торов. Основная трудность доказательства их существования состоит в том, что, как отмечено еще в статье В.Варфоломеева [7], количество критических точек на конфигурационном пространстве очень чувствительно к изменению длин шарнирного многоугольника. К остальным типам конфигурационных пространств были найдены примеры шарнирных пятиугольников, их реализующие. Все они приведены ниже вместе с их вписанными конфигурациями.

Теорема 2. Пусть L — типичный шарнирный пятиугольник (a, b, c, d, e) , причем его ребра упорядочены по длине: $a \geq b \geq c \geq d \geq e$.

1. Пусть $a - b - c - d + e > 0$. Тогда конфигурационное пространство P — сфера, и на нем есть ровно две критические точки функции A : один максимум (выпуклая конфигурация), один минимум (антivyпуклая конфигурация), см. рис. 3.1;
2. Пусть $a - b - c - d + e < 0$ и $a - b - c + d - e > 0$. Тогда конфигурационное пространство P — тор, и на нем есть ровно четыре критические точки функции A : один максимум (выпуклая конфигурация), один минимум (антivyпуклая конфигурация), две седловые точки, см. рис. 3.2;
3. Пусть $a - b - c + d + e > 0$, $a - b - c + d - e < 0$ и $a - b + c - d - e > 0$. Тогда конфигурационное пространство P — поверхность рода два, и на нем есть не более четырнадцать критических точек. Остается открытым вопрос о существовании шарнирного многоугольника этого типа с ровно четырнадцатью вписанными конфигурациями. Возможны следующие варианты:
 - Шесть критических точек функции A : один максимум (выпуклая конфигурация), один минимум (антivyпуклая конфигурация), четыре седловые точки, см. рис. 4;
 - Десять критических точек функции A : два максимума (выпуклая и самопересекающаяся конфигурация), два минимума (антivyпуклая и самопересекающаяся конфигурация), шесть седловых точек, см. рис. 5;
 - Четырнадцать критических точек функции A : три максимума (выпуклая и две самопересекающиеся кон-

фигурации), три минимума (антивывуклая и две самопересекающиеся конфигурации), восемь седловых точек.

4. Пусть $a - b - c + d + e < 0$. Тогда конфигурационное пространство P — пара торов, и на нем может быть не более двенадцати критических точек. Остается открытым вопрос о существовании шарнирного многоугольника этого типа с ровно двенадцатью вписанными конфигурациями. Возможны следующие варианты:

- Восемь критических точек функции A : два максимума (выпуклая и самопересекающаяся конфигурации), два минимума (антивывуклая и самопересекающаяся конфигурации), четыре седловые точки, см. рис. 6;
- Двенадцать критических точек функции A : три максимума (выпуклая и две самопересекающиеся конфигурации), три минимума (выпуклая и две самопересекающиеся конфигурации), шесть седловых точек.

5. Пусть $a + b - c - d - e > 0$ и $a - b + c - d - e < 0$. Тогда конфигурационное пространство P — поверхность рода три, и на нем может быть не более двенадцати критических точек. Возможны следующие варианты:

- Восемь критических точек функции A : один максимум (выпуклая конфигурация), один минимум (антивывуклая конфигурация), шесть седловых точек, см. рис. 7;
- Двенадцать критических точек функции A : два максимума (выпуклая и самопересекающиеся конфигурации), два минимума (антивывуклая и самопересекающаяся конфигурации), восемь седловых точек, см. рис. 8.

6. Пусть $a + b - c - d - e < 0$. Тогда конфигурационное пространство P — поверхность рода четыре, и на нем может быть не более четырнадцати критических точек. Возможны следующие варианты:

- Десять критических точек функции A : один максимум (выпуклая конфигурация), один минимум (антивывуклая конфигурация), восемь седловых точек, см. рис. 9;

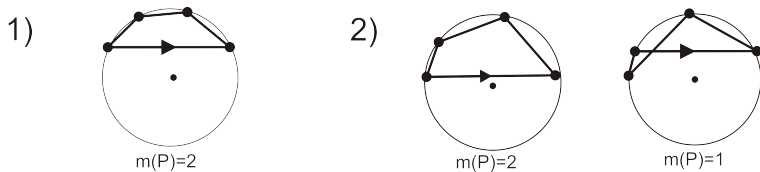


Рис. 3: Вписанные конфигурации шарнирного пятиугольника $(1;0.26;0.25;0.25;0.25)$ (конфигурационное пространство — сфера) и шарнирного многоугольника $(1;0.35;0.35;0.35;0.01)$ (конфигурационное пространство — тор).

- *Четырнадцать критических точек функции A : два максимума (выпуклая и звездообразная конфигурации), два минимума (антывыпуклая и звездообразная конфигурации), десять седловых точек, см. рис. 10.*

Ниже мы приводим найденные примеры пятиугольников. На рис. 3–10 изображены их критические конфигурации. Вписанные конфигурации изображены масштабированно — в действительности радиусы их описанных окружностей различны. Каждая изображенная конфигурация встречается на соответствующем конфигурационном пространстве в паре с конфигурацией, симметричной ей относительно прямой (p_1p_2) . Под каждой конфигурацией указан ее индекс Морса. Индекс конфигурации, симметричной ей, вычисляется по формуле $m(\gamma(P)) = 2 - m(P)$. Стрелкой отмечено ребро p_1p_2 .

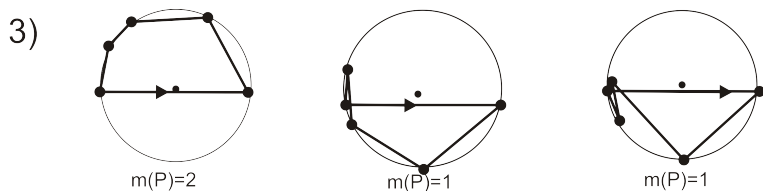


Рис. 4: Вписанные конфигурации шарнирного пятиугольника (1; 0.9; 0.9; 0.45; 0.4) (конфигурационное пространство — поверхность рода два).

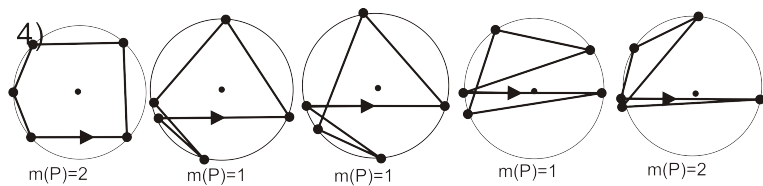


Рис. 5: Вписанные конфигурации шарнирного пятиугольника (1; 0.98; 0.98; 0.499; 0.499) (конфигурационное пространство — поверхность рода два).

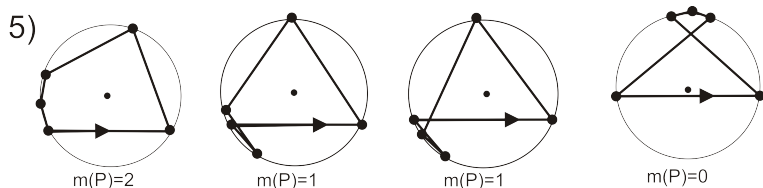


Рис. 6: Вписанные конфигурации шарнирного пятиугольника (1; 1; 1; 0.1; 0.07) (конфигурационное пространство — пара торов).

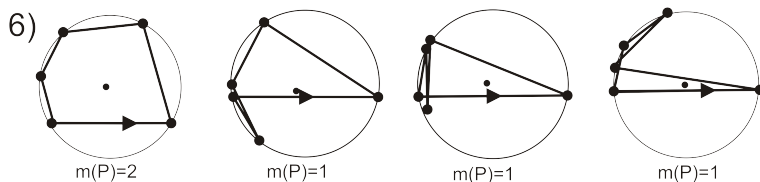


Рис. 7: Вписанные конфигурации шарнирного пятиугольника $(1;0.98;0.5;0.5;0.5)$ (конфигурационное пространство — поверхность рода три).

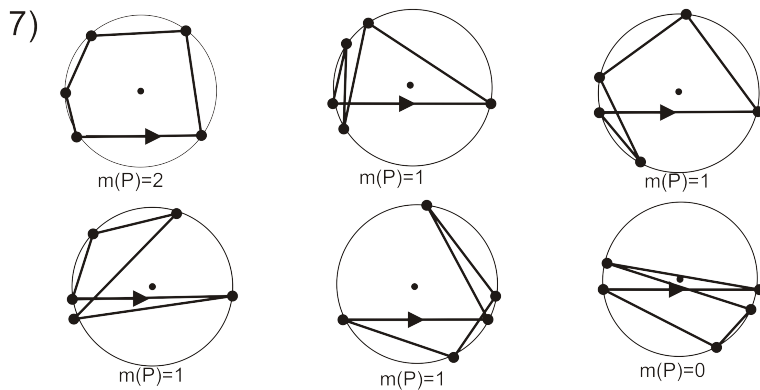


Рис. 8: Вписанные конфигурации шарнирного пятиугольника $(1;0.98;0.97;0.5;0.5)$ (конфигурационное пространство — поверхность рода три).

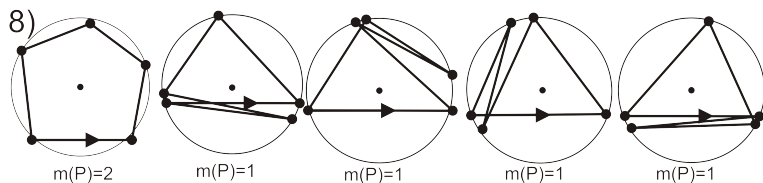


Рис. 9: Вписанные конфигурации шарнирного пятиугольника $(1;1;0.8;0.8;0.8)$ (конфигурационное пространство — поверхность рода четыре).

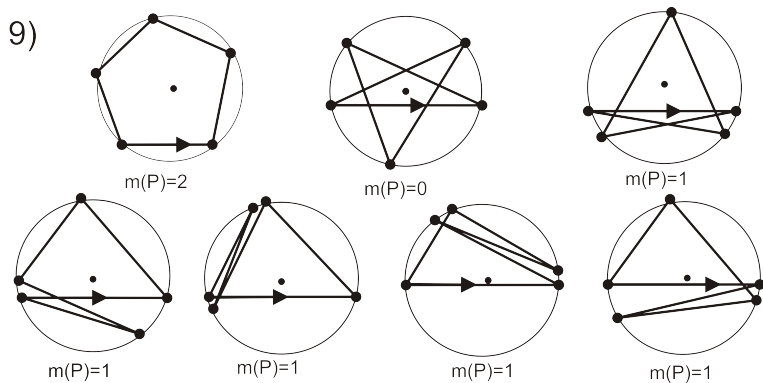


Рис. 10: Вписанные конфигурации шарнирного пятиугольника $(1;0.9;0.8;0.8;0.7)$ (конфигурационное пространство — поверхность рода четыре).

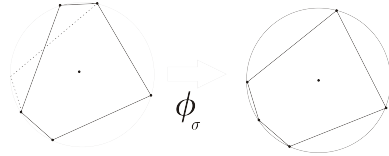


Рис. 11: P и P' отличаются на перестановку.

3. Доказательство основной теоремы. Прежде всего докажем, что нам достаточно рассматривать только шарнирные пятиугольники с упорядоченными по длине ребрами.

Пусть два шарнирных многоугольника L_1 и L_2 отличаются на перестановку, то есть, $L_1 = \sigma L_2$, где σ — элемент симметрической группы S_n . Существует естественная биекция φ_σ между вписанными конфигурациями у L_1 и L_2 . Она устроена следующим образом. Пусть дана вписанная конфигурация P шарнирного многоугольника L и некоторая перестановка $\sigma \in S_n$. Чтобы получить $\varphi_\sigma(P)$, возьмем окружность того же радиуса, что у P , и будем "выкладывать" на ней ребра L в нужном порядке и с той же ориентацией, что они имеют в P . Поскольку центральные углы α_i равны соответствующим углам в P , у нас получится замкнутая вписанная ломаная. Это и будет $\varphi_\sigma(P)$ (в качестве примера см. рис. 11).

Утверждение 1. [3] *Биекция φ_σ сохраняет индекс Морса, значение функции A , радиус r и количество положительно ориентированных ребер e .*

Нам понадобится следующее утверждение:

Утверждение 2. *Пусть L — типичный шарнирный пятиугольник. Номер камеры, которой принадлежит L и число локальных максимумов функции A на $\mathcal{M}(L)$ однозначно определяют число всех локальных минимумов и седловых критических точек функции A на $\mathcal{M}(L)$.*

Доказательство.

В самом деле, пусть конфигурационное пространство шарнирного пятиугольника является двумерной поверхностью с числами Бетти β_0 , β_1 и β_2 , и пусть на нем есть c_2 локальных максимумов функции A . Тогда на этом конфигурационном пространстве существует ровно $c_0 = c_2$ локальных минимумов функции A (зер-

кальных отражений максимумов), а количество седловых точек c_1 вычисляется из равенства Морса:

$$c_0 - c_1 + c_2 = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2.$$

Утверждение доказано.

Также заметим, что, поскольку общее количество критических точек не превосходит четырнадцати, имеем

$$4c_2 - \beta_0 + \beta_1 - \beta_2 \leq 14,$$

то есть,

$$c_2 \leq \frac{14 + \beta_0 - \beta_1 + \beta_2}{4}.$$

Таким образом, количество локальных максимумов для каждого из топологических типов конфигурационного пространства не превосходит следующих значений:

| | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|---|---|
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| β_0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| β_1 | 0 | 2 | 4 | 4 | 6 | 8 |
| β_2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| $\max c_2$ | 4 | 3 | 3 | 4 | 2 | 2 |

Кроме того, заметим, что на конфигурационном пространстве типа 4 — паре торов — должно быть хотя бы два локальных максимума (по одному на каждом торе).

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся несколько новых обозначений. Пусть P — вписанная конфигурация шарнирного пятиугольника L . Тогда обозначим:

O — центр описанной около P окружности.

α_i — половина угла между $\overrightarrow{Op_i}$ и $\overrightarrow{Op_{i+1}}$. Угол всегда определяется как положительный, не учитывая ориентации.

Вписанную конфигурацию P назовем *центральной*, если одно из ее ребер проходит через O . Для нецентральной конфигурации обозначим через ε_i ориентацию ребра $(p_i p_{i+1})$ относительно точки O , то есть,

- $\varepsilon_i = 1$, если треугольник (p_i, p_{i+1}, O) ориентирован положительно;

- $\varepsilon_i = -1$, если треугольник (p_i, p_{i+1}, O) ориентирован отрицательно.

Если $\varepsilon_i = 1$, будем говорить, что ребро (p_i, p_{i+1}) *ориентировано положительно*, если же $\varepsilon_i = -1$, будем говорить, что ребро (p_i, p_{i+1}) *ориентировано отрицательно*.

Также для нецентральной вписанной конфигурации P , положим

$$\delta(P) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Пусть дано некоторое подмножество вершин M конфигурации P . Соединим эти вершины отрезками по циклу в порядке, соответствующем их нумерации в P . Получившуюся конфигурацию некоторого шарнирного многоугольника будем называть *подконфигурацией* конфигурации P , соответствующей подмножеству вершин M .

Пусть дан шарнирный многоугольник L . Его *изгибанием* назовем гладкое отображение интервала вещественной прямой в конфигурационное пространство $\mathcal{M}(L)$.

Следующая теорема, доказанная в [8], дает описание всех возможных точек локального максимума функции A :

Теорема 3. [8] Пусть P — вписанная конфигурация типичного шарнирного многоугольника. Мы считаем, что для конфигурации P верно $\varepsilon_i = 1$ при $1 \leq i \leq e(P)$. Если же это не так, применим к P подходящую перестановку ребер φ_σ (см. утверждение 1), так, чтобы в $\varphi_\sigma(P)$ указанное условие выполнялось. Тогда P является точкой локального максимума функции ориентированной площади A тогда и только тогда, когда она является конфигурацией одного из следующих четырех типов:

1. P — выпуклая конфигурация (Рис. 12.1).
2. P состоит только из отрицательно ориентированных ребер, и при этом каждые два ребра пересекаются (Рис. 6.2).
3. Одновременно выполнены три условия (Рис. 12.3):
 - каждые два отрицательно ориентированных ребра пересекаются;

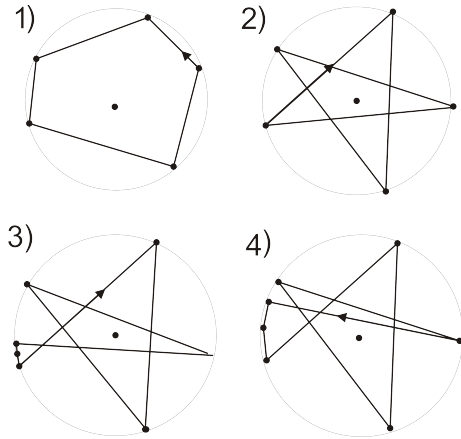


Рис. 12: Максимумы функции A .

- положительно ориентированные ребра не пересекают друг друга;
- ни одно положительно ориентированное ребро не пересекает отрицательно ориентированное ребро.

4. Одновременно выполнены четыре условия (Рис. 12.4):

- $\delta(P) > 0$;
- любые два отрицательно ориентированных ребра пересекают друг друга;
- положительно ориентированные ребра не пересекают друг друга;
- ровно одно положительно ориентированное ребро пересекает отрицательно ориентированные ребра.

Также нам понадобится следующее утверждение:

Утверждение 3. Пусть вписанная конфигурация P шарнирного многоугольника L является точкой локально максимума функции A . Пусть для некоторых i и j ребро l_j ориентировано положительно, а ребро l_i — отрицательно (т. е. $\varepsilon_i < 0$, $\varepsilon_j > 0$),

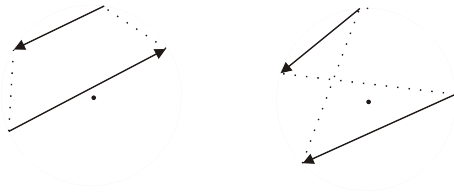


Рис. 13: Не пересекающиеся длинное отрицательно ориентированное и короткое положительно ориентированное ребра формируют подконфигурацию–минимум.

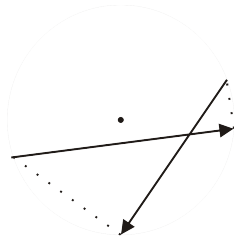


Рис. 14: Пересекающиеся короткое отрицательно ориентированное и длинное положительно ориентированное ребра формируют подконфигурацию–минимум.

и эти ребра не являются соседними, то есть $|i - j| > 1$. В таком случае ребра l_i и l_j пересекаются тогда и только тогда, когда $l_i > l_j$.

Доказательство. Будем доказывать от противного.

1. Пусть конфигурация P — максимум, $\varepsilon_i < 0$, $\varepsilon_j > 0$, ребра (p_i, p_{i+1}) и (p_j, p_{j+1}) не пересекаются, и $l_i > l_j$. Рассмотрим четырехзвенную подконфигурацию $Q = (p_i, p_{i+1}, p_j, p_{j+1})$. Она может быть либо антивывуклой конфигурацией, либо самопересекающейся конфигурацией с положительной площадью (см. рис. 13). Обе эти конфигурации являются локальными минимумами (см. пример 1). Будем изгибать P так, чтобы подконфигурации $(p_1, p_2, \dots, p_i, p_{j+1}, \dots, p_n)$ и $(p_{i+1}, p_{j+2}, \dots, p_l)$ двигались как единые жесткие конструкции. Такое изгибание $P(t)$ изменяет площадь конфигурации P следующим образом:

$$A(P(t)) = A(Q(t)) + const,$$

где $Q(t)$ — некоторое изгибание конфигурации Q . Поскольку Q является локальным минимумом, то любое ее изгибание увеличивает ее площадь. Таким образом, существует изгибание, увеличивающее площадь P , и, следовательно, P не является максимумом.

2. Пусть конфигурация P — максимум, $\varepsilon_i < 0$, $\varepsilon_j > 0$, ребра (p_i, p_{i+1}) и (p_j, p_{j+1}) пересекаются и $l_i < l_j$. Рассмотрим четырехзвенную подконфигурацию $Q = (p_i, p_{i+1}, p_j, p_{j+1})$. Она является самопересекающейся конфигурацией с положительной площадью (см. рис. 14). Эта конфигурация — локальный минимум (см. пример 1), и любое ее изгибание увеличивает ее площадь. Снова, будем изгибать конфигурацию P , зафиксировав подконфигурации $(p_1, p_2, \dots, p_i, p_{j+1}, \dots, p_n)$ и $(p_{i+1}, p_{j+2}, \dots, p_l)$. По тем же причинам мы получим изгибание, увеличивающее площадь P , и, следовательно, P не является максимумом.

Утверждение доказано.

Из утверждения следует, что если P — вписанная конфигурация, являющаяся максимумом типа 4, то положительно ориентированное ребро, пересекающее все отрицательно ориентированные

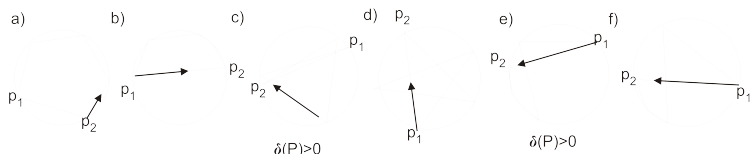


Рис. 15: Максимумы функции A у пятиугольников.

ребра, — самое длинное ребро шарнирного многоугольника. В самом деле, оно длиннее любого пересекающего его отрицательно ориентированного ребра, а это все ребра, кроме соседних с ним. Доказать, что оно также длиннее соседних с ним ребер, можно, переставив местами ребра в многоугольнике (см. утверждение 1). В то же время все остальные положительно ориентированные ребра короче любого отрицательно ориентированного ребра конфигурации.

Из всего вышесказанного следует, что существует всего 6 комбинаторных типов локальных максимумов шарнирного пятиугольника. Все они приведены на рис. 15. Типы a и b — выпуклые конфигурации. Они являются абсолютными максимумами ориентированной площади, и ровно одна из них существует у каждого шарнирного пятиугольника. Остальные четыре типа являются локальными максимумами.

Утверждение 4. *Локальные максимумы типа e и f не встречаются у шарнирных пятиугольников типа 1 и 2.*

Доказательство. Докажем, что если у шарнирного пятиугольника (a, b, c, d, e) существует вписанная конфигурация типа e или f , то у шарнирного четырехугольника (a, b, c, d) существует вписанная самопересекающаяся конфигурация.

Пусть дана конфигурация типа f . "Разрежем" ее в вершине p_1 и начнем увеличивать радиус окружности, в которую вписана конфигурация, оставляя вершины на ней и сохраняя длины ребер. В какой-то момент радиус окружности станет равным радиусу окружности, описанной около треугольника со сторонами (a, b, c) . В этот момент вершины p_1 и p_4 совпадут. До этого найдется мо-

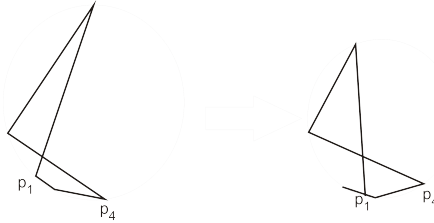


Рис. 16: Радиус окружности изменяется, в то время как вершины остаются на ней.) (конфигурационное пространство — поверхность рода четыре)

мент, в который совпали вершины p_1 и p_5 .

Теперь пусть дана конфигурация типа e . "Разрежем" ее в вершине p_1 и начнем уменьшать радиус окружности, в которую вписана конфигурация, оставляя вершины на ней (см. рис 16). Это можно делать, пока диаметр окружности не меньше длины максимального ребра. Если до этого вершины p_1 и p_5 ни разу не совпали, то после того, как диаметр окружности стал равен a , а ребро a стало диаметром, начнем увеличивать радиус окружности, оставляя вершины на ней таким образом, чтобы ребро a стало положительно ориентированным. Снова, рано или поздно вершины p_1 и p_4 совпадут, а значит, до этого в какой-то момент совпали вершины p_1 и p_5 .

Таким образом, в обоих случаях мы получили вписанную самопересекающуюся конфигурацию шарнирного четырехугольника (a, b, c, d) . Она может существовать лишь когда $a + d < b + c$ (см. пример 1). Это неравенство несовместимо с неравенством $a - b - c + d - e > 0$, которое выполняется для шарнирных многоугольников типа 1 и 2.

Утверждение доказано.

Утверждение 5. *Локальные максимумы типа c и d не могут быть у шарнирных пятиугольников типа 1, 2, 3 и 4.*

Доказательство. Заметим, что поскольку в конфигурациях типа c и d ребро a стягивает меньшую дугу, чем сумма дуг, стягиваемых ребрами e и d , то для них верно $a < e + d$. Это неравенство

несовместимо с неравенством $a - b + c - d - e > 0$, которое верно для шарнирных многоугольников типа 1, 2, 3 и 4.

Утверждение доказано.

Таким образом, у шарнирных многоугольников типа 1 и 2 нет максимумов ориентированной площади, кроме глобальных.

Объединим все вышесказанное в таблицу, где по горизонтали перечислены все типы шарнирных пятиугольников, по вертикали — типы локальных максимумов их площади, а в ячейках указана возможность наличия максимума данного типа у соответствующего многоугольника:

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------------|---|---|---|---|---|---|
| a или b | + | + | + | + | + | + |
| c | – | – | – | – | + | + |
| d | – | – | – | – | + | + |
| e | – | – | + | + | – | – |
| f | – | – | + | + | – | – |

Эта таблица вкупе с информацией о максимальном возможном количестве локальных максимумов на конфигурационном пространстве каждого типа дает теорему 1.

4. Заключение. Работа посвящена классификации возможных наборов вписанных конфигураций шарнирных пятиугольников. Для этого использованы результат В.В. Варфоломеева о топологической классификации конфигурационных пространств типичных шарнирных пятиугольников, теорема Д. Роббинса–В. Варфоломеева дающая оценку сверху для количества вписанных конфигураций шарнирного многоугольника, а также результаты автора, связанные со свойствами функции ориентированной площади, критическими точками которой являются вписанные конфигурации шарнирных многоугольников.

В теореме 1 приведена полученная классификация возможных наборов вписанных конфигураций шарнирных пятиугольников. Эта классификация включает в себя одиннадцать типов шарнирных пятиугольников. К девяти из этих типов на рис. 3-10 приведены примеры шарнирных пятиугольников, их реализующие. Однако из-за чувствительности вписанных конфигураций к изменениям длин сторон пятиугольников для двух типов шарнирных пятиугольников — имеющего четырнадцать вписанных конфигураций

и поверхность рода два в качестве конфигурационного пространства и имеющего двенадцать критических точек и пару торов в качестве конфигурационного пространства — не удалось ни найти примеры, ни даже доказать их существование.

Таким образом, существование шарнирных пятиугольников этих двух типов остается открытым вопросом.

Литература

1. *Farber M., Schütz D.* Homology of planar polygon spaces // *Geom. Dedicata*, V. 125, 2007, № 18, P. 75–92.
2. *Khimshashvili G., Panina G.*, Cyclic polygons are critical points of area // *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, V. 360, 2008, № 8, P. 238–245.
3. *Panina G., Zhukova A.* Morse index of a cyclic polygon, *Cent. Eur. J. Math.*, V. 9, 2011, № 2, P. 364–377.
4. *Polya G.*, *Mathematics of Plausible Reasoning, Volume I: Induction and Analogy in Mathematics* // Princeton U. Press., 296 pg.
5. *Robbins D.*, Areas of polygons inscribed in a circle // *Discrete Comput. Geom.*, V. 12, 1994, № 14, P. 223–236.
6. *Zvonkine D.*, Configuration spaces of hinge constructions // *Russian J. of Math. Phys.*, V. 5, 1997, № 20, P. 247–266.
7. *Варфоломеев В. В.*, Вписанные многоугольники и полиномы Герона // *Матем. сб.* Т. 194, 2003, № 3, С. 3–24.
8. *Жукова А. М.*, Индекс Морса циклического многоугольника II // *Алгебра и анализ*, Т. 24, 2012, № 3, С. 129–148.

Жукова Елена Михайловна — аспирант математико-механического факультета СПбГУ. millionnaya13@ya.ru; СПбГУ, Университетская наб., д. 7-9, г. Санкт-Петербург, 199034, РФ. Научный руководитель — Панина Г.Ю.

Zhukova M. Alena — Ph. D. student of Faculty of Mathematics and Mechanics of SPbSU. millionnaya13@ya.ru; SPbSU, Universitetskaya emb., 7-9., St. Petersburg, 199034, Russia. Scientific advisor — Panina Yu. Gaiane.

Рекомендовано ЛИТУР СПИИРАН, руководитель лаборатории Тимофеев А.В., Д.т.н., проф., Заслуженный деятель науки РФ

Статья поступила в редакцию 17.05.2012.

РЕФЕРАТ

Жукова А.М. Вписанные конфигурации шарнирного пятиугольника.

Мы изучаем шарнирные многоугольники L с двумя фиксированными вершинами и их изгибания на плоскости с разрешенными самопересечениями. Неформально, шарнирный многоугольник можно понимать как набор из n жестких ребер, соединенных по циклу шарнирами, вращения которых обеспечивают изгибания шарнирного многоугольника.

Мы определяем для каждой конфигурации шарнирного многоугольника некоторую функцию энергии (функцию *ориентированной площади* $A(P)$ конфигурации P) и изучаем равновесные состояния шарнирного многоугольника.

Естественное математическое описание для этой физической ситуации дает теория Морса. Функция A в общем случае является функцией Морса на конфигурационном пространстве $\mathcal{M}(L)$ шарнирного механизма L . Индекс Морса критической точки (равновесного состояния) можно понимать как некоторую меру устойчивости равновесного состояния.

Известно, что равновесные конфигурации функции A являются вписанными конфигурациями шарнирного многоугольника (т. е. конфигурациями, все вершины которых лежат на одной окружности). Существует формула для нахождения индекса Морса произвольной критической точки A . Кроме того, существует классификация всех возможных локальных максимумов A .

В данной работе мы даем полный список всех возможных наборов вписанных конфигураций типичного шарнирного пятиугольника.

SUMMARY

Zhukova A. **Sets of cyclic configurations of a pentagonal linkage.**

We study polygonal linkages L with two fixed vertices and their flexes on a plane with allowed self-intersections. Informally, polygonal linkage can be understood as n rigid bars, connected by links in a cycle. Rotations of these links provide flexes of the whole linkage.

We determine for every configuration of a polygonal linkage a certain energy function (a *signed area* $A(P)$ of a configuration P) and study equilibrium configurations of a polygonal linkage.

The natural mathematical framework for this physical situation is the Morse theory. The function $A(P)$ is generically a Morse function on the configuration space $\mathcal{M}(L)$ of a linkage L . The Morse index of a critical point (equilibrium shape) can be understood as some measure of stability of an equilibrium shape.

It is known, that the equilibrium shapes of A are the cyclic configurations of a polygonal linkage (i.e. the configurations which have all vertices lie on a circle). There exist a formula for Morse index of a critical point of A . Additionally, there is a classification of all possible maxima of A .

In this framework, we give a list of all possible sets of cyclic configurations a typical pentagonal linkage.