

В.А. ВОЕВОДИН
**ЧАСТНАЯ ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ КАК ИНСТРУМЕНТ
СНИЖЕНИЯ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ
УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ
ИНФОРМАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ,
ПОДВЕРЖЕННОЙ ВОЗДЕЙСТВИЮ УГРОЗ**

Воеводин В.А. Частная полумарковская модель как инструмент снижения сложности задачи оценивания устойчивости функционирования элементов информационной инфраструктуры, подверженной воздействию угроз.

Аннотация. Для принятия решения по обеспечению безопасности информационной инфраструктуры (ИИ) в целях ее устойчивого функционирования в условиях воздействия угроз требуется инструмент, позволяющий оценить устойчивость функционирования ее отдельных элементов. Применение полумарковской модели для оценивания устойчивости функционирования элементов ИИ, подверженной воздействию угроз, в прямой постановке сопряжено с ростом сложности описания объекта моделирования (параметрического пространства) в степенной прогрессии от числа учитываемых воздействий, что снижает ее практическую значимость. Однако в научной литературе не обнаружено исследований по снижению сложности полумарковской модели. В статье приведен подход к снижению сложности моделирования посредством принятия корректных допущений при формировании исходных данных. Приведены условия, при которых возможно принять ряд допущений, позволяющих значительно снизить сложность моделирования, платой за это является ограничение области применимости модели. Приводится постановка задачи и модифицированный граф переходов. Новизна постановки задачи заключается в учете ограничений на имеющийся ресурс для восстановления функциональности элемента. Для пояснения физической сущности процесса моделирования приводится мысленный эксперимент с моделью. Для решения задачи были использованы: а) экспертные методы для добывания исходных данных; б) математические модели частных полумарковских процессов; в) методы преобразований Лапласа; г) методы планирования эксперимента. Демонстрация последовательности решения задачи сопровождается иллюстративными примерами и графиками. В результате эксперимента были выявлены закономерности исследуемого процесса, существование которых было доказано формально. Исследование показало, что при принятии мотивированных допущений возможно снизить сложность моделирования. Результаты исследования расширяют знания о приложении методов марковских процессов для оценивания устойчивости функционирования элементов ИИ применительно к условиям воздействия угроз.

Ключевые слова: полумарковский процесс, сложность оценивания, преобразования Лапласа, функция живучести, устойчивость функционирования, информационная инфраструктура.

1. Введение. На текущий момент мы не очень сильны в объективном оценивании устойчивости функционирования элементов критической информационной инфраструктуры (КИИ). Способность оценивать устойчивость функционирования КИИ применительно к воздействию угроз еще слабее. Без умения

своевременно и объективно оценивать (измерять) уровень устойчивости функционирования мы не способны принять обоснованные решения по обеспечению ее безопасности.

В [1 – 4] приведены фундаментальные теоретические основания для приложения общих марковских потоков событий и показана их связь с марковскими аддитивными процессами и процессами марковского восстановления, рассмотрены важные для приложений частные случаи таких потоков. Анализ публикаций [5 – 11] показывает, что вопросам практического применения методов теории полумарковских процессов посвящено большое число работ. Результаты анализа позволяют утверждать, что в основном предлагается подход, основанный на асимптотических оценках устойчивости, что не может являться не спорным. Рассматриваемые моделируемые процессы, без грубых допущений, нельзя принять стационарными, следовательно, усредненные исходные данные могут давать значительную погрешность в оценках устойчивости. Однако за пределами предмета публикаций осталась конкретизация методов теории полумарковских процессов для условий ограничения на ресурс, с помощью которого поддерживается сам полумарковский процесс. При этом не учитывается возможность перехода процесса в невозвратное состояние по исчерпанию ресурса.

Общая постановка задачи оценивания устойчивости функционирования информационной инфраструктуры (ИИ) к воздействию целенаправленных угроз с учетом ограничений на ресурс приведена в [12 – 14]. В этих публикациях было предложено задачу оценивания устойчивости функционирования ИИ привести к частным задачам оценивания устойчивости функционирования ее отдельных элементов. Зная структуру ИИ, можно перейти от результатов оценивания устойчивости отдельных элементов ИИ к оцениванию ее устойчивости функционирования в целом. Принято допущение, что элементы ИИ и воздействующие угрозы рассматриваются без учета их сущности и внутренней структуры. Предложенный автором в [12] алгоритм решения задачи в общей постановке характеризуется значительной дескриптивной сложностью, которая растет в степенной прогрессии в зависимости от числа воздействий угроз. В этих условиях поиск методов снижения сложности алгоритма становится актуальной задачей.

2. Постановка задачи. Пусть задана некая ИИ объекта информатизации, содержащая семейство взаимоувязанных элементов, подверженных воздействию угроз. На этапе проектирования ИИ для каждого из элементов были реализованы специальные меры,

обеспечивающие некую их защищенность от воздействия угроз. В составе ИИ обычно предусматривается система восстановления, обладающая соответствующим производственным потенциалом (ресурсом) для восстановления функциональности отдельных элементов. Система восстановления реагирует на поражения отдельных элементов ИИ восстановлением их функциональности, в результате чего восстанавливается функционал ИИ в целом. При этом расходуется определенный ресурс системы восстановления.

Стационарный процесс функционирования элемента в условиях его старения или незначительных воздействий, предусмотренных нормальными условиями эксплуатации, может прерываться аномальными воздействиями окружающей среды, приводящими к его повреждениям и потере функциональности. К таким воздействиям могут относиться стихийные бедствия, целенаправленные воздействия угроз, которые имеют особенности: а) значительные повреждения элемента, которые приводят либо к его уничтожению, либо к существенному увеличению времени восстановления; б) незначительное время между соседними повторными воздействиями угроз; в) совокупность воздействий на относительно небольшом промежутке времени; г) существенное отличие законов распределения времени до повреждения и времени восстановления от аналогичных законов в нормальных условиях эксплуатации. С учетом этих особенностей применение асимптотических оценок для определения вероятности неповрежденного состояния элемента может привести к ошибкам оценивания.

В этих условиях целесообразно использовать функцию устойчивости элемента $v(t)$, характеризующую вероятность сохранения функциональности элемента в момент времени t в условиях воздействий угроз.

Для снижения сложности алгоритма решения задачи принято допущение, суть которого заключается в том, что функция устойчивости элемента на заданном интервале времени реализации угроз $(0, T]$ представляется в виде произведения двух *независимых* функций с параметрами t :

$$v(t, u, \Delta T, \lambda, \mu, \mathbf{P}) = K_{\text{ог}}(t, u, \Delta T) \varphi(t, \lambda, \mu, \mathbf{P}), \quad (1)$$

где $v(t, u, \Delta T, \lambda, \mu, \mathbf{P})$ – функция устойчивости элемента [13];

t – временной параметр оценивания функции устойчивости;

u – показатель безотказности и восстанавливаемости элемента в штатных условиях применения, $u = \{T_n, T_b\}$, где T_n – средняя

наработка на отказ элемента в штатных условиях; T_b – среднее время восстановления работоспособности элемента в штатных условиях. Значения частных показателей возможно получить на основе обработки соответствующих статистических данных, полученных в штатных условиях применения или из эксплуатационной документации;

ΔT – период времени воздействия угроз;

$\lambda = \{F, n, T\}$ – характеристика угрозы, где F – совокупность функций распределения случайных интервалов времени η_i до очередного воздействия i -й угрозы, $F = \{F_i(t)\}$, где $F_i(t)$ – функция распределения случайного интервала времени η_i до воздействия i -й угрозы, $i = 1, 2, \dots, n$, n – количество угроз в серии; T – момент времени окончания воздействий угроз;

μ – частный показатель живучести элемента, характеризующий его способность восстанавливать нарушенную, в результате успешного воздействия угроз, функциональность, $\mu = \{T_b, G\}$, где $T_b = \{\tau_{vi}^H, \tau_{vi}^B\}$ – совокупность нижнего и верхнего значений i -го интервала времени восстановления функциональности; G – совокупность функций распределения случайных интервалов времени восстановления функциональности элемента после воздействия i -й угрозы, $G = \{G_i(t)\}$, $i = 1, \dots, n$, n – число воздействий угроз в серии, τ_{vi}^H – оценка нижнего значения интервала восстановления функционала после воздействия i -й угрозы, τ_{vi}^B – оценка верхнего значения интервала восстановления функционала после воздействия i -й угрозы. Оценка параметров $\{\tau_{vi}^H, \tau_{vi}^B\}$ осуществляется либо с помощью экспертных методов, либо в результате соответствующих учений, деловых игр или специальных исследований;

P – совокупность частных показателей живучести элемента, характеризующая его защищенность, т.е. способность сохранять требуемый функционал в результате отражения соответствующих угроз. В качестве такого показателя принята совокупность вероятностей поражения элемента при отражении серии угроз, $P = \{p_i\}$, где p_i – вероятность поражения элемента при воздействии i -й угрозы, $i = 1, \dots, n$, n – число угроз. Оценивание вероятностей p_i осуществляется либо с помощью экспертных методов, либо в результате соответствующих учений, деловых игр или статистического моделирования;

$K_{\text{ор}}(t, u, \Delta T) = K_{\Gamma}(u) P(t, \Delta T)$ – нестационарный коэффициент оперативной готовности элемента, определяемый вероятностью его безотказной работы в течение времени реализации серии угроз, $\Delta T = (0, T]$, где $K_{\Gamma}(u)$ – коэффициент готовности элемента, рассчитанный для штатных условий его применения, $P(t, \Delta T)$ – вероятность безотказной работы элемента в течение периода времени ΔT ;

$\varphi(t, \lambda, \mu, \mathbf{P})$ – функция живучести элемента, определяющая вероятность сохранения его функциональности, в условиях воздействия угроз. Для штатных условий ее значение равно единице, так как воздействия угроз отсутствуют.

Для большинства практических случаев значение $K_{\text{ор}}(u)$ на периоде ΔT очень близко к единице, а значение функции живучести на этом же периоде неизмеримо меньше $\varphi(t, \lambda, \mu, \mathbf{P}) \ll K_{\text{ор}}(u)$. С учетом этого утверждения формулу (1) можно привести к виду:

$$v(t, \lambda, \mu, u, \mathbf{P}) \approx \varphi(t, \lambda, \mu, \mathbf{P}),$$

т.е. функция устойчивости элемента, для условий воздействия угроз, может быть приближенно заменена функцией живучести.

Для оценивания устойчивости отдельных элементов в [12] была предложена модель общего полумарковского процесса, дескриптивная сложность алгоритма моделирования зависит от числа воздействий угроз и составляет $m_0 = 3 \cdot 2^n + 1$. Формула выведена эмпирически. Сложность алгоритма моделирования значительно снижает ее практическую значимость. При этих условиях актуальной становится задача снижения сложности моделирования при допустимой достоверности получаемых результатов. Поэтому основные усилия в рамках настоящего исследования были сосредоточены на поиске пути снижения дескриптивной сложности алгоритма моделирования.

Цель статьи – сообщить о предлагаемом подходе к снижению сложности алгоритма моделирования с возможностью контроля достоверности получаемого результата оценивания.

Основная идея метода заключается в том, что если предположить, что воздействия угроз планируются противником в течение равных промежутков времени или через случайные интервалы времени, продолжительность которых определяется последовательностью одних и тех же однотипных операций по подготовке воздействия однотипных угроз, то справедливо принять допущение об одинаковых законах распределения времени до

воздействия угроз $F_i(t) = F(t)$, времени восстановления $G_i(t) = G(t)$ и равных вероятностях поражения $P_i = P$. При принятии таких допущений количество необходимой информации для описания алгоритма функционирования элемента значительно сокращается, что в результате позволяет снизить дескриптивную сложность и, как результат, сложность самого моделирования. С учетом принятых допущений общий граф переходов, приведённый в [12], приобретает частный вид, представленный на рисунке 1.

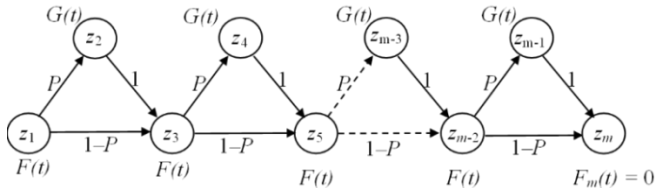


Рис. 1. Граф переходов частного полумарковского процесса

Такой граф переходов (процесс) позиционируется в рамках исследования как частный полумарковский и является конкретизацией общего полумарковского графа, приведенного в [12]. Нечетные индексы $i = 2j + 1, j = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$, присваиваются состояниям элемента $z_i = 1$ («функционален»), четные индексы $i = 2j, j = 1, 2, \dots, n$, присваиваются состояниям $z_i = 0$ («не функционален»). Состояния с индексом $m = 2n + 1$ позиционируется как поглощающие «функционален по завершению воздействия угроз». Формула для расчета числа возможных состояний графа (дескриптивной сложности), выведенная эмпирически, имеет вид $m_{\text{ч}} = 2 \cdot n + 1$.

Процесс завершается восстановлением функциональности элемента при условии, что $\Pi_{r_n}(t) \leq \Pi_{r_0}(t)$, где:

а. $\Pi_{r_0}(t)$ – показатель, характеризующий фактические производственные возможности подсистемы восстановления функционала на момент времени t : $\Pi_{r_0}(t) = \{R_0(t), D_0(t)\}$, где $R_0(t) = \{r_{0i}(t)\}$ – совокупность типов не возобновляемого ресурса, имеющегося в составе системы восстановления для восстановления элемента на момент времени $t, i = 1, 2, \dots, m$; m – число типов не возобновляемого ресурса (пример не возобновляемого ресурса – запасные части, расходный материал и т.п.); $D_0(t) = \{d_{0i}(t)\}$ – совокупность типов возобновляемого ресурса, имеющегося в составе системы восстановления функционала на

момент времени t , $i = 1, 2, \dots, k$, k – число типов возобновляемого ресурса (пример возобновляемого ресурса – человеческий ресурс, измерительные приборы и т.п., которые могут использоваться многократно);

б. $\Pi_{r_n}(t) = \{R^{Tp}(t), D^{Tp}(t)\}$ – показатель, характеризующий *требуемые* производственные возможности расчета восстановления на момент времени t , где $R^{Tp}(t) = \{r_i^{Tp}(t)\}$ – совокупность соответствующих единиц не возобновляемого ресурса каждого типа, требуемого для восстановления функционала элемента после успешного воздействия угроз к моменту времени t , $i = 1, 2, \dots, m$, m – число требуемых типов не возобновляемого ресурса; $D^{Tp}(t) = \{r_i^{Tp}(t)\}$ – совокупность типов возобновляемого ресурса, требуемого для восстановления функционала элемента к моменту времени t , $i = 1, 2, \dots, k$, k – число требуемых типов возобновляемого ресурса.

Условие перехода процесса в поглощающее состояние «не функционален по исчерпанию ресурса восстановления» характеризуется тем, что требуемый ресурс по любой из составляющих будет больше, чем имеется в наличии на момент времени t , $\Pi_{r_n}(t) > \Pi_{r_0}(t)$.

Для снижения сложности общего полумарковского процесса, приняты следующие дополнительные допущения:

1. Функция распределения времени пребывания процесса в конечном поглощающем состоянии $F_m(t) = 0$. Физически это означает, что воздействия угроз завершились восстановлением функциональности элемента.

2. Одношаговые вероятности перехода π_{ik} элемента из состояния z_i в состояние z_k имеют следующие значения:

$\pi_{ik} = 0$ при $i \geq k$ и $(k - i) > 2$, т.к. переход возможен только в состояния, индексы которых превышают индексы предыдущих состояний.

Между индексами k и i всегда должно выдерживаться соотношение $k = i + 1$ при переходе из вершины с нечетным индексом в вершину с четным индексом или $k = i + 2$ при переходе из вершины с нечетным индексом в вершину с нечетным индексом, в противном случае $\pi_{ik} = 0$;

$$\pi_{ik} = 1 \text{ при } i = 2j, k = 2j + 1;$$

$$\pi_{ik} = P \text{ при } i = 2j - 1, k = 2j;$$

$$\pi_{ik} = 1 - P \text{ при } i = 2j - 1, k = 2j + 1, j = 1, 2, \dots, n.$$

При этом текущее значение функции живучести элемента в момент времени t будет определяться суммой соответствующих интервально-переходных вероятностей:

$$P_{1i}(t): \varphi(t) = \sum_{\substack{i \in N_{(+)} \\ \Pi_n \leq \Pi_{r_0}}} P_{1i}(t),$$

где $N_{(+)} = \{2j + 1, j = 0, 1, \dots, n\}$ – множество индексов состояний элемента, при которых $z_i = 1$ (элемент в состоянии «функционален»).

3. Мысленный эксперимент. Мысленный эксперимент приводится для понимания физической сущности процесса моделирования. Пусть у нас имеется идеальная игральная кость с числом граней 6. Грани имеют равные площади, на каждой грани нанесено число i от 1 до 6. Четные числа ($i = 2, 4, 6$) соответствуют состояниям $z_i = 0$ («не функционален»). Нечетные числа ($i = 1, 3, 5$) соответствуют состояниям $z_i = 1$ («функционален»). С помощью этой «аналитической игральной кости» можно произвести моделирование трех $j = 1, 2, 3$ воздействий с вероятностью поражения $P = (1 - P) = 0,5$ (грани с идеально равными площадями). Далее осуществляется моделирование для $t = 0$, считается, что элемент находился в состоянии $z_0 = 1$ («функционален»). Предположим, что в течение единичного периода времени t элемент возвращается в исходное состояние «функционален». Производим первый опыт с бросанием «аналитической игральной кости», пусть он соответствует моменту $t = 1$. Если выпало нечетное число, то элемент остался в состоянии «функционален», в противном случае – «не функционален», и т.д. Проводим серию опытов до выполнения условия $t = 3, (0, 3]$. Подсчитываем число комбинаций с нечетными числами, нормируем его относительно $T = 3$. Можно сразу бросать $T = 3$ кости, а потом подсчитывать результат. В результате этого мысленного эксперимента можно предположить, что функция устойчивости будет пропорциональна числу событий с выпадением нечетных чисел в рамках этой реализации, что можно принять как гипотезу. Если реализовать несколько таких серий, то результат можно усреднить по числу реализаций. Это тоже можно принять как гипотезу. Также в качестве гипотезы можно принять утверждение, что если площадь соответствующих граней ставить в соответствие со значением вероятности наступления события, то в результате опыта можно получить функцию живучести для различных вероятностей. Например, если потребуется разыграть вероятность наступления события объект

«функционален» с вероятностью $P = 1$, то для опыта можно использовать игральную кость в виде тетраэдра с гранями 1, 3, 5.

Понимание сущности мысленного опыта позволяет построить аналитическую модель для расчета значений $P_{1i}(t)$, которая представляет собой систему линейных интегральных уравнений. Общий вид уравнений и их вывод приведен в [12]. При моделировании учитывались результаты приложений теоретических результатов марковских процессов для решения конкретных задач из области устойчивости сложных систем, радиотехники, автоматики, теории надежности и массового обслуживания, приведенные в [15 – 34]. Сведения о возможных воздействиях угроз, которые также учитывались при моделировании, приведены в [35].

4. Решение задачи. Для решения задачи система уравнений, приведенная в [2], с учетом принятых ограничений, была преобразована в систему линейных интегральных уравнений следующего вида:

$$P_{1,i}(t) = [1 - F(t)]\delta_{1i} + \sum_{\substack{k \in N_{(+)} \\ \Pi_n \leq \Pi_{r_0}}} \pi_{1k} \int_0^t f_{1k}(\tau) P_{ki}(t - \tau) d\tau, \quad (2)$$

где $i \in N_{(+)}$, $N_{(+)} = \{2j + 1, j = 0, 1, \dots, n\}$ – множество индексов состояний элемента, при которых $z_i = 1$ (рисунок 2 – это нижние узлы); δ – символ Кронекера: $\delta_{1i} = 1$ при $i = 1$; $\delta_{1i} = 0$ при $i > 1$; $k \in N_{(+)}$; π_{1k} – вероятность перехода из состояния с индексом 1 в состояние с индексом k ; $f_{1k}(\tau)$ – условная плотность распределения времени пребывания элемента в состоянии z_k ;

$$P_{ki}(t) = [1 - F(t)]\delta_{ki} + \sum_{\substack{r \in N_{(-)} \\ \Pi_n \leq \Pi_{r_0}}} \pi_{kr} \int_0^t f_{kr}(\tau) P_{ri}(t - \tau) d\tau,$$

где P_{ki} – вероятность перехода процесса в момент времени t из состояния с индексом k в состояние с индексом i , переход осуществляется через верхний узел, рисунок 1; δ_{ki} – символ Кронекера, $\delta_{ki} = 1$ при $k = i$ и $\delta_{ki} = 0$ при $k \neq i$; $r \in N_{(-)}$, $N_{(-)} = \{2j, j = 1, \dots, n\}$ – множество индексов состояний элемента, при которых $z_r = 0$, рисунок 1 – это верхние узлы, $r > k$; π_{kr} – вероятность перехода из состояния с индексом k в состояние с индексом r ;

$f_{kr}(\tau)$ – условная плотность распределения времени пребывания процесса в состоянии z_k ; P_{ri} – вероятность перехода процесса в момент времени t из состояния с индексом r в состояние с индексом i .

Первый член справа в уравнении (2) позволяет учесть вероятность того, что процесс останется в состоянии z_1 до момента времени t .

Второй член в уравнении (2) отображает вероятность последовательности событий, когда процесс совершает последовательный переход (развивается) из состояния 1 в состояния k за период времени τ и, за оставшееся время $(t - \tau)$, из состояния k в состояния r . Вероятности частных переходов суммируются по всем промежуточным состояниям z_k , в которые возможны переходы из состояния z_1 , и интегрируются по возможным временам перехода, которые изменяются от 0 до t .

При этом в качестве показателя устойчивости элемента может быть использовано значение не только вероятности сохранения элементом своей функциональности, но и вероятность того, что будет успешно отражено заданное число воздействий угроз при имеющемся ресурсе $\Pi_{r,0}(t)$. Вторая постановка рассчитана на перспективу исследований.

Таким образом, в соответствии с постановкой задачи, система линейных интегральных уравнений (1) позволяет выразить интервально-переходные вероятности через основные параметры полумарковского процесса, которые предполагается добывать экспертными методами. Однако в виде, представленном формулой (2), модель имеет лишь теоретическое значение и не может быть непосредственно применена для оценивания функции живучести $\phi(t)$ для произвольного числа n .

При аналитическом моделировании следует учитывать, что получение формальных выражений для исследуемого процесса в прямой постановке (2) является весьма трудоемкой задачей, сами выражения с трудом поддаются интерпретации лицом, принимающим решение. Если аналитические модели оказываются сложными для реализации, то на практике для построения функции живучести целесообразно применять методы статистического моделирования [36]. Однако решение задачи с помощью аналитического моделирования имеет свою практическую и теоретическую значимость, которая заключается в том, что исследователю представляется возможность получить результаты с помощью и аналитического, и статистического моделирования, сравнить полученные результаты на малых выборках и оценить тем самым расхождение получаемых результатов.

Однако, если удастся автоматизировать процедуру построения линейных интегральных уравнений (2), аналитическая модель может быть применена для практических целей. В настоящее время разработана программа для ЭВМ, позволяющая автоматизировать процесс построения графа переходов, подана заявка на ее регистрацию в Роспатент (зарегистрирована Роспатентом под номером 2023683185).

Некоторое технологическое преимущество для аналитического моделирования дает применение метода преобразований Лапласа [2 – 4]. Чтобы воспользоваться этим преимуществом, система уравнений (2), с учетом принятых допущений, была преобразована к следующему виду:

$$P_{kk}(t) = 1 - F(t), \quad k = 2j + 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n - 1;$$

индекс kk учитывает вероятность того, что процесс достигнет состояния с индексом k и останется в этом состоянии z_k до момента времени t :

$$P_{1,(2j+1)} = P \int_0^t f(\tau) P_{2,(2j+1)}(t - \tau) d\tau + (1 - P) \int_0^t f(\tau) P_{3,(2j+1)}(t - \tau) d\tau,$$

где $j = 1, 2, \dots, n$ при этом $\Pi_{r_n} \leq \Pi_{r_0}$.

Индексы $1, (2j + 1)$ физически отображают траекторию перехода из состояния с индексом 1 в состояние $(2j + 1)$, а сама вероятность, что элемент останется в этом состоянии $(2j + 1)$ до момента времени t :

$$P_{k,(2j+1)}(t) = \int_0^t g(\tau) P_{(k+1),(2j+1)}(t - \tau) d\tau,$$

где $k = 2, 4, \dots, 2j; j = 1, 2, \dots, n; \Pi_{r_n} \leq \Pi_{r_0}$. Индексы $k, (2j + 1)$ физически отображают траекторию перехода из состояния с индексом k (из состояния «не функционален» в состояние «функционален») в состояние $(2j + 1)$, а вероятность, что элемент останется в этом состоянии $(2j + 1)$ до момента времени t , при этом k – это *четные* индексы;

$$P_{k,(2j+1)}(t) = P \int_0^t f(\tau) P_{(k+1),(2j+1)}(t - \tau) d\tau + (1 - P) \int_0^t f(\tau) P_{(k+2),(2j+1)}(t - \tau) d\tau,$$

где $k = 3, 5, \dots, (2j - 1); j = 1, 2, \dots, n; \Pi_{r_n} \leq \Pi_{r_0}$. Индексы $k, (2j + 1)$ физически отображают траекторию перехода из состояния с индексом k (остается в состоянии «функционален») в состояние $(2j + 1)$, а сама вероятность показывает, что элемент останется в этом состоянии $(2j + 1)$ до момента времени t , при этом k – это *нечетные* индексы;

$$P_{mm}(t) = 1, m = 2n + 1, mm – индекс поглощающего состояния.$$

Полученная система интегральных уравнений позволяет связать посредством преобразования Лапласа [2] интервально-переходные вероятности с основными, в том числе и управляемыми, характеристиками процесса поддержания функциональности элемента в условиях воздействия угроз.

Таким образом, применяя к элементам системы уравнений преобразование Лапласа, получаем следующие отображения:

$$\mathcal{L}\{P_{kk}(t)\} = \tilde{P}_{kk}(s) = s^{-1} [1 - \tilde{f}(s)], \text{ при } k = 2j + 1, j = 0, 1, 2, \dots, n - 1,$$

где \mathcal{L} – символ прямого интегрального преобразования Лапласа, s – комплексная переменная изображения при преобразовании Лапласа, “ \sim ” – символ над функцией комплексного переменного s (изображение), получаемого в результате прямого преобразования Лапласа функции вещественного переменного t (оригинала):

$$\tilde{P}_{kk} s^{-1} [1 - \tilde{f}(s), k = 2j + 1, j = 0, 1, 2, \dots, n - 1];$$

$$\tilde{P}_{1,(2j+1)}(s) = P \tilde{f}(s) \tilde{P}_{2,(2j+1)}(s) + (1 - P) \tilde{f}(s) \tilde{P}_{3,(2j+1)}(s), \quad (2)$$

где $j = 1, 2, \dots, n - 1$;

$$\tilde{P}_{k,(2j+1)}(s) = \tilde{g}(s) \tilde{P}_{(k+1),(2j+1)}(s),$$

где $k = 2, 4, \dots, 2j, j = 1, 2, \dots, n$;

$$\tilde{P}_{k,(2j+1)}(s) = \tilde{f}(s) [P \tilde{P}_{(k+1),(2j+1)}(s) + (1 - P) \tilde{P}_{(k+2),(2j+1)}(s)],$$

где $k = 3, 5, \dots, 2j - 1$;

$$\tilde{P}_{mm}(s) = s^{-1},$$

где $m = 2n + 1$.

Последовательно подставляя выражения $\tilde{P}_{k,(2j+1)}(s)$, для $k > 1$ в (2), определяем:

$$\tilde{P}_{1,(2j+1)}(s) = s^{-1} [1 - \tilde{f}(s)] \tilde{f}^j(s) [1 - P + P\tilde{g}(s)]^j, \quad j = 1, 2, \dots, (n-1);$$

$$\tilde{P}_{1,m}(s) = s^{-1} \tilde{f}^n(s) [1 - P + P\tilde{g}(s)]^n, \quad \text{при } m = 2n + 1.$$

В итоге, используя соотношение $\tilde{\varphi}(s) = \sum_{j=0}^n \tilde{P}_{1,2j+1}(s)$, получаем преобразование Лапласа функции живучести следующего вида:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(s) = & s^{-1} [1 - \tilde{f}(s)] + s^{-1} [1 - \tilde{f}(s)] \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{f}^j(s) [1 - P + P\tilde{g}(s)]^j + \\ & + s^{-1} \tilde{f}^n(s) [1 - P + P\tilde{g}(s)]^n, \end{aligned} \quad (3)$$

где n – число угроз в серии воздействий.

Для определения обратного преобразования Лапласа выражение (3) было представлено в виде многочлена:

$$\tilde{\varphi}(s) = b_1 + b_1\alpha + b_1\alpha^2 + \dots + b_1\alpha^{n-1} + h\alpha^n,$$

где $b_1 = s^{-1} [1 - \tilde{f}(s)]$, α^j определяются по формуле:

$$\alpha^j = \tilde{f}^j(s) \sum_{k=0}^j C_j^k (1-P)^{(j-k)} P^k \tilde{g}^k(s), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где C_j^k – число сочетаний из j элементов по k , $h = s^{-1}$.

Объединив члены, содержащие произведения:

$$s^{-1} \tilde{f}^{j+r}(s) \tilde{g}^j(s), \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-j;$$

$$s^{-1} \tilde{f}^{j+r+1}(s) \tilde{g}^j(s), \quad j=1, 2, \dots, n; \quad r=0, 1, 2, \dots, n-j-1,$$

получаем:

$$\tilde{\Phi}(s) = s^{-1} - \tilde{V}_1(s) + \sum_{j=1}^{n-1} [\tilde{\Phi}_j(s) - \tilde{V}_{j+1}(s)] - \tilde{\Phi}_n(s), \quad (4)$$

где:

$$\tilde{V}_1(s) = s^{-1} P \sum_{r=0}^{n-1} (1-P)^r f^{r+1}(s); \quad (5)$$

$$\tilde{\Phi}_j(s) = s^{-1} P^j \sum_{r=0}^{n-j} C_{j+r-1}^{j-1} (1-P)^r \tilde{f}^{j+r}(s) \tilde{g}^j(s), \quad j=1, 2, \dots, n; \quad (6)$$

$$\tilde{V}_{j+1}(s) = s^{-1} P^{j+1} \sum_{r=0}^{n-j-1} C_{j+r}^j (1-P)^r \tilde{f}^{j+r+1}(s) \tilde{g}^j(s), \quad j=1, 2, \dots, n-1. \quad (7)$$

Используя таблицы преобразований Лапласа, получаем следующие соответствия между изображениями и оригиналами:

$$s^{-1} \rightarrow 1; \\ s^{-1} \tilde{f}^{j+r}(s) \tilde{g}^j(s) \rightarrow F^{(j+r)}(t) * g^{(j)}(t),$$

где знаком «*» обозначена операция свертки функций $F^{(j+r)}(t)$ и $g^{(j)}(t)$ соответственно,

$F^{(j+r)}(t)$ – $(j+r)$ -кратная свертка функции $F(t)$, определяемая с помощью рекуррентного соотношения:

$$F^{(j+r)}(t) = \int_0^t F^{(j+r-1)}(t-x) f(x) dx, \quad (8)$$

$g^{(j)}(t)$ – j -кратная свертка функции $g(t)$, определяемая с помощью рекуррентного соотношения (между (5) и (9)):

$$g^{(j)}(t) = \int_0^t g^{(j-1)}(t-x) g(x) dx. \quad (9)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (4)–(7) и используя соотношения (8), (9) получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 1 - V_1(t) + \sum_{j=1}^{n-1} [\Phi_j(t) - V_{j+1}(t)] + \Phi_n(t), \text{ или} \\ \varphi(t) &= 1 - \sum_{j=1}^n [V_j(t) - \Phi_j(t)], \end{aligned} \quad (10)$$

где:

$$V_1(t) = P \sum_{r=0}^{n-1} (1-P)^r F^{(r+1)}(t); \quad (11)$$

$$V_j(t) = P^j \sum_{r=0}^{n-j} C_{j+r}^{j-1} (1-P)^r F^{(j+r)}(t) * g^{(j-1)}(t), \quad j > 1; \quad (12)$$

$$\Phi_j(t) = P^j \sum_{r=0}^{n-j} C_{j+r-1}^{j-1} (1-P)^r F^{(j+r)}(t) * g^{(j)}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

В итоге общее выражение для функции живучести восстанавливаемого элемента приобретает вид:

$$\varphi(t) = 1 - \sum_{j=1}^n P^j \sum_{r=0}^{n-j} C_{j+r-1}^{j-1} (1-P)^r Q_{jr}(t), \quad (14)$$

где:

$$\begin{aligned} Q_{jr}(t) &= F^{(j+r)}(t) * g^{(j-1)}(t) - F^{(j+r)}(t) * g^{(j)}(t) = \\ &= \int_0^t 1 - G(t-x) y_{(j-1),r}(x) dx; \end{aligned} \quad (15)$$

$$y_{(j-1),r}(x) = f^{(j+r)}(x) * g^{(j-1)}(x), g^{(0)} = 1.$$

Значения $Q_{jr}(t)$ определяют условную вероятность того, что элемент был поврежден и будет восстанавливаться в момент t после $(j+r)$ воздействий и $(j-1)$ предыдущих восстановлений, при этом выполняется неравенство $R_0 \geq R(t)$. При $P=1$ функция живучести будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \varphi(t, P=1, \Pi_{r_n}(t) \leq \Pi_{r_0}(t)) &= \\ &= 1 - \sum_{j=1}^n [F^{(j)}(t) * g^{(j-1)} - F^{(j)}(t) * g^{(j)}(t)], g^{(0)}(t) = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Сами по себе формулы (10) по (16) сложны для интерпретации и восприятия, поэтому наряду с общим выражением (14) для функции живучести, при небольшом числе воздействий n , предпочтительно использовать другое соотношение, получаемое путем суммирования взвешенных функций $\varphi_{ki}(t, P=1)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, где k – число поражений (восстановлений) элемента. Так как каждому значению k соответствует m_k различных вариантов возможных поражений и восстановлений элемента из n по k и вероятность каждого варианта $P_k = P^k(1-P)^{n-k}$, то:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n P^k (1-P)^{n-k} \sum_{j=1}^{m_k} \varphi_{ki}(t, P=1),$$

где $m_k = C_n^k$; $\varphi_{ki}(t, P=1)$ – функция живучести при $P=1$ и i -м варианте из n воздействий угроз и k поражений элемента. Если все n воздействий не приводят к поражению элемента, $\varphi_{01}(t, P=1) = 1$.

Выражения для φ_{ki} определяются путем формирования соответствующих вариантов k_i при заданном числе n воздействий и k поражений. Каждому варианту k_i будет соответствовать граф переходов (рисунок 2), где $z_j = 1, z'_j = 0, j = 1, 2, \dots, k, z_{k+1}$ – поглощающее состояние.

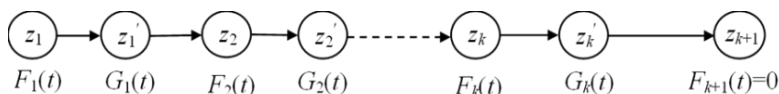


Рис. 2. Граф переходов при $P = 1$

Вероятности переходов $\pi_{j,j+1} = 1$, а функция распределения $F_j(t)$ времени пребывания процесса в состоянии $z_j = 1$ будет определяться числом воздействий противника n_j , которые он должен совершить до j -го поражения элемента.

В силу соотношения (16) получаем:

$$\varphi_{ki}(t, P = 1) = 1 - \sum_{\substack{j=1, \\ \Pi_n(t) \leq \Pi_{r_0}(t)}}^k \left[F^{(n_j)}(t) * g^{(j-1)}(t) - F^{(n_j)}(t) * g^{(j)}(t) \right],$$

где n_j – суммарное число воздействий угроз до j -го поражения элемента; $n_j = \sum_{s=1}^j r_s(k_i)$; $r_s(k_i)$ – число воздействий угроз после $(s-1)$ -го восстановления до s -го поражения элемента, соответствующее варианту k_i .

Новизна результата. Отличие предлагаемого подхода от приведенных в [2, 4, 12] в том, что: а) для снижения размера параметрического пространства обосновано принимаются дополнительные ограничения, платой за это является некоторое снижение достоверности; б) в возможности учета ограничения на ресурс подсистемы восстановления, платой за это является то, что процесс может перейти в поглощающее состояние по событию «закончился ресурс для восстановления».

5. Иллюстративный пример. Пусть дано: число воздействий противника $n = 3$, вероятность поражения p изменяется от 0 до 1 с шагом 0,01. Требуется, используя соотношения (14) и (15), определить общее выражение для функции живучести $\varphi(t)$.

При $n = 3$ возможна реализация $2^3 = 8$ различных вариантов состояний элемента в процессе воздействия и при заданном числе возможных поражений $k = 0, 1, 2, 3$ при числе воздействий $n = 3$. При этом предполагается, что после каждого поражения элемент восстанавливается до последующего воздействия. Каждый вариант k_i может быть определен двоичным числом $b_{ki} = z_1, z_2, z_3$, где k – заданное число поражений, i – номер варианта при заданном k , z_j – состояние элемента при j -м воздействии противника $j = 1, 2, 3$.

Таким образом, при $k = 0$ элемент подвергался трем воздействиям, но ни разу не был поражен. Число вариантов такого поражения равно единице, $b_{01} = 000$, при этом $\varphi_{01}(t) = 1$, и вероятность этой ситуации равна $P_0 = (1 - P)^3$.

При $k = 1$ элемент также подвергался трем воздействиям, но поражен всего один раз. Число таких вариантов поражения будет

равно 3, т.к. возможны ситуации, когда объект поражен исключительно после первого воздействия, либо только после второго воздействия или поражен только после третьего воздействия $b_{11} = 100$, $b_{12} = 010$, $b_{13} = 001$. Вероятность каждого из этих вариантов поражения равна $P_1 = P(1 - P)^2$, при этом для реализации первого варианта требуется число воздействий $n_1 = 1$, для второго – $n_1 = 2$, для третьего – $n_1 = 3$.

При $k = 2$ число возможных вариантов также равно трем, т.к. элемент может поражаться после первого и второго воздействий, или после первого и третьего, или после второго и третьего, т.е. $b_{21} = 110$, $b_{22} = 101$, $b_{23} = 011$. Вероятность каждого из этих вариантов равна $P_2 = P^2(1 - P)$, при этом для первого варианта число воздействий $n_2 = 2$, для второго варианта $n_2 = 3$, для третьего $n_2 = 3$.

При $k = 3$ число вариантов поражения равно единице, т.к. возможно только одна ситуация, когда элемент будет поражен после каждого воздействия, т.е. $b_{31} = 111$. Вероятность этого варианта равна $P_3 = P^3$. Полученные результаты сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Возможные реализации вариантов состояний элемента в результате последовательного воздействия трех угроз

k	i	b_{ki}	r_1	r_2	r_3	n_1	n_2	n_3	P_k	$\Phi_{ki}(t)$
0	1	000	0	0	0	0	0	0	$(1 - P)^3$	$\Phi_{01}(t)$
1	1	100	1	0	0	1	0	0	$P(1 - P)^2$	$\Phi_{11}(t)$
	2	010	2	0	0	2	0	0		$\Phi_{12}(t)$
	3	001	3	0	0	3	0	0		$\Phi_{13}(t)$
2	1	110	1	1	0	1	2	0	$P^2(1 - P)$	$\Phi_{21}(t)$
	2	101	1	2	0	1	3	0		$\Phi_{22}(t)$
	3	011	2	1	0	2	3	0		$\Phi_{23}(t)$
3	1	111	1	1	1	1	2	3	P^3	$\Phi_{31}(t)$

Используя результаты, приведенные таблице, по формуле (16) определяются $\Phi_{ki}(t)$ для каждого варианта результатов воздействия:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{01}(t) &= 1; \\
 \varphi_{11}(t) &= 1 - F(t) + F(t) * g(t); \\
 \varphi_{12}(t) &= 1 - F^{(2)}(t) + F^{(2)}(t) * g(t); \\
 \varphi_{13}(t) &= 1 - F^{(3)}(t) + F^{(3)}(t) * g(t); \\
 \varphi_{21}(t) &= 1 - F(t) + F(t) * g(t) - F^{(2)}(t) * g(t) + F^{(2)}(t) * g^{(2)}(t); \\
 \varphi_{22}(t) &= 1 - F(t) + F(t) * g(t) - F^{(3)}(t) * g(t) + F^{(3)}(t) * g^{(2)}(t); \\
 \varphi_{23}(t) &= 1 - F^{(2)}(t) + F^{(2)}(t) * g(t) - F^{(3)}(t) * g(t) + F^{(3)}(t) * g^{(2)}(t); \\
 \varphi_{31}(t) &= 1 - F(t) + F(t) * g(t) - F^{(2)}(t) * g(t) + F^{(2)}(t) * g^{(2)}(t) - \\
 &\quad - F^{(3)}(t) * g^{(2)}(t) + F^{(3)}(t) * g^{(3)}(t).
 \end{aligned} \tag{17}$$

По формуле (16) определяется общее соотношение для построения функции живучести:

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= (1 - P)^3 + P(1 - P)^2 [\varphi_{11}(t) + \varphi_{12}(t) + \varphi_{13}(t)] + \\
 &\quad + P^2(1 - P) [\varphi_{21}(t) + \varphi_{22}(t) + \varphi_{23}(t)] + P^3 \varphi_{31}(t).
 \end{aligned} \tag{18}$$

6. Результаты эксперимента с моделью. В соответствии с аналитическими моделями (17) и (18) было произведено тестовое моделирование, результат моделирования представлен на рисунке 3. Также на рисунке 3 приведены результаты имитационного моделирования, которое осуществлялось автором методами Монте-Карло в соответствии с постановкой, приведенной в [35].



Рис. 3. Результаты имитационного и аналитического моделирования

Результаты моделирования, приведенные на рисунке 3, позволяют утверждать, что расхождение результатов аналитического и имитационного моделирования для минимальных значений функции живучести составляют не более $\pm 2\%$. Такое совпадение результатов может свидетельствовать о достоверности моделей для определения минимальных значений функции живучести, которые построены на разных исследовательских фундаментах.

На фоне результатов, полученных с помощью опытного наблюдения, была сформулирована гипотеза, справедливость которой была доказана аналитически. Для подтверждения справедливости гипотезы были доказаны следующие лемма и теорема, определяющие монотонность убывания значений функции живучести $\varphi(t, n)$ на интервале $(0, T]$ при возрастании числа воздействий n .

Лемма 1. Если интегралы от функций $y_{j-1}(x) = f^{(j+r)}(x) * g^{(j-1)}(x)$ и $Y_j(x) = G(t-x)y_{j-1}(x)$, при $x \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, r = 0, 1, 2, \dots, n-j, g^{(0)}(x) = 1$, существуют, функция распределения $G(t-x) < 1$ при $t < (T+x)$ и выполняется условие $\Pi_{r_n}(t) \leq \Pi_{r_0}$, то для любых $t \in (0, T+x]$ и $P > 0$ справедливо неравенство:

$$V_j(t) > \Phi_j(t), \tag{19}$$

где $V_j(t)$ и $\Phi_j(t)$ определяются по формулам (12) и (13).

Для построения доказательства леммы было проведено моделирование, результаты которого в виде графика приведены на рисунке 4.

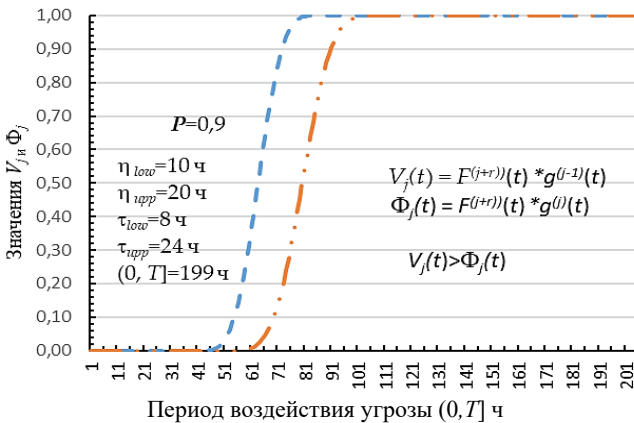


Рис. 4. Иллюстрация к лемме 1

Для доказательства справедливости неравенства (19), учитывая соотношения (10) – (13), что $F^{(j+r)}(t) * g^{(j-1)}(t) > F^{(j+r)}(t) * g^{(j)}(t)$ при всех $r = 0, 1, 2, \dots, n-j$ и $\Pi_{r_0}(t) \leq \Pi_{r_0}$. Вследствие обратимости операции свертки получаем:

$$F^{(j+r)}(t) * g^{(j)}(t) = G(t) * y_{j-1}(t) = \int_0^t G(t-x) y_{j-1}(x) dx;$$

$$F^{(j+r)}(t) * g^{(j-1)}(t) = \int_0^t y_{j-1}(x) dx = \int_0^t f^{(j+r)}(x) * g^{(j-1)}(x),$$

где $y_{j-1} = f^{(j+r)}(x) * g^{(j-1)}(x)$ – плотность распределения свертки двух случайных функций, первая из которых представляет собой сумму $j+r$ случайных величин η – моментов времени воздействия угроз, а вторая – сумму $j-1$ случайных величин τ – моментов времени восстановления функциональности элемента. Так как $G(t-x) < 1$ при $t < (T+x)$ и $y_{j-1}(x) > 0$, то $y_{j-1}(t) > G(t-x) y_{j-1}(x)$ при $t \in (0, T+x]$. В результате, используя свойство неравенства определенных интегралов, получаем:

$$\int_0^t y_{j-1}(t) dx > \int_0^t G(t-x) y_{j-1}(x) dx \text{ и } F^{(j+r)}(t) * g^{(j-1)}(t) > F^{(j+r)}(t) * g^{(j)}(t).$$

В итоге, сравнивая попарно слагаемые в выражениях с (11) – (13), имеем $V_j(t) > \Phi_j(t)$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$, $t \in (0, T+x]$ и $P > 0$ и $\Pi_{r_0}(t) \leq \Pi_{r_0}$.

Примечание. Очевидно, что неравенство (19) выполняется при $x=0$, когда $G(t) < 1$ и $t < T$. В тех случаях, когда функция распределения $G(t) < 1$ при $t \in (0, T+x]$, имеем нестрогое неравенство $V_j(t) \geq \Phi_j(t)$. Данная ситуация может иметь место при равномерном законе распределения случайной величины τ или при любом другом усеченном законе, когда $G(t) = 1$ при $t < T-x$.

При проведении эксперимента с моделью была сформулирована еще одна гипотеза, суть которой приведена графически на рисунке 5.

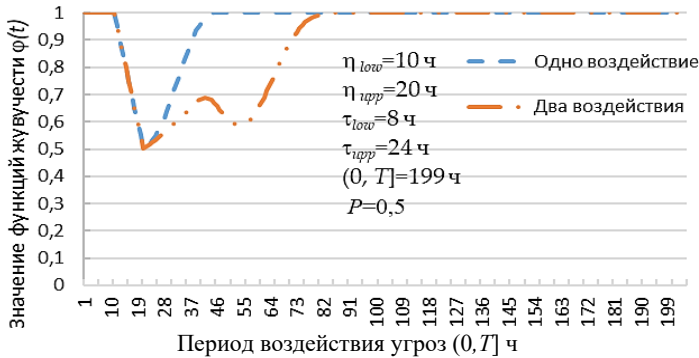


Рис. 5. Сравнение двух функций живучести при различных n

По сути значения функции живучести уменьшается с ростом числа воздействий угроз и не может превосходить значений функции живучести, соответствующей меньшему числу воздействий. Ниже приводится формальное доказательство этой гипотезы.

Теорема 1. Для любых $t \in (0, T]$, $P > 0$ и $G(t) < 1$ выполняется неравенство $\varphi(t, n_2) < \varphi(t, n_1)$, если $n_2 > n_1$.

Это означает, что значение функции живучести $\varphi(t, n_1)$ при одинаковых t будут выше значений функции живучести $\varphi(t, n_2)$. Подставляя значения n_1 и n_2 в формулу (10), получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(t, n_2) &= 1 - \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} [V_j(t) - \Phi_j(t)] + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} [V_j(t) - \Phi_j(t)] \right\} = \\ &= \varphi(t, n_1) - \sum_{j=n_1+1}^{n_2} [V_j(t) - \Phi_j(t)]. \end{aligned}$$

В силу леммы 1, если $V_j(t) - \Phi_j(t) > 0$ для всех $j = n_1+1, n_1+2, \dots, n_2$, то $\varphi(t, n_2) < \varphi(t, n_1)$ для любых $t \in (0, T]$, $P > 0$ и $G(t) < 1$.

Следствие 1.1. Если $G(t) \leq 1$ при $t \in (0, T]$ и $P > 0$, то наименьшее значение функции живучести монотонно убывает с ростом n . В силу доказанной ранее теоремы 1 $\varphi(t, n_2) < \varphi(t, n_1)$, если $n_2 > n_1$, поэтому $\varphi_m(n_2) = \inf_{t \in (0, T]} \varphi(t, n_2) < \varphi_m(n_1) = \inf_{t \in (0, T]} \varphi(t, n_1)$.

Теорема 2. Функция живучести $\varphi(t)$ на интервале времени воздействия угроз $(0, T]$ монотонно возрастает при уменьшении среднего времени восстановления функциональности элемента $m_\tau = M[\tau]$, т.е. для любых $t \in (0, T]$ и $P > 0$ выполняется неравенство

$\varphi(t, m_{\tau_2}) > \varphi(t, m_{\tau_1})$, если $G(t, m_{\tau_2}) > G(t, m_{\tau_1})$ и $M[\tau_1] > M[\tau_2]$. В силу выражения (15) при выполнении неравенства $G(x, m_{\tau_2}) > G(x, m_{\tau_1})$ получаем неравенство $Q_{jr}(t, m_{\tau_2}) < Q_{jr}(t, m_{\tau_1})$ для всех j и r . В силу соотношения (14) получаем $\varphi(t, m_{\tau_2}) > \varphi(t, m_{\tau_1})$.

График функции живучести (рисунок 6) при верхней оценке времени восстановления $\tau_{upper} = 24$ ч проходит ниже графика функции живучести для $\tau_{upper} = 12$ ч, что экспериментально подтверждает формальные выводы теоремы 2.

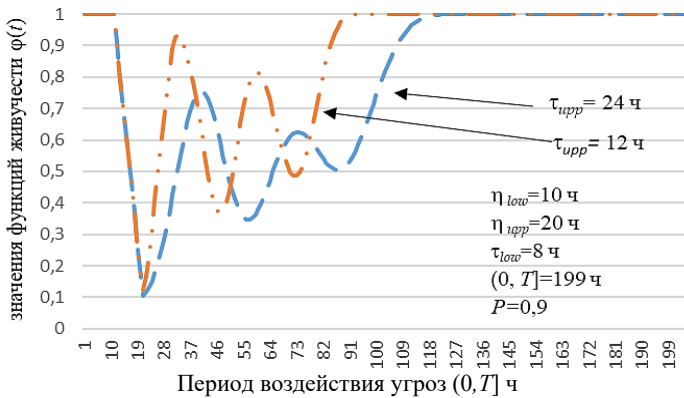


Рис. 6. Иллюстрация к теореме 2

Следствие 2.1. Если $G(t, m_{\tau_2}) > G(t, m_{\tau_1})$ при $t \in (0, T]$ и $P > 0$ и $m_{\tau_2} < m_{\tau_1}$, то наименьшее значение функции живучести $\varphi_m(m_{\tau}) = \inf_{t \in (0, T]} \varphi(t, m_{\tau})$ монотонно возрастает с уменьшением m_{τ} . Действительно, если уменьшение среднего времени восстановления m_{τ} приводит к увеличению значений функции распределения $G(t, m_{\tau})$ при $t > 0$, то в соответствии с теоремой 2 возрастают все значения функции живучести $\varphi(t)$ на интервале $(0, T]$, в том числе и значения φ_m .

Следствие 2.2. Пусть $z^*(t)$ – реализация альтернирующего процесса восстановления элемента. S_i – площади прямоугольников, $i = 1, 2, \dots, m$, образованных ступенчатой кривой $1 - z^*(t)$ и прямыми $t = t'_i$ и $t = t''_i$, где t'_i и t''_i – моменты i -го поражения и восстановления

элемента соответственно. Альтернирующий процесс проиллюстрирован на рисунке 7.

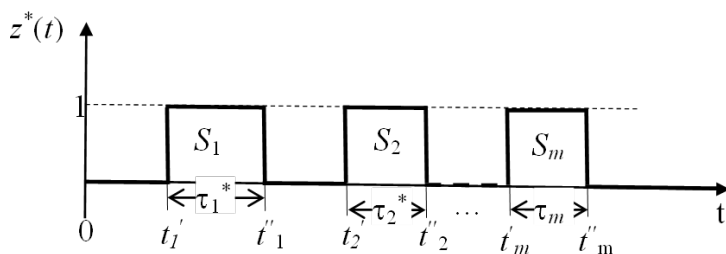


Рис. 7. Иллюстрация к следствию 2.2

Тогда уменьшение любой площади S_i при каждой реализации $z^*(t)$ приводит к увеличению наименьшего значения функции живучести $\varphi(t)$ на интервале $(0, T]$.

Действительно, т.к. $S_i = 1 \cdot \tau_i^*$, то уменьшение площади S_i при каждой реализации $z^*(t)$ однозначно приводит к уменьшению τ_i^* времени восстановления τ и, соответственно, к уменьшению среднего значения времени восстановления функциональности элемента m_τ . В результате, в силу теоремы 2 и следствия 2.1, увеличивается значение φ_m . Из следствия 2.2 вытекает, что минимизация площадей S_i или значений τ_i^* однозначно приводит к увеличению наименьшего значения функции живучести $\varphi(t)$.

7. Заключение. В результате проведенных исследований можно сделать обоснованное заключение (вывод) о том, что предлагаемый подход для снижения сложности алгоритма оценивания устойчивости функционирования элементов КИИ применительно к воздействию угроз, может быть применен с учетом определенных допущений.

Для оценивания устойчивости возможно применить функцию живучести $\varphi(t)$ при допущении, что вероятность выхода из строя элемента на периоде $(0, T]$ ничтожно мала по сравнению с вероятностью потери элементом функциональности в результате воздействия угроз. При моделировании ее можно не учитывать, при этом допускаемая ошибка будет на уровне методического «шума» при экспертном определении исходных данных.

При сравнении итогов аналитического и имитационного моделирования (рисунок 4) следует, что получаемые результаты близки по значению, а расхождение находится на уровне случайной ошибки имитационного моделирования и методического «шума» экспертного определения исходных данных. Эти же результаты

наблюдения (рисунок 4) позволяют косвенно судить о достоверности имитационной и аналитической моделей на основании того, что они сходятся по минимальным значениям на уровне методической ошибки не более чем ± 2 %. При этом следует учесть, что модели построены с применением принципиально разных подходов.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука. 1965. 524 с.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: «Сов. радио». 1977. 488 с.
3. Королюк В.С. Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев: «Наукова Думка». 1976. 184 с.
4. Хохлачев Е.Н. Организация и технологии выработки решений при управлении системой и войсками связи. Часть 2. Выработка решений при восстановлении сетей связи. М.: ВА РВСН, 2009. 241 с.
5. Песчанский А.И. Полумарковские модели профилактики ненадежной одноканальной системы обслуживания с потерями. ООО "Научно-издательский центр Инфра-М. 2022. 267 с. DOI: 10.12737/1870597.
6. Привалов А.А., Милашевский А.В. Подход к моделированию узла связи специального назначения, уязвимого к факторам деструктивного воздействия // Инновационная железная дорога. Новейшие и перспективные системы обеспечения движения поездов. Проблемы и решения: Сборник статей Международной научно-теоретической конференции. 2021. С. 308–315.
7. Yu S.-Z. Hidden Semi-Markov Models: Theory, Algorithms and Applications. Morgan Kaufmann, 2015. 208 p.
8. Barbu V.S., Limnios N. Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications: their use in Reliability and DNA Analysis. Springer Science and Business Media. 2009. 226 p.
9. Van der Hoek J., Elliott R.J. Introduction to Hidden Semi-Markov Models. Cambridge University Press. 2018. vol. 445. 185 p.
10. Grabski F. Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance. Elsevier. 2014. 255 p.
11. Obzherin Yu.E., Boyko E.G. Semi-Markov Models: Control of Restorable Systems with Latent Failures. Academic Press, 2015. 212 p.
12. Воеводин В.А. Модель оценки функциональной устойчивости элементов информационной инфраструктуры для условий воздействия множества компьютерных атак // Информатика и автоматизация. 2023. Т. 22. № 3. С. 691–715. DOI: 10.15622/ia.22.3.8.
13. Воеводин В.А. Генезис понятия структурной устойчивости информационной инфраструктуры автоматизированной системы управления производственными процессами к воздействию целенаправленных угроз информационной безопасности // Вестник Воронежского института ФСИН России. 2023. № 2. С. 30–41.
14. Воеводин В.А., Виноградов И.В., Волков Д.И. Об оценке устойчивости функционирования объекта информатизации в условиях компьютерных атак при экспоненциальном законе распределения времени до воздействия противника и восстановления работоспособности // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2022. Т. 49. № 3. С. 39–51. DOI: 10.21822/2073-6185-2022-49-3-39-51.

15. Шубинский И.Б. Структурная надежность информационных систем. Методы анализа // Ульяновск: Печатный двор, 2012. 216 с.
16. Шубинский И.Б. Функциональная надежность информационных систем. Методы анализа // М.: «Журнал Надежность». 2012. 296 с.
17. Черкесов Г.Н., Недосекин А.О., Виноградов В.В. Анализ функциональной живучести структурно-сложных технических систем // Надежность. 2018. Т. 18. № 2. С. 17–24. DOI: 10.21683/1729-2646-2018-18-2-17-24.
18. Черкесов Г.Н., Недосекин А.О. Описание подхода к оценке живучести сложных структур при многоразовых воздействиях высокой точности // Надежность. 2016. Т. 16. № 2(57). С. 3–15.
19. Антонов С.Г., Анциферов И.И., Климов С.М. Методика инструментально-расчетной оценки устойчивости объектов критической информационной инфраструктуры при информационно-технических воздействиях // Надежность. 2020. Т. 20. № 4. С. 35–41. DOI: 10.21683/1729-2646-2020-20-4-35-41.
20. Захарченко Р.И., Королев Р.И. Методика оценки устойчивости функционирования объектов критической информационной инфраструктуры, функционирующей в киберпространстве // Научные технологии в космических исследованиях Земли. 2018. Т. 10. № 2. С. 52–61.
21. Privalov A., Kotenko I., Saenko I., Evglevskaaya N., Titov D. Evaluating the functioning quality of data transmission networks in the context of cyberattacks // Energies. 2021. vol. 14(16). no. 4755. DOI: 10.3390/en14164755.
22. Краснов А.Е., Феоктистова Н.А. Оценка устойчивости критических информационных инфраструктур к угрозам информационной безопасности // Безопасность информационных технологий. 2021. Т. 28. № 1. С. 106–120. DOI: 10.26583/bit.2021.1.09.
23. Oszczypala M., Ziolkowski J., Malachowski J. Analysis of Light Utility Vehicle Readiness in Military Transportation Systems Using Markov and Semi-Markov Processes. Energies. 2022. vol. 15(14). no. 5062. DOI: 10.3390/en15145062.
24. Dhulipala S., Burton H., Baroud H. A Markov Framework for Generalized Post-Event Systems Recovery Modeling: From Single to Multihazards. Structural Safety. 2021. vol. 91. no. 102091. DOI: 10.1016/j.strusafe.2021.102091.
25. Fraccascia L., Giannoccaro I., Albino V. Resilience of Complex Systems: State of the Art and Directions for Future Research. Complexity. 2018. vol. 2018. DOI: 10.1155/2018/3421529.
26. Hu L., Liu X., Zhou K. A Semi-Markov Process Model for Performance Evaluation of DSRC Vehicular Safety Communication. Mathematical Problems in Engineering. 2022. vol. 2022. DOI: 10.1155/2022/7548608.
27. Ouyang M. Review on modeling and simulation of interdependent critical infrastructure systems. Reliability Engineering and System Safety. 2014. vol. 121. pp. 43–60.
28. Helfgott A. Operationalising systemic resilience. European Journal of Operational Research. 2018. vol. 268. no. 3. pp. 852–864.
29. Cere G., Rezgui Y., Zhao W. Critical review of existing built environment resilience frameworks: directions for future research. International Journal of Disaster Risk Reduction. 2017. vol. 25. pp. 173–189.
30. Hosseini S., Barker K., Ramirez-Marquez J.E. A review of definitions and measures of system resilience. Reliability Engineering and System Safety. 2016. vol. 145. pp. 47–61.
31. Righi A.W., Saurin T.A., Wachs P. A systematic literature review of resilience engineering: research areas and a research agenda proposal. Reliability Engineering and System Safety. 2015. vol. 141. pp. 142–152.

32. Li X., Xiao R. Analyzing network topological characteristics of eco-industrial parks from the perspective of resilience: A case study. *Ecological Indicators*. 2017. vol. 74. pp. 403–413.
33. Liu Q., Xing L., Zhou C. Probabilistic modeling and analysis of sequential cyber-attacks. *Engineering Reports*. 2019. vol. 1. no. 4. DOI: 1. 10.1002/eng2.12065.
34. Kordnoori S., Mostafaei H., Kordnoori S., Ostadrahimi M. Testing the Semi Markov Model Using Monte Carlo Simulation Method for Predicting the Network Traffic. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*. 2020. pp. 713–720. DOI: 10.18187/pjsor.v16i4.3394.
35. ФСТЭК РФ. Методический документ "Методика оценки угроз безопасности информации" (утв. Федеральной службой по техническому и экспортному контролю 5 февраля 2021 г.). URL: <https://fstec.ru/protivodejstvie-korrupsii/metodicheskie-materialy/metodicheskij-dokument> (дата обращения: 21.09.2023).
36. Voevodin V.A. Monte Carlo method for predicting the stability of the functioning of the informatization object in the conditions of massive computer attacks. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. vol. 2099. no. 1. DOI: 10.1088/1742-6596/2099/1/012070.

Воеводин Владислав Александрович — канд. техн. наук, доцент кафедры «информационная безопасность», Национальный исследовательский университет «МИЭТ». Область научных интересов: модели, методы и средства обеспечения аудита состояния объекта, находящегося под воздействием угроз нарушения его информационной безопасности, модели и методы оценки защищенности информации, в том числе в интересах страхования информационных рисков, методы оценки эффективности систем (комплексов) мер обеспечения информационной безопасности. Число научных публикаций — 60. vva541@mail.ru; Солнечная Аллея, 901, 124575, Москва-Зеленоград, Россия; р.т.: +7(985)787-1344.

Поддержка исследований. При поддержке Фонда Потанина.

V. VOEVODIN

A PRIVATE SEMI-MARKOV MODEL AS A TOOL TO REDUCE THE COMPLEXITY OF THE TASK OF ASSESSING THE STABILITY OF THE FUNCTIONING OF ELEMENTS OF THE INFORMATION INFRASTRUCTURE EXPOSED TO THREATS

Voevodin V. A Private Semi-Markov Model as a Tool to Reduce the Complexity of the Task of Assessing the Stability of the Functioning of Elements of the Information Infrastructure Exposed to Threats.

Abstract. Decision-making on information infrastructure (II) security for its sustainable functioning in the face of threats requires a tool to assess the sustainability of its individual elements. The application of the semi-Markov model to assess the stability of the functioning of elements of II exposed to threats in a direct setting is associated with the increasing complexity of the description of the object of delineation (parametric space) in step progression from the number of the considered impacts, which reduces its practical significance. However, no studies have been found in the scientific literature to reduce the complexity of the semi-Markov model. The article presents an approach to reducing the complexity of modeling by adopting correct assumptions when forming the initial data. Given the conditions under which it is possible to take a series. It was a cost to limit the applicability of the model by significantly reducing the complexity of the modelling. The problem statement and the modified transition graph are given. The novelty of the problem statement is to take into account the limitations on the available resources for the restoration of functionality of the element. To explain the physical essence of the modeling process, a thought experiment with a model is introduced. To solve the problem, the following methods were used: a) expert methods for extraction of initial data; b) mathematical models of private semi-Markov processes; c) methods of transformation of Laplace; r) methods of planning of experiment. Illustrative examples and graphs accompany the task sequence demonstration. As a result of the experiment, the regularities of the studied process, the existence of which was proved formally. As a result of the experiment, the regularities of the studied process were revealed, the existence of which was officially proved. The results of the study broaden knowledge about the application of methods of Markov processes to assess the stability of the functioning of AI elements in relation to the conditions of the impact of threats.

Keywords: Semimarkov process, complexity of evaluation, Laplace transformations, survivability function, stability of functioning, information infrastructure.

References

1. Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solov'ev A.D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical methods in reliability theory]. Moscow: Nauka. 1965. 524 p. (In Russ.).
2. Tihonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie process* [Markov processes]. Moscow: «Sov. radio». 1977. 488 p. (In Russ.).
3. Korolyuk V.S., Turbin A.F., *Polumarkovskie processy` i ix prilozheniya*. [Semi-Markov processes and their applications]. Kiev: «Naukova Dumka». 1976. 185 p. (In Russ.).
4. Hohlachev E.N. *Organizacija i tehnologii vyrabotki reshenij pri upravlenii sistemoj i vojskami svjazi. Chast' 2. Vyrabotka reshenij pri vosstanovlenii setej svjazi* [The organization and technologies of decision-making in the management of the communication system and troops. Part 2. Development of solutions for the

- restoration of communication networks]. Moscow: VA RVSN. 2009. 241 p. (In Russ.).
5. Peschanskij A.I. Polumarkovskie modeli profilaktiki nenadezhnoj odnokanalnoj sistemy obsluzhivaniya s poterjami [Semi-Markov models of prevention of unreliable single-channel lossy service system]. OOO "Nauchno-izdatel'skij centr Infra-M". 2022. 267 p. DOI 10.12737/1870597. (In Russ.).
 6. Privalov A.A., Milashevskij A.V. [An approach to modeling a special-purpose communication node vulnerable to destructive factors] Innovacionnaja zhelezjnaja doroga. Novejšie i perspektivnye sistemy obespečenija dvizhenija poezdov. problemy i reshenija: Sbornik statej Mezhdunarodnoj nauchno-teoreticheskoj konferencii [An innovative railway. The latest and promising train traffic support systems. Problems and solutions: Collection of articles of the International Scientific and Theoretical Conference]. 2021. pp. 308–315. (In Russ.).
 7. Yu S.-Z. Hidden Semi-Markov Models: Theory, Algorithms and Applications. Morgan Kaufmann, 2015. 208 p.
 8. Barbu V.S., Limnios N. Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications: their use in Reliability and DNA Analysis. Springer Science and Business Media. 2009. 226 p.
 9. Van der Hoek J., Elliott R.J. Introduction to Hidden Semi-Markov Models. Cambridge University Press. 2018. vol. 445. 185 p.
 10. Grabski F. Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance. Elsevier. 2014. 255 p.
 11. Obzherin Yu.E., Boyko E.G. Semi-Markov Models: Control of Restorable Systems with Latent Failures. Academic Press, 2015. 212 p.
 12. Voevodin V.A. [A Model for Assessing the Functional Stability of Information Infrastructure Elements for Conditions of Exposure to Multiple Computer Attacks]. Informatika i avtomatizacija – Informatics and Automation. 2023. vol. 22. no. 3. pp. 691–715. DOI: 10.15622/ia.22.3.8. (In Russ.).
 13. Voevodin V.A. [The genesis of the concept of structural stability of the information infrastructure of an automated production process management system to the impact of targeted threats to information security]. Vestnik Voronezhskogo instituta FSIN Rossii – Bulletin of the Voronezh Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia. 2023. no. 2. pp. 30–41.
 14. Voevodin V.A., Vinogradov I.V., Volkov D.I. [On the assessment of the stability of the functioning of an informatization object in the conditions of computer attacks with an exponential law of time distribution before the enemy's impact and restoration of operability]. Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo texničeskogo universiteta. Texničeskije nauki – Bulletin of the Dagestan State Technical University. Technical sciences. 2022. vol. 49. no. 3. pp. 39–51. DOI: 10.21822/2073-6185-2022-49-3-39-51. (In Russ.).
 15. Shubinskij I.B. Strukturnaya nadežnost' informacionny'x sistem. Metody' analiza [Structural reliability of information systems. Methods of analysis]. Moscow: Zhurnal Nadežnost', 2012. 216 p. (In Russ.).
 16. Shubinskij I.B. Funkcional'naya nadežnost' informacionnyh sistem. Metody analiza [Functional reliability of information systems. Methods of analysis]. Moscow: Zhurnal Nadežnost', 2012. 296 p. (In Russ.).
 17. Cherkesov G.N., Nedosekin A.O., Vinogradov V.V. [Analysis of functional survivability of structurally complex technical systems]. Nadežnost' – Reliability. 2018. vol. 18. no. 2. pp. 17–24. DOI: 10.21683/1729-2646-2018-18-2-17-24. (In Russ.).

18. Cherkesov G.N., Nedosekin A.O. [Description of an approach to assessing the survivability of complex structures under reusable high-precision impacts]. *Nadezhnost' – Reliability*. 2016. vol. 16. no. 2(57). pp. 3–15. (In Russ.).
19. Antonov S.G., Anciferov I.I., Klimov S.M. [The methodology of instrumental and computational assessment of the stability of critical information infrastructure facilities under information technology impacts]. *Nadezhnost' – Reliability*. 2020. vol. 20. no. 4. pp. 35–41. DOI: 10.21683/1729-2646-2020-4-35-41. (In Russ.).
20. Zaharchenko R.I., Korolev I.D. [Methodology for assessing the stability of the functioning of critical information infrastructure facilities operating in cyberspace]. *Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyah Zemli – High-tech technologies in space exploration of the Earth*. 2018. vol. 10. no. 2. pp. 52–61. (In Russ.).
21. Privalov A., Kotenko I., Saenko I., Evglevskaya N., Titov D. Evaluating the functioning quality of data transmission networks in the context of cyberattacks. *Energies*. 2021. vol. 14(16). no. 4755. DOI: 10.3390/en14164755.
22. Krasnov A.E., Feoktistova N.A. [Assessing the resilience of critical information infrastructures to information security threats]. *Bezopasnost' informacionnyh tekhnologii – Information technology security*. 2021. vol. 28. no. 1. pp. 106–120. DOI: 10.26583/bit.2021.1.09. (In Russ.).
23. Oszczypala M., Ziolkowski J., Malachowski J. Analysis of Light Utility Vehicle Readiness in Military Transportation Systems Using Markov and Semi-Markov Processes. *Energies*. 2022. vol. 15(14). no. 5062. DOI: 10.3390/en15145062.
24. Dhulipala S., Burton H., Baroud H. A Markov Framework for Generalized Post-Event Systems Recovery Modeling: From Single to Multihazards. *Structural Safety*. 2021. vol. 91. no. 102091. DOI: 10.1016/j.strusafe.2021.102091.
25. Fraccascia L., Giannoccaro I., Albino V. Resilience of Complex Systems: State of the Art and Directions for Future Research. *Complexity*. 2018. vol. 2018. DOI: 10.1155/2018/3421529.
26. Hu L., Liu X., Zhou K. A Semi-Markov Process Model for Performance Evaluation of DSRC Vehicular Safety Communication. *Mathematical Problems in Engineering*. 2022. vol. 2022. DOI: 10.1155/2022/7548608.
27. Ouyang M. Review on modeling and simulation of interdependent critical infrastructure systems. *Reliability Engineering and System Safety*. 2014. vol. 121. pp. 43–60.
28. Helfgott A. Operationalising systemic resilience. *European Journal of Operational Research*. 2018. vol. 268. no. 3. pp. 852–864.
29. Cere G., Rezgui Y., Zhao W. Critical review of existing built environment resilience frameworks: directions for future research. *International Journal of Disaster Risk Reduction*. 2017. vol. 25. pp. 173–189.
30. Hosseini S., Barker K., Ramirez-Marquez J.E. A review of definitions and measures of system resilience. *Reliability Engineering and System Safety*. 2016. vol. 145. pp. 47–61.
31. Righi A.W., Saurin T.A., Wachs P. A systematic literature review of resilience engineering: research areas and a research agenda proposal. *Reliability Engineering and System Safety*. 2015. vol. 141. pp. 142–152.
32. Li X., Xiao R. Analyzing network topological characteristics of eco-industrial parks from the perspective of resilience: A case study. *Ecological Indicators*. 2017. vol. 74. pp. 403–413.
33. Liu Q., Xing L., Zhou C. Probabilistic modeling and analysis of sequential cyber-attacks. *Engineering Reports*. 2019. vol. 1. no. 4. DOI: 1. 10.1002/eng2.12065.
34. Kordnoori S., Mostafaei H., Kordnoori S., Ostadrahimi M. Testing the Semi Markov Model Using Monte Carlo Simulation Method for Predicting the Network Traffic.

- Pakistan Journal of Statistics and Operation Research. 2020. pp. 713–720. DOI: 10.18187/pjsor.v16i4.3394.
35. FSTEK RF. Metodika ocenki ugroz bezopasnosti informacii [Methodology for assessing information security threats]. Available at: <https://fstec.ru/protivodejstvie-korrupcii/metodicheskie-materialy/metodicheskij-dokument> (accessed: 21.09.2023). (In Russ.).
 36. Voevodin V.A. Monte Carlo method for predicting the stability of the functioning of the informatization object in the conditions of massive computer attacks. Journal of Physics: Conference Series. 2021. vol. 2099. no. 1. DOI: 10.1088/1742-6596/2099/1/012070.

Voevodin Vladislav — Ph.D., Associate professor of the department, Department of «information security», National Research University «MIET». Research interests: models, methods and means of auditing the condition of an object under the influence of threats to its information security, models and methods for assessing the security of information, including in the interests of information risk insurance, methods for evaluating the effectiveness of systems (complexes) measures to ensure information security. The number of publications — 60. vva541@mail.ru; 901, Sunny Alley, 124575, Moscow-Zelenograd, Russia; office phone: +7(985)787-1344.

Acknowledgements. With the support of the Potanin Foundation.