

И.С. Полянский, К.О. Логинов
**ОПТИМАЛЬНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ОЦЕНОК
ИНФОРМАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОТИВОБОРСТВА**

Полянский И.С., Логинов К.О. Оптимальная нелинейная фильтрация оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства.

Аннотация. В статье разработано вычислительно эффективное алгоритмическое решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в обобщенной стохастической модели информационного противоборства. Сформированное решение применимо при наличии разнородных правил измерения параметров модели информационного противоборства, на основании которых составляется пара систем стохастических дифференциальных уравнений. Оценка информационного воздействия в модели оптимальной нелинейной фильтрации выполняется по критерию максимального правдоподобия по определяемой эволюции апостериорной условной функции плотности вероятности на заданном интервале наблюдения. Нахождение апостериорной условной функции плотности вероятности в заданный момент времени осуществляется с учетом теоремы сложения вероятностей, как вероятность суммы двух совместных событий, функции плотности которых устанавливаются из численного решения соответствующих робастных уравнений Дункана-Мортенсена-Закаи. Для первого события предполагается, что первая система стохастических дифференциальных уравнений является уравнением состояния, а вторая - уравнением наблюдения. Для второго события устанавливается их определение в обратном порядке. Решение робастного уравнения Дункана-Мортенсена-Закаи выполнено в постановке спектрального метода Галёркина при дискретизации интервала наблюдения на подынтервалы и сведении исходного решения к численному рекуррентному исследованию последовательности подзадач по так называемому Yau-Yau's алгоритму, предполагающему оценку вероятностной меры из решения прямого уравнения Колмогорова при ее последующей коррекции по наблюдению. Для выделения особенностей алгоритмической реализации составленного решения сформирован алгоритм оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в обобщенной стохастической модели информационного противоборства при уточнении листинга исполняющей его функции, который представлен псевдокодом. Для выявления предпочтительности составленного алгоритмического решения по оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия проведена серия вычислительных экспериментов на тестовых выборках большого объема. Результат оценки информационного воздействия, получаемый по предложенному алгоритму, сравнен с определяемым решением: 1) по средневыборочным значениям из моделей наблюдения; 2) ансамблем расширенным фильтром Калмана; 3) алгоритмом фильтрации, предполагающим численное исследование уравнения Дункана-Мортенсена-Закаи. По проведенному апостериорному исследованию выделены количественные показатели, устанавливающие выигрыш составленного алгоритма и границы его применимости.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, оценка информационного воздействия, стохастическая модель информационного противоборства, робастное уравнение Дункана-Мортенсена-Закаи, гауссовы базисные функции, спектральный метод Галёркина.

1. Введение. Постоянное расширение аудитории социальных сетей и мессенджеров обуславливает значительный рост их влияния на жизнь человека в обществе. Это стимулирует интерес ученых к исследованию процессов информационного воздействия социальных медиа на формирование общественного мнения [1–6]. Наличие у платформ социальных медиа открытого описания способов программного взаимодействия (API – application programming interface) при одновременном развитии сторонних библиотек и расширений (numpy, requests, pandas, seaborn, networkx и пр.) высокоуровневых языков (python), автоматизирующих рутинные функции обработки, визуализации и анализа данных [7], увеличивает мотивацию подобных исследований с позиции формализации представлений при применении, совершенствовании и разработке методов математического моделирования информационного противоборства и управления в структурированном социуме.

Методологическую основу формализованного исследования социальных медиа при построении математических моделей информационного противоборства и управления составляют теории вероятностей [5, 6, 8], игр [2], графов [2, 9] и дифференциальных уравнений [3, 4, 10]. Основные подходы математических представлений по получению оценок информационного воздействия базируются на анализе активных сетевых структур [3] и дифференциальных уравнений [2]. С позиции относительной простоты и точности модели анализа реальной социальной сети в условиях неоднозначности и неполноты информации атрибутивного пространства взаимодействующих пользователей первичной предпочтительностью обладает математическая формализация, основанная на представлениях систем дифференциальных уравнений – модели информационного противоборства в структурированном социуме [2, 4, 10]. Их математическую запись, обобщенно учитывающую выделенные в [2, 4, 10] факторы распространения информации в социуме, можно определить в следующем виде [11]:

$$\frac{dx_{mk}(t)}{dt} = y_{mk}(t) \left[\alpha_{mk}(t) + \sum_{m'=1}^M \beta_{m'm}(t)x_{m'k}(t) \right] - \gamma_{mk}(t)x_{mk}(t); \tag{1}$$

$$\frac{dy_{mk}(t)}{dt} = -\frac{dx_{mk}(t)}{dt} - \gamma_{mk}(t)y_{mk}(t) + \left[\alpha_{mk}(t) + \sum_{m'=1}^M \beta_{m'm}(t)x_{m'k}(t) \right] \left[N_m - \sum_{k'=1}^K (x_{mk'}(t) + y_{mk'}(t)) \right],$$

где $m', m \in \{\overline{1, M}\}$; $k = \overline{1, K}$; K – число субъектов, в отношении которых в социуме формируются предпочтения у индивидов; M – число подгрупп, выделяемых в социуме; N_m – число индивидов в m -й подгруппе при обозначении $N_0 = \sum_{m=1}^M N_m$ общей численности социума; x_{mk} и y_{mk} – число адептов и предадептов соответственно k -го субъекта из m -й подгруппы социума; α_{mk} и γ_{mk} – интенсивности положительной и отрицательной информации, распространяемой внешними источниками в отношении k -го субъекта при учете особенности их восприятия индивидами m -й подгруппы; $\beta_{m'm}$ – интенсивность межличностной коммуникации индивидов m' -й и m -й подгрупп; $t \in [t_0, t_1]$ – момент времени ($[t_0, t_1]$ – временной интервал анализа).

Отдельно следует уточнить, что в формируемом решении на основе математических приближений вида (1) не исключается возможность комбинации моделей информационного противоборства в структурированном социуме с активными сетевыми структурами, к примеру, применяемыми для оценки измеряемых параметров α_{mk} , β_{mk} , γ_{mk} [12]. Недостаток моделей информационного противоборства в структурированном социуме [2, 4, 10] состоит в детерминированном определении их параметров (α_{mk} , β_{mk} , γ_{mk}), что не позволяет в полной мере оценить степень различия между исходными факторами (x_{mk} , y_{mk}) конкурирующих субъектов.

Для устранения указанного недостатка в работах [11, 13, 14] в развитие [2, 4, 10] предложено вводить флуктуацию в измеряемые параметры модели – интенсивности α_{mk} и γ_{mk} . При этом за методологическую основу составления стохастических математических моделей в [11, 13, 14] выбрана теория марковских процессов и процессов диффузионного типа [15, 16]. Для увеличения точности оценки x_{mk} , y_{mk} на фоне наблюдаемых α_{mk} , γ_{mk} , содержащих стохастические компоненты с параметрами отличными от нормального закона распределения [17], в [18] при введении дополнительного фиктивного стохастического дифференциального уравнения состояния разработана схема нелинейной фильтрации. Она предполагает сведение задачи анализа исходного стохастического дифференциального уравнения к численному решению уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи [19] спектральным методом Галёркина [20].

Основной недостаток решения [18] заключается в фиктивном введении стохастического дифференциального уравнения состояния (составляется из исходного при оценке стохастических компонент наблюдаемых интенсивностей агитации методами полиспектрального

анализа [21]) в формировании модели оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия.

Цель настоящей статьи состоит в устранении указанного недостатка [18] при разработке вычислительно эффективного решения обобщенной задачи оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастических моделях информационного противоборства. Для достижения сформулированной цели в развитие результатов [18] необходимо решить следующие задачи:

1) формализовать постановку задачи оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства, не предполагающую введения фиктивного стохастического дифференциального уравнения состояния;

2) в разрабатываемой задаче оптимальной нелинейной фильтрации при определении эволюции функции плотности вероятности уточнить особенности применения робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи [22];

3) определить численную схему решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации и при систематизированном представлении последовательности действий по получению оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства, уточнении и конкретизации особенностей программной реализации составить соответствующий вычислительный алгоритм;

4) выполнить сравнительное апостериорное исследование разработанного алгоритмического решения при выделении особенностей по устойчивости предложенной численной схемы и точности получаемых оценок.

Для общности представлений стохастической модели информационного противоборства, в отличие от [18] установим зависимости от времени и наличие стохастической компоненты в интенсивности межличностной коммуникации $\beta_{m'm}$.

2. Постановка задачи оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства. Рассмотрим динамическую модель вида (1) для начальных условий $x_{mk}(t_0) = y_{mk}(t_0) = 0$, положив, что значения интенсивностей α_{mk} , $\beta_{m'm}$, γ_{mk} зависят от t и складываются из истинных величин $0 \leq \alpha_{mk}^0(t)$, $\beta_{m'm}^0(t)$, $\gamma_{mk}^0(t) < \infty$ и шумов наблюдения $\tilde{\alpha}_{mk}(t)$, $\tilde{\beta}_{m'm}(t)$, $\tilde{\gamma}_{mk}(t)$ с соответствующими статистическими параметрами: $\mathbb{E}[\tilde{\alpha}_{mk}] = \mathbb{E}[\tilde{\beta}_{m'm}] = \mathbb{E}[\tilde{\gamma}_{mk}] = 0$;
 $\text{cov}[\tilde{\alpha}_{mk}, \tilde{\alpha}_{m'k'}] = dt \cdot \varepsilon_{\alpha km'k'}^{\alpha}$; $\text{cov}[\tilde{\beta}_{m'm}, \tilde{\beta}_{j'j}] = dt \cdot \varepsilon_{m'm'j'j}^{\beta}$;

$\text{cov} [\tilde{\gamma}_{mk}, \tilde{\gamma}_{m'k'}] = dt \cdot \varepsilon_{mkm'k'}^\gamma$ ($k, k' \in \{\overline{1, K}\}$; $m, m', j, j' \in \{\overline{1, M}\}$).
 Опираясь на представления [11, 13, 14, 18], запишем (1) в виде системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$d\vec{Z} = \vec{A} \left(\vec{Z}, \mathbf{A}^0, \mathbf{B}^0, \mathbf{\Gamma}^0, t \right) dt + \Sigma \left(\vec{Z}, t \right) d\vec{W}, \quad (2)$$

где $\mathbf{A}^0 = (\alpha_{mk}^0)_{M \times K}$; $\mathbf{B}^0 = (\beta_{m'm}^0)_{M \times M}$; $\mathbf{\Gamma}^0 = (\gamma_{mk}^0)_{M \times K}$.

Способы определения элементов вектора переменных \vec{Z} , вектора сноса \vec{A} , диффузионной матрицы Σ и вектора шума \vec{W} , с учетом (1) и представлений [11, 13, 14, 18], уточнены в приложении.

Уравнение (2) устанавливает правило измерения численности адептов и предадептов в структурированном социуме при наблюдаемых интенсивностях α_{mk} , $\beta_{m'm}$, γ_{mk} . Потенциально соответствующие параметры α_{mk} , $\beta_{m'm}$, γ_{mk} возможно определять различными методами при обеспечении условия некоррелированности шумов наблюдения. Так, например, интенсивности α_{mk} и γ_{mk} распространения положительной и отрицательной информации о k -м кандидате в m -й подгруппе социума допустимо задавать отношением числа сообщений соответствующей тональности (положительная и отрицательная) к периоду времени наблюдения при учете их объема и вероятностных характеристик тональной оценки [18]. При этом соответствующая вероятностная оценка отдельного сообщения может получаться при применении различных алгоритмических решений. Они, например, программно-реализованы в таких библиотеках python как Dostoevsky, TextBlob, BERT, ruGPT-3 или представлены в виде самостоятельных программ [18, 23]. Их основу составляют алгоритмы машинного обучения и словарные методы [23]. Также и величина $\beta_{m'm}$ может определяться различными не взаимоувязанными способами. Частное решение по нахождению $\beta_{m'm}$ приведено в [24].

Указанное позволяет справедливо предположить о наличии второго независимого от первого правила наблюдения α'_{mk} , $\beta'_{m'm}$, γ'_{mk} соответствующих параметров интенсивностей α_{mk} , $\beta_{m'm}$, γ_{mk} в модели (1) при неопределенности в предпочтительности первого и второго правил наблюдения. При этом аналогично α_{mk} , $\beta_{m'm}$, γ_{mk} интенсивности α'_{mk} , $\beta'_{m'm}$, γ'_{mk} складываются из истинных величин α_{mk}^0 , $\beta_{m'm}^0$, γ_{mk}^0 и шумов наблюдения $\tilde{\alpha}'_{mk}(t)$, $\tilde{\beta}'_{m'm}(t)$, $\tilde{\gamma}'_{mk}(t)$ с соответствующими статистическими параметрами: $\mathbb{E}[\tilde{\alpha}'_{mk}] = \mathbb{E}[\tilde{\beta}'_{m'm}] = \mathbb{E}[\tilde{\gamma}'_{mk}] = 0$;
 $\text{cov} [\tilde{\alpha}'_{mk}, \tilde{\alpha}'_{m'k'}] = dt \cdot \varepsilon_{mkm'k'}^{\prime\alpha}$; $\text{cov} [\tilde{\beta}'_{m'm}, \tilde{\beta}'_{j'j}] = dt \cdot \varepsilon_{m'm'j'j}^{\prime\beta}$;

$\text{cov} [\tilde{\gamma}'_{mk}, \tilde{\gamma}'_{m'k'}] = dt \cdot \varepsilon'_{mkm'k'}$. В этой связи, запишем вторую систему стохастических дифференциальных уравнений наблюдения за численностью адептов:

$$d\vec{Z}' = \vec{A}(\vec{Z}', \mathbf{A}^0, \mathbf{B}^0, \mathbf{\Gamma}^0, t) dt + \Sigma'(\vec{Z}', t) d\vec{V}, \quad (3)$$

где элементы вектора переменных \vec{Z}' , вектора сноса \vec{A} , диффузионной матрицы Σ' и вектора шума \vec{V} , задаются аналогичным (2) способом (см. приложение) при учете правил определения α'_{mk} , $\beta'_{m'm}$, γ'_{mk} .

Уточним, что уравнения (2), (3) будем понимать в смысле Ито [16].

Задача фильтрации состоит в получении оценок $\hat{Z} = (\hat{Z}_l)_d$ числа адептов и предадептов k -го субъекта m -й подгруппы в момент времени $t \in [t_0, t_1]$ из заданных уравнений (2), (3). Оценку \hat{Z} выполним по критерию максимального правдоподобия:

$$\hat{Z} = \arg \max_{\vec{Z} \in \Omega} [p(\vec{Z}, t)], \quad (4)$$

где $p(\vec{Z}, t)$ – апостериорная условная функция плотности вероятности распределения $\vec{Z} \in \Omega$.

Функцию $p(\vec{Z}, t)$ при $p(\vec{Z}, t) = \phi(\vec{Z}, t) / \int_{\Omega} \phi(\vec{Z}, t) d\vec{Z}$ определим по теореме сложения вероятностей [26] из:

$$\phi(\vec{Z}, t) = p_1(\vec{Z}, t) + p_2(\vec{Z}, t) - p_1(\vec{Z}, t)p_2(\vec{Z}, t), \quad (5)$$

как вероятность суммы двух совместных событий, наступающих при составлении следующих двух пар уравнений состояния и наблюдения для формирования модели оптимальной нелинейной фильтрации: 1) уравнение (2) задается состоянием, а (3) – наблюдением; 2) уравнения состояния и наблюдения определяются в обратном порядке.

В этом случае, эволюцию апостериорных условных функций плотности распределения вероятностей $p_1(\vec{Z}, t)$, $p_2(\vec{Z}, t)$ из (5) при

$p_{1,2}(\vec{Z}, t) = \phi_{1,2}(\vec{Z}, t) / \int_{\Omega} \phi_{1,2}(\vec{Z}, t) d\vec{Z}$ и заданном начальном условии $\phi_{1,2}(\vec{Z}, t_0) = p_0(\vec{Z})$ определим из решения уравнений типа Дункана–Мортенсена–Закаи (ДМЗ) [18, 19]:

$$d\phi_{1,2}(\vec{Z}, t) = \mathcal{L}_{1,2}[\phi_{1,2}(\vec{Z}, t)] dt + \phi_{1,2}(\vec{Z}, t) [\vec{A}_{2,1}(\vec{Z}, t)]^T [\mathbf{D}^{(2,1)}(t)]^{-1} d\vec{Z}_{2,1}, \quad (6)$$

где $\vec{A}_1(\vec{Z}, t) = \vec{A}(\vec{Z}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Gamma}, t)$; $\vec{A}_2(\vec{Z}, t) = \vec{A}(\vec{Z}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{\Gamma}', t)$; $\mathbf{A} = (\alpha_{mk})_{M \times K}$; $\mathbf{B} = (\beta_{m'm})_{M \times M}$; $\mathbf{\Gamma} = (\gamma_{mk})_{M \times K}$; $\mathbf{A}' = (\alpha'_{mk})_{M \times K}$; $\mathbf{B}' = (\beta'_{m'm})_{M \times M}$; $\mathbf{\Gamma}' = (\gamma'_{mk})_{M \times K}$; $\mathbf{D}^{(1)} = (D_{ll'}^{(1)})_{d \times d} = \Sigma \Sigma^T$; $\mathbf{D}^{(2)} = (D_{ll'}^{(2)})_{d \times d} = \Sigma' \Sigma'^T$; $d\vec{Z}_{2,1}$ – приращение вектора \vec{Z} , определяемое уравнениями (3), (2) соответственно; $\mathcal{L}_{1,2}[\phi]$ – диффузионные операторы Фоккера–Планка–Колмогорова [19]:

$$\mathcal{L}_{1,2}[\phi] = - \sum_{l=1}^d \frac{\partial}{\partial Z_l} [\vec{A}_{1,2} \phi] + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^d \sum_{l'=1}^d \frac{\partial^2}{\partial Z_l \partial Z_{l'}} [D_{ll'}^{(1,2)} \phi]. \quad (7)$$

Уточним, что в заданных в выражении (6) обозначениях для определения функции ϕ_1 используются операторы и функции с соответствующим первым индексом – \mathcal{L}_1 , \vec{A}_2 , $\mathbf{D}^{(2)}$ и $d\vec{Z}_2$. Для нахождения ϕ_2 применяются компоненты из (6) с соответствующим вторым индексом. В последующих соотношениях будем придерживаться указанного правила.

Сформированные представления (4)–(6) формализуют исходную постановку задачи оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства при выполнении условий нормировки [13, 14]: $\int_{\Omega} p(\vec{Z}, t) d\vec{Z} = 1$; $\int_{\Omega} p_{1,2}(\vec{Z}, t) d\vec{Z} = 1$; $p(\vec{Z}, t) \geq 0$; $p_{1,2}(\vec{Z}, t) \geq 0$.

Следуя результатам [25, 27], для повышения точности численного решения задачи нелинейной фильтрации при снижении чувствительности

фильтра к дискретному во времени изменению траектории наблюдения для $\rho_{1,2}(\vec{Z}, t_0) = p_0(\vec{Z})$ уравнение (6) представим в робастном виде [27]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{A}_{2,1}^T [\mathbf{D}^{(2,1)}]^{-1} \right)^T \vec{Z}_{2,1} \rho_{1,2} + \\ & + \exp \left\{ -\vec{A}_{2,1}^T [\mathbf{D}^{(2,1)}]^{-1} \vec{Z}_{2,1} \right\} \left[\mathcal{L}_{1,2} - \frac{1}{2} \vec{A}_{2,1}^T [\mathbf{D}^{(2,1)}]^{-1} \vec{A}_{2,1} \right] \times \\ & \times \left[\exp \left\{ \vec{A}_{2,1}^T [\mathbf{D}^{(2,1)}]^{-1} \vec{Z}_{2,1} \right\} \rho_{1,2} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

при обозначении:

$$\phi_{1,2} = \exp \left\{ -\vec{A}_{2,1}^T [\mathbf{D}^{(2,1)}]^{-1} \vec{Z}_{2,1} \right\} \rho_{1,2}. \quad (9)$$

Для заданной постановки задачи (4), (5), (8), (9), учитывая результаты [11, 13, 14, 18, 25, 27], сформируем численную схему оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства.

3. Численное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства. Наибольшую трудоемкость и основу в сформированной задаче фильтрации (4), (5), (8), (9) составляет решение уравнения (8). Его исследование выполним в постановке спектрального метода Галёркина [20] при дискретизации интервала наблюдения $[t_0, t_1]$ на тактовые подынтервалы $t \in [\tau_n, \tau_{n+1}]$ ($\Delta t = \tau_{n+1} - \tau_n$; $n = 0, N-1$; $N = (t_1 - t_0) / \Delta t$) [28]. Следуя утверждению 1 [25] (утверждение 2.1 [27]), для заданной дискретизации $t \in [\tau_n, \tau_{n+1}]$ в формируемом численном решении сведем задачу (8), (9) к рекуррентному решению последовательности подзадач, составляющих основу Yau-Yau's алгоритма [25]:

$$\begin{aligned} \phi_{1,2}^n(\vec{Z}, \tau_{n-1}) = & \phi_{1,2}^{n-1}(\vec{Z}, \tau_{n-1}) \times \\ & \times \exp \left\{ \left[\vec{A}_{2,1}(\vec{Z}, \tau_{n-1}) \right]^T [\mathbf{D}^{(2,1)}(\tau_{n-1})]^{-1} d\vec{Z}_{2,1}(\tau_{n-1}) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где при $\phi_{1,2}^1(\vec{Z}, \tau_0) = \phi_{1,2}^1(\vec{Z}, t_0) = p_0(\vec{Z})$ значения $\phi_{1,2}^{n-1}(\vec{Z}, \tau_{n-1})$ определяются из решения прямого уравнения Колмогорова [25]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{1,2}^{n-1}(\vec{Z}, t) &= \mathcal{L}_{1,2} \left[\phi_{1,2}^{n-1}(\vec{Z}, t) \right] - \\ &- \frac{1}{2} \phi_{1,2}^{n-1}(\vec{Z}, t) \left[\vec{A}_{2,1}(\vec{Z}, t) \right]^T \left[\mathbf{D}^{(2,1)}(t) \right]^{-1} \vec{A}_{2,1}(\vec{Z}, t). \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая результаты [13, 14, 18], решение прямого уравнения Колмогорова (11) выполним численно при введении следующих представлений.

Зададим разбиение $\Omega = \bigcup_{u=1}^U \omega^{(u)}$ набором из U симплексов $\omega^{(u)} = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \zeta_i^{(u)} P_i^{(u)} : \left(\sum_{i=1}^{d+1} \zeta_i^{(u)} = 1 \right) \wedge \left(\forall i = \overline{1, d+1}, \zeta_i^{(u)} \geq 0 \right) \right\} \subset \mathbb{R}^d$ ($u = \overline{1, U}$) с $d + 1$ вершинами $P_1^{(u)}, P_2^{(u)}, \dots, P_{d+1}^{(u)}$ и барицентрическими координатами $\zeta_1^{(u)}, \dots, \zeta_{d+1}^{(u)}$ при $\omega^{(u)} \cap \omega^{(u')} = \emptyset$ ($u \neq u'; u, u' \in \{ \overline{1, U} \}$).

Обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ скалярное произведение:

$$\langle \eta, \phi \rangle_\Omega = \int_\Omega \eta(\vec{Z}) \phi(\vec{Z}) d\vec{Z}, \quad (12)$$

для некоторых функций η и ϕ .

Зададим аппроксимацию $\tilde{\phi}_{1,2}^n(\vec{Z}, t)$ ненормированных функций $\phi_{1,2}^n(\vec{Z}, t)$ плотности вероятности:

$$\tilde{\phi}_{1,2}^n(\vec{Z}, t) = \sum_{u=1}^U \sum_{j \in \mathbb{J}_r^d} c_{uj}^{(1,2)}(t) \psi_j^{(u)}(\vec{Z}), \quad (13)$$

подстановка которых в (11) в проекционном представлении метода Галёркина сведет исходную к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \vec{C}^{(1,2)}(t) = \mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{L}^{(1,2)}(t) - \mathbf{Q}^{(1,2)}(t) \right) \vec{C}^{(1,2)}(t); \quad (14)$$

$$\vec{C}^{(1,2)}(0) = \mathbf{S}^{-1} \vec{G}.$$

В выражениях (13), (14) приняты следующие обозначения: $\vec{G} = \text{vec}(\mathbf{G})$ при $\mathbf{G} = \left(\left\langle p_0, \psi_j^{(u)} \right\rangle_{\Omega} \right)_{U \times |\mathbb{J}_r^d|}$; $\text{vec}(\cdot)$ – операция векторизации матрицы; $\vec{C}^{(1,2)} = \text{vec}(\mathbf{C}^{(1,2)})$ – вектор искомых коэффициентов разложения, зависящих от t , при $\mathbf{C}^{(1,2)} = \left(c_{uj}^{(1,2)} \right)_{U \times |\mathbb{J}_r^d|}$; $\mathbf{L}^{(1,2)} = \left(\left\langle \psi_j^{(u)}, \mathcal{L}_{1,2} \left[\psi_{j'}^{(u')} \right] \right\rangle_{\Omega} \right)_{U_r \times U_r}$; $\mathbf{Q}^{(1,2)} = \left(\left\langle \psi_j^{(u)}, \mathbf{A}_{2,1}^T [\mathbf{D}^{(2,1)}(t)]^{-1} \mathbf{A}_{2,1} \psi_{j'}^{(u')} \right\rangle_{\Omega} \right)_{U_r \times U_r}$; $\mathbf{S} = \left(\left\langle \psi_j^{(u)}, \psi_{j'}^{(u')} \right\rangle_{\Omega} \right)_{U_r \times U_r}$; $U_r = U | \mathbb{J}_r^d |$; $u, u' \in \{\overline{1, U}\}$; \mathbb{J}_r^d – множество мультииндексов $j, j' \in \mathbb{J}_r^d$ [13, 14]:

$$\mathbb{J}_r^d = \left\{ j = (j_1, \dots, j_i, \dots, j_{d+1}) : j_i \in \mathbb{Z}_+, \sum_{i=1}^{d+1} j_i = r \right\}, \quad (15)$$

где $r \in \mathbb{N}$ – порядок аппроксимации на $\omega^{(u)}$; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\psi_j^{(u)}$ – базисная функция частичной подобласти $\omega^{(u)} \in \Omega$, которую зададим произведением:

$$\psi_j^{(u)} = \prod_{i=1}^{d+1} \varphi_{j_i}, \quad (16)$$

Гауссовых базисных функций [29]:

$$\varphi_{j_i} = \exp \left\{ - \frac{[2j_i + 1 - 2\zeta_i(r+1)]^2}{2(d+1)} \right\}. \quad (17)$$

Принимая во внимание заданную дискретизацию временного интервала анализа и выбранную рекуррентную схему (10) оценки

$\phi_{1,2}$, решение обыкновенного дифференциального уравнения (14) для соблюдения компромисса между точностью, вычислительной устойчивостью и сложностью выполним методом Эйлера [30]:

$$\vec{C}_n^{(1,2)} = \vec{C}_{n-1}^{(1,2)} + \Delta t \left\{ \mathbf{S}^{-1} \left[\left(\mathbf{L}_{n-1}^{(1,2)} - \mathbf{Q}_{n-1}^{(1,2)} \right) \vec{C}_{n-1}^{(1,2)} \right] \right\}, \quad (18)$$

где $\vec{C}_n^{(1,2)} \equiv \vec{C}^{(1,2)}(\tau_n)$; $\mathbf{L}_n^{(1,2)} \equiv \mathbf{L}^{(1,2)}(\tau_n)$; $\mathbf{Q}_n^{(1,2)} \equiv \mathbf{Q}^{(1,2)}(\tau_n)$.

Вычисленные выражением (17) коэффициенты $\vec{C}_n^{(1,2)}$, с учетом (10) и аппроксимации (13), нормируются по правилу:

$$\vec{C}_n^{(1,2)} = \vec{C}_n^{(1,2)} / \left(\vec{C}_n^{(1,2)} \vec{\Psi} \right), \quad (19)$$

а затем уточняются соотношением:

$$\vec{C}_n^{(1,2)} = \mathbf{S}^{-1} \left[\mathbf{Q}_n^{(1,2)} \vec{C}_n^{(1,2)} \right], \quad (20)$$

где $\mathbf{Q}'^{(1,2)} = \left(\left\langle \psi_j^{(u)}, \exp \left\{ \vec{A}_{2,1}^\Gamma [\mathbf{D}^{(2,1)}]^{-1} d\vec{Z}_{2,1} \right\} \psi_{j'}^{(u')} \right\rangle_\Omega \right)_{U_r \times U_r}$ при $\mathbf{Q}_n^{(1,2)} \equiv \mathbf{Q}'^{(1,2)}(\tau_n)$ и рассчитываемых элементов $\vec{A}_{2,1}$, $\mathbf{D}^{(2,1)}$, $d\vec{Z}_{2,1}$ в момент времени τ_n ; $\vec{\Psi} = \text{vec}(\tilde{\Psi})$ при $\tilde{\Psi} = \left(\tilde{\Psi}_{uj} \right)_{U \times |\mathbb{J}_r^d|}$ для $\tilde{\Psi}_{uj} = \int_{\omega^{(u)}} \psi_j^{(u)}(\vec{Z}) d\vec{Z}$.

Определение искомой функции плотности вероятностей $p(\vec{Z}, t)$ в момент времени τ_n осуществляется при ее аналогичной (13) аппроксимации $\tilde{p}(\vec{Z}, t) = \sum_{u=1}^U \sum_{j \in \mathbb{J}_r^d} c_{uj}(t) \psi_j^{(u)}(\vec{Z})$, где коэффициенты c_{uj} для $\vec{C} = \text{vec}(\mathbf{C})$ и $\mathbf{C} = (c_{uj})_{U \times |\mathbb{J}_r^d|}$ задаются при дополнительной нормировки (19) полученных $\vec{C}_n^{(1,2)}$ из (20) по правилу:

$$\vec{C}_n = \vec{C}_n^{(1)} + \vec{C}_n^{(2)} - \mathbf{S}^{-1} \vec{C}_n; \quad \vec{C}_n = \vec{C}_n / \left(\vec{C}_n \vec{\Psi} \right), \quad (21)$$

где $\vec{C}_n \equiv \vec{C}(\tau_n)$; $\vec{C}_n \equiv \vec{C}(\vec{C}_n, \tau_n)$ для $\vec{C}_n = \text{vec}(\tilde{C}_n)$ при $\tilde{C}_n = \left(\left\langle \tilde{\phi}_1^n, \tilde{\phi}_2^n, \psi_j^{(u)} \right\rangle_{\Omega} \right)_{U \times |\mathbb{J}_r^d|}$.

Поиск максимума (4) осуществляется методом Ньютона [31] для начального приближения $\hat{\vec{Z}}^0$, выбираемого с учетом следующего выражения: $\hat{\vec{Z}}^0 = \sum_{u=1}^U \sum_{j \in \mathbb{J}_r^d} c_{uj} \Psi_j^{(u)}$, где $\Psi_j^{(u)} = \int_{\omega^{(u)}} \vec{Z} \psi_j^{(u)}(\vec{Z}) d\vec{Z}$.

В целом, перечисленные правила вычисления эволюции функции плотности вероятности $p(\vec{Z}, \tau_n)$ и оценки $\hat{\vec{Z}}$ составляют суть численного решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства. Исследование вопросов существования, единственности и сходимости сформированного численного решения при неизменности операторных представлений в (11) и выбранной системы базисных функций согласуется с результатами [13, 14, 18]. Задание элементов векторов и матриц в (18), (20) обеспечивается численным вычислением интегралов вида (12) с применением кубатурных формул [14] для симплексов [32]. Также для минимизации вычислительных затрат при расчете матриц \mathbf{S} , $\mathbf{Q}_n^{(1,2)}$, \tilde{C}_n из (18), (20), (21) соответственно учитывается их симметричность, а нахождение элементов матриц \mathbf{S} , \tilde{C}_n реализуется аналитически через функции ошибок (используются результаты, полученные при доказательстве лемм из [13]). Последнее определяет дополнительную предпочтительность применения в качестве аппроксимирующих полиномов Гауссовых базисных функций (16) в сравнении с другими видами специальных функций [33]. Алгоритм разбиения $\Omega = \bigcup_{u=1}^U \omega^{(u)}$ набором из U симплексов при формировании триангуляции [34] уточнен в [14]. Эффективный алгоритм формирования множества мультииндексов (15) приведен в [35].

Для систематизированного представления последовательности действий получения $\hat{\vec{Z}}$ по составленному численному решению, приведем алгоритм оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства. При формировании алгоритма используем результаты [13, 14, 18, 36].

4. Алгоритм оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства. Входными данными

алгоритма являются: 1) временной интервал анализа $[t_0, t_1]$; 2) число отсчетов дискретизации N ; 3) число K субъектов, в отношении которых формируются предпочтения у индивидов; 4) количество M подгрупп в социуме; 5) численность индивидов N_m в m -х подгруппах социума; 6) порядок аппроксимации r ; 7) разбиение $\Omega = \bigcup_{u=1}^U \omega^{(u)}$;

8) наблюдаемые матричные функции интенсивностей $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{\Gamma}'$; 9) начальное распределение функции плотности вероятности $p(\vec{Z}, t_0) = p_0(\vec{Z}) = \frac{1}{\sigma_0} \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{Z}^T \Sigma_0^{-1} \vec{Z})\right]$, где σ_0 – нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение условия $\int_{\Omega} p_0(\vec{Z}) d\vec{Z} = 1$;

$$\Sigma_0 = (\Sigma_{ll'})_{d \times d}$$

Выделим основные этапы работы алгоритма, полагая неизвестными параметры $\varepsilon_{mkm'k'}^{\alpha}, \varepsilon_{m'm'j'j}^{\beta}, \varepsilon_{mkm'k'}^{\gamma}, \varepsilon_{mkm'k'}^{\prime\alpha}, \varepsilon_{m'm'j'j}^{\prime\beta}, \varepsilon_{mkm'k'}^{\prime\gamma}$.

Шаг 1. Методом полиспектрального анализа [18, 21] в отношении функций $\alpha_{mk}, \beta_{m'm}, \gamma_{mk}, \alpha'_{mk}, \beta'_{m'm}, \gamma'_{mk}$ выполнить оценку соответствующих величин интенсивностей $\hat{\alpha}_{mk}^0, \hat{\beta}_{m'm}^0, \hat{\gamma}_{mk}^0, \hat{\alpha}'_{mk}, \hat{\beta}'_{m'm}, \hat{\gamma}'_{mk}$ и усреднением $\alpha_{mk}^0 = 0,5(\hat{\alpha}_{mk}^0 + \hat{\alpha}'_{mk}^0)$, $\beta_{m'm}^0 = 0,5(\hat{\beta}_{m'm}^0 + \hat{\beta}'_{m'm}^0)$, $\gamma_{mk}^0 = 0,5(\hat{\gamma}_{mk}^0 + \hat{\gamma}'_{mk}^0)$ определить приближения для соответствующих истинных значений интенсивностей.

Шаг 2. По средневыборочным правилам [35] для $\alpha_{mk}, \beta_{m'm}, \gamma_{mk}, \alpha'_{mk}, \beta'_{m'm}, \gamma'_{mk}$ и найденных $\alpha_{mk}^0, \beta_{m'm}^0, \gamma_{mk}^0$ определить оценку соответствующих параметров $\varepsilon_{mkm'k'}^{\alpha}, \varepsilon_{m'm'j'j}^{\beta}, \varepsilon_{mkm'k'}^{\gamma}, \varepsilon_{mkm'k'}^{\prime\alpha}, \varepsilon_{m'm'j'j}^{\prime\beta}, \varepsilon_{mkm'k'}^{\prime\gamma}$ для задания ковариационных матриц шума $\mathbf{D}^{(1,2)}$.

Шаг 3. Положить $n = 0$ и установить начальные значения $\vec{Z}_n = 0, \vec{Z}_n^{(1,2)} = 0, \hat{Z}_n = 0$.

Шаг 4. При заданной $p_0(\vec{Z})$ определить $\vec{C}_n = \vec{C}_n^{(1,2)} = \mathbf{S}^{-1} \vec{G}$.

Шаг 5. Для момента времени τ_n вычислить ковариационные матрицы $\mathbf{D}_n^{(1,2)}$.

Шаг 6. По методу Эйлера (Эйлера–Маруямы [37]) выполнить экстраполяцию $\vec{Z}_{n+1}^{(1,2)}$ с учетом моделей (2), (3):

$$\vec{Z}_{n+1}^{(1)} = \vec{Z}_n^{(1)} + \Delta t \vec{A}(\vec{Z}_n^{(1)}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Gamma}, \tau_n); \tag{22}$$

$$\vec{Z}_{n+1}^{(2)} = \vec{Z}_n^{(2)} + \Delta t \vec{A}(\vec{Z}_n^{(2)}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{\Gamma}', \tau_n).$$

Шаг 7. Учитывая представления (14), (18), для τ_n рассчитать матрицы $\mathbf{L}_n^{(1,2)}$, $\mathbf{Q}_n^{(1,2)}$.

Шаг 8. Если $n > 0$, то:

а) принимая во внимание (20), рассчитать:

$$\vec{C}_n^{(1,2)} = \mathbf{S}^{-1} \left[\mathbf{Q}_n'^{(1,2)} \vec{C}_n^{(1,2)} \right],$$

где $\mathbf{Q}_n'^{(1,2)} \equiv \mathbf{Q}'^{(1,2)}(\tau_n)$,

при $\mathbf{Q}'^{(1,2)} = \left(\left\langle \psi_j^{(u)}, \exp \left\{ \bar{A}_{2,1}^T \bar{G}_n^{(2,1)} \right\} \psi_{j'}^{(u')} \right\rangle_{\Omega} \right)_{U_r \times U_r}$ для $\bar{G}_n^{(1,2)} = \left[\mathbf{D}_n^{(1,2)} \right]^{-1} \left(\bar{Z}_n^{(1,2)} - \bar{Z}_{n-1}^{(1,2)} \right)$;

б) нормировать полученные векторы $\vec{C}_n^{(1,2)}$ по правилу (19).

Шаг 9. С учетом выражения (18), вычислить $\vec{C}_{n+1}^{(1,2)}$ с последующей нормировкой результата соотношением (19).

Шаг 10. С учетом выражения (21), рассчитать \vec{C}_{n+1} .

Шаг 11. Для найденного \vec{C}_{n+1} по правилу (4) методом Ньютона [31] определить оценку \hat{Z}_{n+1} .

Шаг 12. Увеличить $n = n + 1$ и проверить условия:

а) если $n < N$, то перейти к шагу 5;

б) если $n = N$, то завершить работу алгоритма и вывести результат вычисления – $\hat{Z}_0, \hat{Z}_1, \dots, \hat{Z}_{N-1}$.

Псевдокод сформированного алгоритма оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства, с учетом указанной общей последовательности действий, приведен в виде листинга 1 – функция FILTERRATINGS.

Вспомогательные функции в приведенном листенге 1 реализуют следующие вычислительные процедуры:

1) POLYSPECT ESTIM – определение приближения для соответствующих истинных значений интенсивностей $\alpha_{mk}^0, \beta_{m'm}^0, \gamma_{mk}^0$ (шаг 1 алгоритма);

function FILTERRATINGS($t_0, t_1, N, K, M, N_1, \dots, N_M, \Omega, p_0, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{\Gamma}'$) {

$\langle \mathbf{A}^0, \mathbf{B}^0, \mathbf{\Gamma}^0 \rangle = \text{POLYSPECTESTIM}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{\Gamma}')$;

$\langle \epsilon^\alpha, \epsilon^\beta, \epsilon^\gamma, \epsilon'^\alpha, \epsilon'^\beta, \epsilon'^\gamma \rangle =$

CALCVARIANCES($\mathbf{A}^0, \mathbf{B}^0, \mathbf{\Gamma}^0, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{\Gamma}'$); $n = 0$;

$\bar{Z}_n = 0$; $\bar{Z}_n^{(1,2)} = 0$; $\hat{Z}_n = 0$;

```

 $\Delta t = (t_1 - t_0) / (N - 1); \tau_n = t_0;$ 
 $\mathbf{S} = \left( \left\langle \psi_j^{(u)}, \psi_j^{(u')}\right\rangle_{\Omega} \right)_{U_r \times U_r}; \bar{\mathbf{G}} = \left( \left\langle p_0, \psi_j^{(u)}\right\rangle_{\Omega} \right)_{U_r};$ 
 $\bar{\mathbf{C}}_n = \text{CALCSLAE}(\mathbf{S}, \bar{\mathbf{G}}); \bar{\mathbf{C}}_n = \text{NORMVECTOR}(\bar{\mathbf{C}}_n); \bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)} = \bar{\mathbf{C}}_n;$ 
while ( $n < N$ ) {
     $\mathbf{D}_n^{(1)} = \text{DIFFUSIONESTIM}(\epsilon^\alpha, \epsilon^\beta, \epsilon^\gamma, \bar{\mathbf{Z}}_n^{(1)});$ 
     $\mathbf{D}_n^{(2)} = \text{DIFFUSIONESTIM}(\epsilon'^\alpha, \epsilon'^\beta, \epsilon'^\gamma, \bar{\mathbf{Z}}_n^{(2)});$ 
     $\bar{\mathbf{Z}}_{n+1}^{(1)} = \bar{\mathbf{Z}}_n^{(1)} + \Delta t \bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{Z}}_n^{(1)}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Gamma}, \tau_n);$ 
     $\bar{\mathbf{Z}}_{n+1}^{(2)} = \bar{\mathbf{Z}}_n^{(2)} + \Delta t \bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{Z}}_n^{(2)}, \mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{\Gamma}', \tau_n);$ 
     $\mathbf{L}_n^{(1,2)} = \mathbf{L}^{(1,2)}(\bar{\mathbf{A}}_{1,2}, \mathbf{D}_n^{(1,2)}, \tau_n);$ 
     $\mathbf{Q}_n^{(1,2)} = \mathbf{Q}^{(1,2)}(\bar{\mathbf{A}}_{2,1}, \mathbf{D}_n^{(2,1)}, \tau_n);$ 
if ( $n > 0$ ) {
         $\bar{\mathbf{G}}_n'^{(1,2)} = [\mathbf{D}_n^{(1,2)}]^{-1} (\bar{\mathbf{Z}}_n^{(1,2)} - \bar{\mathbf{Z}}_{n-1}^{(1,2)});$ 
         $\mathbf{Q}_n'^{(1,2)} = \mathbf{Q}'^{(1,2)}(\bar{\mathbf{A}}_{2,1}, \bar{\mathbf{G}}_n'^{(1,2)}, \tau_n);$ 
         $\bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)} = \mathbf{Q}_n'^{(1,2)} \bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)};$ 
         $\bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)} = \text{CALCSLAE}(\mathbf{S}, \bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)});$ 
         $\bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)} = \text{NORMVECTOR}(\bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)});$ 
         $d\bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)} = (\mathbf{L}_n^{(1,2)} - \mathbf{Q}_n^{(1,2)}) \bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)};$ 
         $d\bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)} = \text{CALCSLAE}(\mathbf{S}, d\bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)});$ 
         $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{(1,2)} = \bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)} + \Delta t d\bar{\mathbf{C}}_n^{(1,2)};$ 
         $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{(1,2)} = \text{NORMVECTOR}(\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{(1,2)});$ 
         $\tau_{n+1} = \tau_n + \Delta t; \bar{\mathbf{C}}_{n+1} = \bar{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{(1,2)}, \tau_{n+1});$ 
         $\bar{\mathbf{C}}_{n+1} = \text{CALCSLAE}(\mathbf{S}, \bar{\mathbf{C}}_{n+1});$ 
         $\bar{\mathbf{C}}_{n+1} = \text{NORMVECTOR}(\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{(1)} + \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{(2)} - \bar{\mathbf{C}}_{n+1});$ 
         $\hat{\mathbf{Z}}_{n+1} = \text{ARGUMENTMAXIMUM}(\bar{\mathbf{C}}_{n+1}); n = n + 1;$ 
    }
return  $\{\hat{\mathbf{Z}}_0, \dots, \hat{\mathbf{Z}}_{N-1}\}$ 

```

Листинг 1. Оптимальная нелинейная фильтрация оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства

- 2) CALC VARIANCES – средневывборочная оценка параметров $\epsilon_{mkm'k'}^\alpha, \epsilon_{m'mj'j'}^\beta, \epsilon_{mkm'k'}^\gamma, \epsilon_{mkm'k'}^{\prime\alpha}, \epsilon_{m'mj'j'}^{\prime\beta}, \epsilon_{mkm'k'}^{\prime\gamma}$ (шаг 2 алгоритма);
- 3) NORMVECTOR – нормировка (19);
- 4) DIFFUSIONESTIM – вычисление ковариационных матриц $\mathbf{D}_n^{(1,2)}$ (шаг 5 алгоритма), с учетом правил задания матриц $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Sigma}'$, уточненных в приложении;

5) ARGUMENTMAXIMUM – максимально правдоподобная оценка \hat{Z}_{n+1} в соответствии с правилом (4) при численном нахождении оптимума методом Ньютона [31] (шаг 11 алгоритма);

6) CALC SLAE – решение системы линейных алгебраических уравнений [38].

5. Результаты вычислительного эксперимента. Для апостериорного исследования предпочтительности полученных результатов проведем серию вычислительных экспериментов при решении задачи моделирования и оценивания стохастической модели информационного противоборства вида (2), (3) для $K = 2, M = 1$ (малые значения K, M выбраны из соображений наглядности демонстрации графических результатов вычислительных экспериментов). При проведении указанных испытаний особое внимание уделим результативности сформированного алгоритма (листинг 1) при вторичном уточнении его устойчивости и вычислительной сложности. Выделенные свойства алгоритма при изменяемом уровне нестационарного негауссовского шума в наблюдаемых интенсивностях моделей (2), (3) апостериорно установим при сравнении данных моделирования точного решения $\bar{X}^0 = (x_k^0)_K, \bar{Y}^0 = (y_k^0)_K$ с оцениваемыми: 1) \tilde{Z} по средневыборочным правилам $\tilde{Z} = (\bar{Z} + \bar{Z}') / 2$ результатов наблюдений \bar{Z}, \bar{Z}' из моделей (2), (3) соответственно; 2) \tilde{Z}' из моделей (2), (3) ансамблевым расширенным фильтром Калмана [39]; 3) \hat{Z}' алгоритмом фильтрации, основу в котором составляет численное решение уравнения ДМЗ (6).

В качестве истинной модели информационного противоборства при проведении вычислительных экспериментов произвольно выбрана следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_k^0}{dt} = \gamma_k^0 (x_k^0 - y_k^0) + (\alpha_k^0 + \beta^0 x_k^0) \times \times \left[N_0 - \sum_{k'=1}^2 (x_{k'}^0 + y_{k'}^0) - y_k^0 \right]; \quad (23)$$

$$\frac{dx_k^0}{dt} = y_k^0 [\alpha_k^0 + \beta^0 x_k^0] - \gamma_k^0 x_k^0; \quad x_k^0 = 0; \quad y_k^0 = 0; \quad k = [1; 2],$$

где $\alpha_1^0(t) = 0,25 |1 + 2 \cos(15t)|$; $\alpha_2^0(t) = 0,25 |1 + 2 \sin(5t)|$; $\beta^0(t) = 0,005 |2 + 5 \cos(0,1t)|$; $\gamma_1^0(t) = 0,05 |\sin(20t)|$; $\gamma_2^0(t) = 0,1 |\cos(2t)|$.

Решение (23) при определении эволюции $\vec{X}^0 = (x_k^0)_K$, $\vec{Y}^0 = (y_k^0)_K$ осуществляется численно методом Эйлера для аналогичных (22) N , Δt .

При обеспечении условия формирования в компонентах $\alpha_k, \beta, \gamma_k$ и $\alpha'_k, \beta', \gamma'_k$ нестационарного негауссовского шума для моделей (2) и (3) соответствующие наблюдаемые интенсивности заданы следующими правилами:

1) $\alpha_k(t) = |\alpha_k^0(t) - \mathcal{N}(0, q_1)|$, $\beta(t) = |\beta^0(t) - \mathcal{N}(0, q_1)|$, $\gamma_k(t) = |\gamma_k^0(t) - \mathcal{N}(0, q_1)|$, где $\mathcal{N}(0, q_1)$ – функция генерации случайных чисел, подчиняющихся нормальному закону распределения со средним 0 и дисперсией q_1 ;

2) $\alpha'_k(t) = |\alpha_k^0(t) + \mathcal{R}(q_2^{-1}/2)|$, $\beta'(t) = |\beta^0(t) + \mathcal{R}(q_2^{-1}/2)|$, $\gamma'_k(t) = |\gamma_k^0(t) + \mathcal{R}(q_2^{-1}/2)|$, где $\mathcal{R}(q_2^{-1}/2)$ – функция генерации случайных чисел, подчиняющихся экспоненциальному закону распределения со значением показателя экспоненты равным $(2q_2)^{-1}$.

Другие входные данные алгоритма заданы следующими величинами: $t_0 = 0$; $t_1 = 4$; $N = 480$; $N_0 = 10$; $r = 33$; $q_1 = 0, 5$; $q_2 = 0, 25$.

Для компактности представлений результаты вычислительных экспериментов приведем в отношении значения суммы адептов и предадептов k -го кандидата $\xi_k(t) = x_k(t) + y_k(t)$.

На рисунке 1 представлены графики зависимости от времени элементов векторов численности адептов: 1) истинного ξ_k^0 ; 2) определяемого среднего $\tilde{\xi}_k$ из моделей (2), (3); 3) оцениваемого $\tilde{\xi}'_k$ ансамблевым расширенным фильтром Калмана [39]; 4) оцениваемого $\hat{\xi}'_k$ по алгоритму фильтрации, предполагающему численное исследование уравнения ДМЗ (6); 5) оцениваемого $\hat{\xi}_k$ по разработанному алгоритму, основанному на численном исследовании робастного уравнения ДМЗ (8).

На рисунке 2 отражены графики наблюдаемых и истинных значений интенсивностей $\alpha_k, \beta, \gamma_k, \alpha'_k, \beta', \gamma'_k$ и $\alpha_k^0, \beta^0, \gamma_k^0$ для $t \in [t_0, t_1]$, используемых при оценивании $\xi_k^0, \tilde{\xi}_k, \tilde{\xi}'_k, \hat{\xi}'_k, \hat{\xi}_k$ (рисунок 1).

На рисунке 3 приведены графики одномерного среза апостериорных условных функций плотности вероятности $p(\vec{Z}, t), p_1(\vec{Z}, t), p_2(\vec{Z}, t)$ в различные моменты времени $t \in [t_0, t_1]$. Ориентация плоскости среза выбиралась по максимальному значению дисперсии относительно оцениваемого по правилу (4) значению \vec{Z} .

Количественно сравнительную предпочтительность получаемых результатов $\tilde{\xi}_k, \tilde{\xi}'_k, \hat{\xi}'_k, \hat{\xi}_k$ по отношению к ξ_k^0 установим величиной накопленной средней квадратической ошибки,

значение которой, например, для $\tilde{\xi}_k$ определено по правилу

$$\Delta_{\tilde{\xi}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^K \left| \xi_k^0(t_n) - \tilde{\xi}_k(t_n) \right|^2} \quad [40].$$

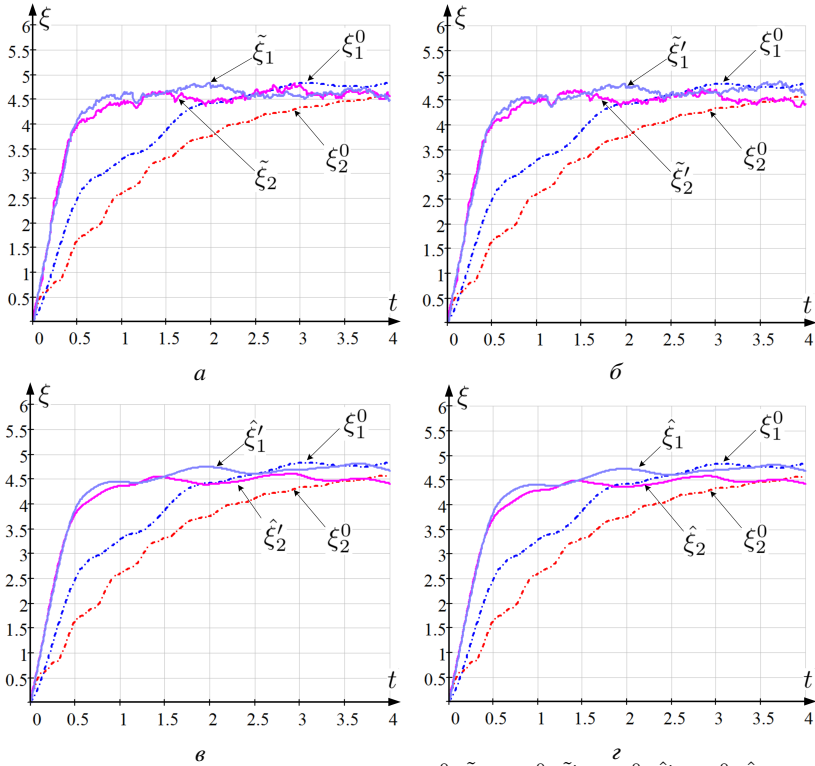


Рис. 1. Графики зависимости от t : а) $\xi_k^0, \tilde{\xi}_k$; б) $\xi_k^0, \tilde{\xi}'_k$; в) $\xi_k^0, \hat{\xi}'_k$; г) $\xi_k^0, \hat{\xi}_k$

Также сопоставление результатов выполним при определении отклонения расчетного от истинного значения для заключительного момента времени

наблюдения: $\delta_{\tilde{\xi}} = \sum_{k=1}^K \left| \xi_k^0(t_{N-1}) - \tilde{\xi}_k(t_{N-1}) \right|$ [40]. Для проведенного расчета (рисунок 1) при $q_1 = 0,5, q_2 = 0,25$ значения Δ и δ составили: $\Delta_{\tilde{\xi}} = 1,11; \Delta_{\tilde{\xi}'} = 1,076; \Delta_{\hat{\xi}'} = 0,988; \Delta_{\hat{\xi}} = 0,945; \delta_{\tilde{\xi}} = 0,366; \delta_{\tilde{\xi}'} = 0,275; \delta_{\hat{\xi}'} = 0,231; \delta_{\hat{\xi}} = 0,208$.

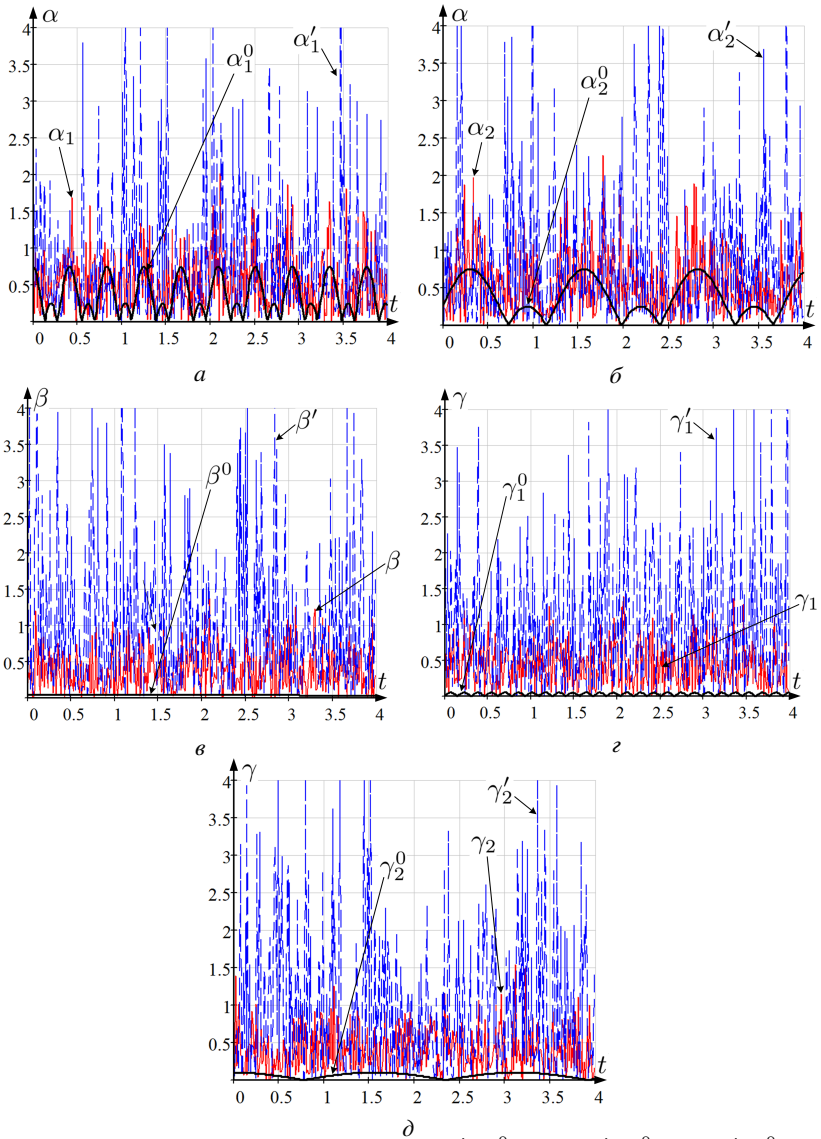


Рис. 2. Графики зависимости от t а) $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1^0$; б) $\alpha_2, \alpha_2', \alpha_2^0$; в) β, β', β^0 ; г) $\gamma_1, \gamma_1', \gamma_1^0$; д) $\gamma_2, \gamma_2', \gamma_2^0$

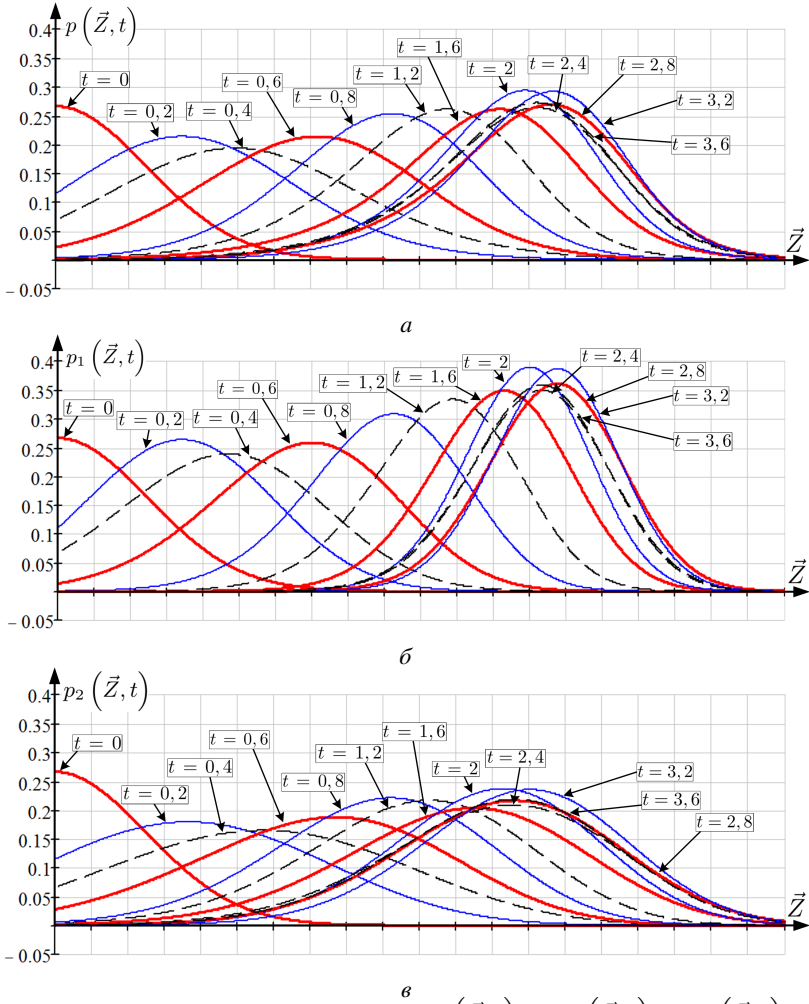
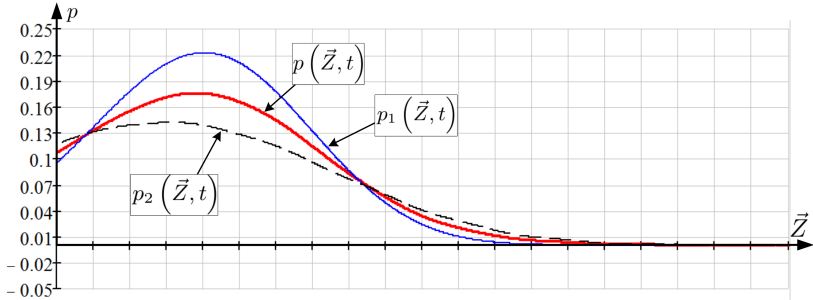


Рис. 3. Графики срезов для разных t : а) $p(\bar{Z}, t)$; б) $p_1(\bar{Z}, t)$; в) $p_2(\bar{Z}, t)$

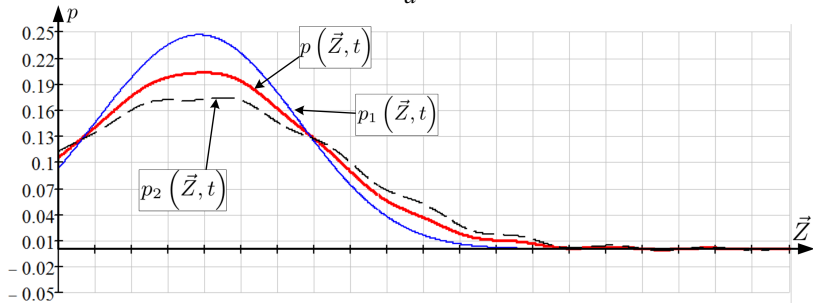
Полученные частные результаты (рисунок 1) свидетельствуют о том, что сформированный алгоритм обеспечивает более точную оценку в сравнении с известными решениями [11, 13, 14, 39]. При этом интерес вызывает исследование соотношенного выигрыша при изменении q_1, q_2 .

Очевидно, что при росте ошибок в наблюдениях $\alpha_k, \beta, \gamma_k, \alpha'_k, \beta', \gamma'_k$ вычислительная устойчивость составленного численного решения будет

снижаться. Для ее повышения при сохранении адекватности нахождения функций $p(\vec{Z}, t)$, $p_1(\vec{Z}, t)$, $p_2(\vec{Z}, t)$ требуется увеличить число точек дискретизации N на выбранном интервале наблюдения $[t_0, t_1]$ (рисунок 4).



a



б

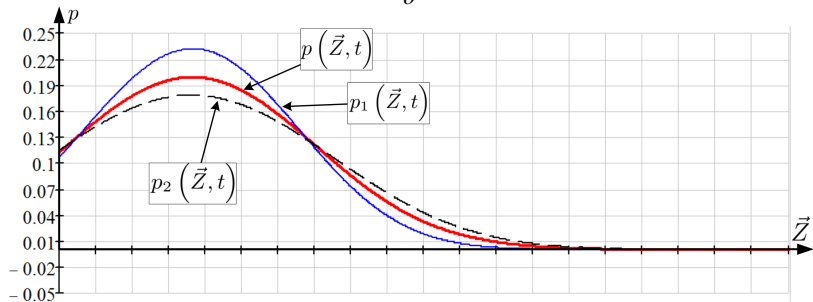


Рис. 4. Графики срезов p , p_1 , p_2 для $t = 0, 2$, $q_1 = 0, 75$; $q_2 = 0, 5q_1$, полученных при численном исследовании: а) уравнения ДМЗ при $N = 480$; б) робастного уравнения ДМЗ при $N = 480$; в) робастного уравнения ДМЗ при $N = 500$

Графическая иллюстрация отмеченной особенности приведена на рисунке 4 при представлении одномерного среза апостериорных условных функций плотности вероятности $p(\vec{Z}, t)$, $p_1(\vec{Z}, t)$, $p_2(\vec{Z}, t)$, рассчитанных при решении задачи фильтрации при применении уравнения ДМЗ (6) и робастного уравнения ДМЗ (8) (сформированный алгоритм) для $t = 0, 2$; $q_1 = 0, 75$; $q_2 = 0, 5q_1$; $N = 480$ и $N = 500$. Из представленного примера (рисунок 4) следует, что на участках быстрого изменения числа адептов и предадептов ($t \in [0; 0, 4]$, рисунок 1) при увеличении q_1 , q_2 для недостаточного числа N при численном нахождении $p(\vec{Z}, t)$, $p_1(\vec{Z}, t)$, $p_2(\vec{Z}, t)$ наблюдается неравномерная (рисунок 4, б) сходимость выбранной аппроксимации вида (13). При этом в отношении применения робастного уравнения ДМЗ (8) в сравнении с простым уравнением ДМЗ (6) эта неравномерность проявляется более выражено. Принимая во внимание указанное, выполнено сравнительное исследование точности сформированного решения при изменении q_1 , q_2 .

На рисунке 5 представлены графики зависимости усредненных по 10^6 вычислительным экспериментам $\Delta_{\tilde{\xi}}$, $\Delta_{\tilde{\xi}'}$, $\Delta_{\tilde{\xi}''}$, $\Delta_{\tilde{\xi}'''}$, $\delta_{\tilde{\xi}}$, $\delta_{\tilde{\xi}'}$, $\delta_{\tilde{\xi}''}$, $\delta_{\tilde{\xi}'''}$ от q_1 , q_2 при $q_1 = 0, 5q_2$ (указанная зависимость выбрана из соображений соизмеримости уровня шума в соответствующих наблюдаемых интенсивностях моделей (2) и (3)).

6. Заключение. Результаты проведенных вычислительных экспериментов (рисунки 1–5) подтверждают работоспособность разработанного алгоритмического решения оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастической модели информационного противоборства. Относительный выигрыш в сравнении со значениями, получаемыми по средневыборочным правилам наблюдения, в среднем равняется 20,7 % (рисунок 5). При этом аналогичный выигрыш применения ансамблевого расширенного фильтра Калмана составляет 7,4 %, а алгоритма нелинейной фильтрации, формируемого на основе исследования уравнения ДМЗ (6), – 17,3 %.

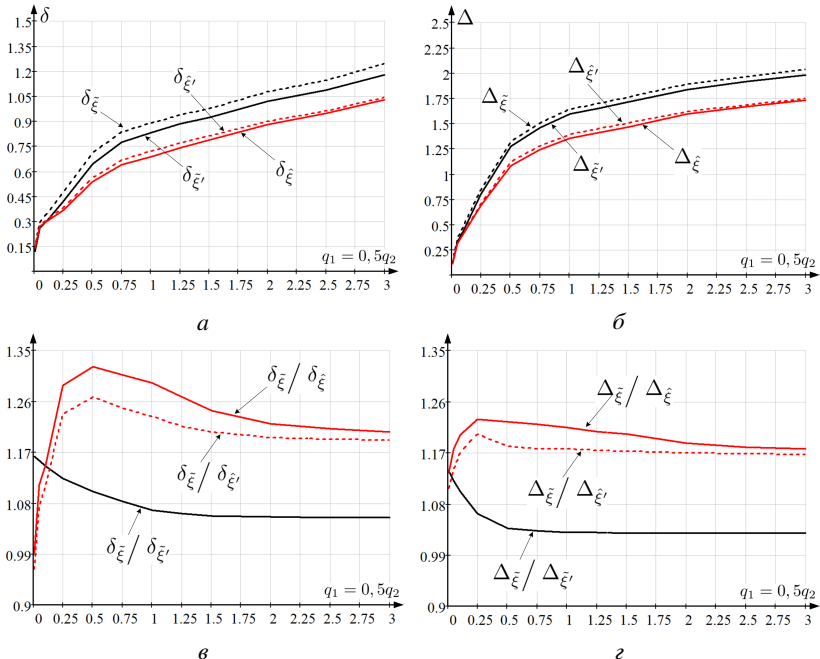


Рис. 5. Графики зависимости от q_1, q_2 при $q_1 = 0, 5q_2$: а, в) $\delta_{\bar{\xi}}, \delta_{\bar{\xi}'}, \delta_{\xi'}, \delta_{\xi}$; б, г) $\Delta_{\bar{\xi}}, \Delta_{\bar{\xi}'}, \Delta_{\xi'}, \Delta_{\xi}$

С позиции вычислительных затрат ансамблевый расширенный фильтр Калмана обладает преимуществом в сравнении со сформированным алгоритмом и способен при программной реализации на типовой ПрЭВМ обеспечить вычисления в режиме, близкому к реальному времени. По вычислительной устойчивости, определяемой равномерностью (рисунок 4(б)) сходимости выбранной аппроксимации функций плотностей вероятностей при одинаковой длительности интервала дискретизации Δt , алгоритм, который основан на исследовании уравнения ДМЗ (6), обладает преимуществом в сравнении с разработанным алгоритмом (предполагает применение робастного уравнения ДМЗ (8)). Вместе с тем, по вычислительной сложности указанные алгоритмы сопоставимы и разработанный алгоритм обеспечивает наибольшую точность оценки. Таким образом, исходя из апостериорно определенного выигрыша по результативности решения (точность оценки) при потенциальной возможности адаптивной вариации Δt в зависимости от скорости изменения числа адептов и

пределаптов \vec{Z} и уровня шума q_1, q_2 наблюдений α, β, γ , разработанное алгоритмическое решение обладает наибольшей предпочтительностью. Однако его применение в сравнении с ансамблевым расширенным фильтром Калмана становится нецелесообразным (рисунок 5) при малых значениях q_1, q_2 (снижение относительного выигрыша обуславливается вычислительной погрешностью в формируемых численных решениях по кусочно-полиномиальной аппроксимации и интегрированию).

В целом, полученные результаты в развитие работ [11, 13, 14, 18], формируют вычислительно эффективные решения обобщенной задачи оптимальной нелинейной фильтрации оценок информационного воздействия в стохастических моделях информационного противоборства при выделении особенностей основных этапов алгоритмической реализации. Составленный алгоритм применим при наличии неопределенности и разнородности правил измерения соответствующих интенсивностей α, β, γ модели (1). При наличии более двух разнородных правил подобного наблюдения, сформированный алгоритм может быть обобщен, при учете основных теорем теории вероятностей [26] и модификации правила определения итоговой функции плотности распределения вероятности (5). К направлениям дальнейших исследований относится получение априорной оценки, определяющей правило адаптивного выбора Δt в составленной численной схеме.

7. Приложение. В (2) приняты следующие обозначения: $\vec{Z} \in \Omega$ при $\vec{Z} = (Z_l)_d = (\vec{z}^{(1)}, \vec{z}^{(2)}, \dots, \vec{z}^{(M)})$ определяется численностью адептов и предадептов относительно m -й подгруппы $\vec{z}^{(m)} = (z_k^{(m)})_{2K} = (x_{m1}, y_{m1}, x_{m2}, y_{m2}, \dots, x_{mK}, y_{mK})$ [18]; $\Omega = \varepsilon^{(1)} \times \varepsilon^{(2)} \times \dots \times \varepsilon^{(M)} \subset \mathbb{R}^d$ – d -мерный ($d = 2MK$) выпуклый многогранник (правила параметризации Ω определены в [13, 14]); $\varepsilon^{(m)} \subset \mathbb{R}^{2K}$ – симплекс с $2K + 1$ вершинами [14]; $\vec{A} = (A_l)_d = (\vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)}, \dots, \vec{a}^{(M)})$ – вектор сноса при $\vec{a}^{(m)} = (a_k^{(m)})_{2K} = (f_{m1}^{(1)}, f_{m1}^{(2)}, f_{m2}^{(1)}, f_{m2}^{(2)}, \dots, f_{mK}^{(1)}, f_{mK}^{(2)})$ для $f_{mk}^{(2)} = \left[N_m - \sum_{k'=1}^K (x_{mk'} + y_{mk'}) - y_{mk} \right] \left[\alpha_{mk}^0 + \sum_{m'=1}^M \beta_{m'm}^0 x_{m'k} \right] + \gamma_{mk}^0 (x_{mk} - y_{mk})$ и $f_{mk}^{(1)} = y_{mk} \left[\alpha_{mk}^0 + \sum_{m'=1}^M \beta_{m'm}^0 x_{m'k} \right] - \gamma_{mk}^0 x_{mk}$; $\vec{W} = (W_l)_d = (\vec{w}^{(1)}, \vec{w}^{(2)}, \dots, \vec{w}^{(M)})$ для $\vec{w}^{(m)} = (w_k^{(m)})_{2K} = (B_{m1}^{(1)}, B_{m1}^{(2)}, B_{m2}^{(1)}, B_{m2}^{(2)}, \dots, B_{mK}^{(1)}, B_{mK}^{(2)})$ при определении $B_{mk}^{(1)}, B_{mk}^{(2)}$ стандартными винеровскими процессами; $\Sigma = (\Sigma_{ll'})_{d \times d} = \Sigma^\alpha + \Sigma^\beta +$

Σ^γ – матрица диффузии при:

$$\Sigma^{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{\alpha,\beta,\gamma} & \dots & \sigma_{1M}^{\alpha,\beta,\gamma} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{M1}^{\alpha,\beta,\gamma} & \dots & \sigma_{MM}^{\alpha,\beta,\gamma} \end{pmatrix}; \sigma_{mm'}^{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11mm'}^{\alpha,\beta,\gamma} & \dots & \bar{\sigma}_{1Kmm'}^{\alpha,\beta,\gamma} \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{\sigma}_{K1mm'}^{\alpha,\beta,\gamma} & \dots & \bar{\sigma}_{Kmm'}^{\alpha,\beta,\gamma} \end{pmatrix};$$

$$\bar{\sigma}_{kk'mm'}^{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{pmatrix} \sigma_{mkm'k'}^{\alpha,\beta,\gamma} \\ \bar{\sigma}_{mkm'k'}^{\alpha,\beta,\gamma} \end{pmatrix}; \sigma_{mkm'k'}^\gamma = -x_{mk} \sqrt{\varepsilon_{mkm'k'}^\gamma}; \sigma_{mkm'k'}^\alpha =$$

$$y_{mk} \sqrt{\varepsilon_{mkm'k'}^\alpha}; \bar{\sigma}_{mkm'k'}^\alpha = \left[N_m - \sum_{k''=1}^K (x_{mk''} + y_{mk''}) - y_{mk} \right] \sqrt{\varepsilon_{mkm'k'}^\alpha};$$

$$\bar{\sigma}_{mkm'k'}^\gamma = (x_{mk} - y_{mk}) \sqrt{\varepsilon_{mkm'k'}^\gamma}; \sigma_{mkm'k'}^\beta = y_{mk} \sqrt{\sum_{j=1}^M \sum_{j'=1}^M \varepsilon_{j'mjm'}^\beta x_j' x_{j'k}};$$

$$\bar{\sigma}_{mkm'k'}^\beta = \left[N_m - \sum_{k''=1}^K (x_{mk''} + y_{mk''}) - y_{mk} \right] \sqrt{\sum_{j=1}^M \sum_{j'=1}^M \varepsilon_{j'mjm'}^\beta x_j' x_{j'k}}.$$

Литература

1. Al-Oraiqat A.M., Ulichev O.S., Meleshko E.V., Al-Rawashdeh Y.S., Smirnov O.O., Polishchuk L.I. Modeling strategies for information influence dissemination in social networks. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2022. vol. 13. pp. 2463–2477. DOI: 10.1007/s12652-021-03364-w.
2. Михайлов А.П., Петров А.П.Ч. Математические модели системы «человек-общество». Москва: Физматлит, 2022. 456 с.
3. Chkhartishvili A.G., Gubanov D.A., Novikov D.A. *Social Networks: Models of information influence, control and confrontation*. Springer, 2018. 228 p.
4. Mikhailov A.P., Petrov A.P., Proncheva O.G. A model of information warfare in a society with a piecewise constant function of the destabilizing Impact. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019. vol. 11. pp. 190–197. DOI: 10.1134/S2070048219020108.
5. Byzov L.G., Gubanov D.A., Kozitsin I.V., Chkhartishvili A.G. A perfect politician for social networks: an approach to analyzing ideological preferences of users. *Automation and Remote Control*. 2021. vol. 82. pp. 1614–1631. DOI: 10.1134/S0005117921090095.
6. Kozitsin I.V. Modeling Opinion Dynamics: Ranking Algorithms on Heterogeneous Populations. 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). 2022. DOI: 10.1109/SUMMA57301.2022.9973437.
7. Galety M.G., Atroshi C.A., Balabantaray B.K., Mohanty S.N. *Social Network Analysis: Theory and Applications*. 2022. 232 p. DOI: 10.1002/9781119836759.
8. Chkhartishvili A.G. The Problem of Finding the Median Preference of Individuals in a Stochastic Model // *Automation and Remote Control*. 2021. vol. 82. pp. 853–862. DOI: 10.1134/S000511792105009X.
9. Губанов Д.А., Петров И.В. Информационные сообщества в социальных сетевых структурах. Ч. 2. Математические сетевые модели формирования сообществ. *Проблемы управления*. 2021. № 2. С. 18–32. DOI: 10.25728/ru.2021.1.2.
10. Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В. Развитие модели распространения информации в социуме // *Математическое моделирование*. 2014. Т. 26. № 3. С. 65–74.

11. Полянский И.С., Логинов К.О., Ильин Н.И., Великих А.С. Математическая модель оценки информационного воздействия на электорат в социальных медиа при проведении выборных кампаний. Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 12. С. 67–81. DOI: 10.20948/mm-2021-12-05.
12. Орлов Ю.Н. Панкратов А.С. К разработке модели эволюции структуры сетевого графа. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2021. № 24. 16 с. DOI: 10.20948/prepr-2021-24.
13. Ильинский А.С., Полянский И.С., Логинов К.О., Архипов Н.С. К вопросу численной оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний. Прикладная Математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. – Москва: МАКС Пресс. 2021. № 68. С. 15–28.
14. Полянский И.С., Полянская И.В., Логинов К.О. Алгоритмические решения в задаче оценки информационного воздействия на электорат при проведении выборных кампаний. Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2021. Т. 24. № 4. С. 72–80. DOI: 10.18469/1810-3189.2021.24.4.72-80.
15. Pugachev V.S., Sinityn I.N. Stochastic differential systems analysis and filtering. Wiley: Science, 1987. 549 p.
16. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. Москва: Радио и связь, 1983. 320 с.
17. Jiang Y., Tao J., Chen X. Simulation of Non-Gaussian/Non-stationary Random Vibration. Non-Gaussian Random Vibration Fatigue Analysis and Accelerated Test. Springer, Singapore. 2022. DOI: 10.1007/978-981-16-3694-3_3.
18. Логинов К.О. Численное решение задачи фильтрации оценок информационного воздействия на электорат. Информатика и автоматизация. 2022. Т. 3(21). С. 624–652. DOI: 10.15622/ia.21.3.7.
19. Nakano Y. Kernel-based collocation methods for Zakai equations. Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations. 2019. vol. 9. pp. 476–494. DOI: 10.1007/s40072-019-00132-y.
20. Liangliang S., Chang M.L. Galerkin spectral method for a multi-term time-fractional diffusion equation and an application to inverse source problem. Networks and Heterogeneous Media. 2022. vol. 18. no. 1. pp. 212–243. DOI: 10.3934/nhm.2023008.
21. Jiang Y., Tang Ch., Zhang X., Jiao W., Li G., Huang T. A Novel Rolling Bearing Defect Detection Method Based on Bispectrum Analysis and Cloud Model-Improved EEMD. IEEE Access. 2020. vol. 8. pp. 24323–24333. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2970813.
22. Chugai K.N., Kosachev I.M., Rybakov K.A. Approximate Filtering Methods in Continuous-Time Stochastic Systems. Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics. Smart Innovation, Systems and Technologies. Springer, Singapore. 2020. vol. 173. DOI: 10.1007/978-981-15-2600-8_24.
23. Семина Т.А. Анализ тональности текста: современные подходы и существующие проблемы. Социальные и гуманитарные науки. Отечественная и зарубежная литературы. Серия 6. Языкознание. Реферативный журнал. 2020. № 4. С. 47–63.
24. Полянский И.С., Логинов К.О. К вопросу оценки интенсивности межличностной коммуникации пользователей социальной сети. XI Всероссийская научная конференция «Системный синтез и прикладная синергетика» (п. Нижний Архыз, 27 сентября – 01 октября 2022 г.). Южный федеральный университет. Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2022. С. 132–135.
25. Dong W., Luo X., Yau S.S.-T. Solving Nonlinear Filtering Problems in Real-time by Legendre Galerkin Spectral Method. IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. vol. 66(4). pp. 1559–1572. DOI: 10.1109/TAC.2020.3002979.
26. Borovkov A.A., Moullagaliev A. Mathematical Statistics. London: Routledge. 1998. 592 p. DOI: 10.1201/9780203749326.

27. Luo X., Yau S.S.-T. Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2013. vol. 58. no. 10. pp. 2563–2578. DOI: 10.1109/TAC.2013.2264552.
28. Полянский И.С., Полянская И.В., Фам Т.З. Математическая модель фильтрации канонических параметров спутника-ретранслятора при орбитальном движении. *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2019. Т. 22. № 4. С. 50–57. DOI: 10.18469/1810-3189.2019.22.4.50-57.
29. Karimi N., Kazem S., Ahmadian D., Adibi H., Ballestra L.V. On a generalized Gaussian radial basis function: Analysis and applications. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. vol. 112. pp. 46–57.
30. Epperson J.F. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis: Solutions Manual to Accompany, Third Edition*. John Wiley and Sons, Inc. 2021. 304 p. DOI: 10.1002/9781119604570.
31. Johansson R. *Numerical Python: Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy, SciPy and Matplotlib*. Second Edition. 2019. 700 p. DOI: 10.1007/978-1-4842-4246-9.
32. Lasserre J.B. Simple formula for integration of polynomials on a simplex. *BIT Numerical Mathematics*. 2021. vol. 61. pp. 523–533. DOI: 10.1007/s10543-020-00828-x.
33. *Encyclopedia of special functions: the Askey-Bateman project Volume 1 Univariate orthogonal polynomials* (Eds.: Mourad H. Ismail, Walter van Assche). NY: Cambridge University Press. 2020. 388 p. DOI: 10.1017/9780511979156.
34. Wagner U., Welzl E. Connectivity of Triangulation Flip Graphs in the Plane. *Discrete and Computational Geometry*. 2022. vol. 68. pp. 1227–1284. DOI: 10.1007/s00454-022-00436-2.
35. Ильинский А.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. О сходимости барицентрического метода в решении внутренних задач Дирихле и Неймана в R2 для уравнения Гельмгольца. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2021. Т. 31. № 1. С. 3–18. DOI: 10.35634/vm210101.
36. Polyanskiy I.S., Arkhipov N.S., Misyurin S.Yu. On solving the optimal control problem. *Automation and Remote Control*. 2019. vol. 80. pp. 66–80. DOI: 10.1134/S0005117919010065.
37. Suescun-Diaz D., Giron L.E. Valuation of Standard Call Options Using the Euler–Maryama Method with Strong Approximation. *Computational Economics*. 2022. vol. 61(4). pp. 1545–1560. DOI: 10.1007/s10614-022-10258-2.
38. Куксенко С.П. *Электромагнитная совместимость: моделирование* (Ред.: Т.Р. Газизова). Томск: В-Спектр, 2018. 188 с.
39. Oryiema R., Angwenyi D., Midenyo K. Extended Ensemble Filter for High-dimensional Nonlinear State Space Models. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*. 2021. pp. 84–97. DOI: 10.9734/jamcs/2021/v36i530365.
40. Eshima N. *Statistical Data Analysis and Entropy*. Springer Singapore. 2020. 257 p. DOI: 10.1007/978-981-15-2552-0.

Полянский Иван Сергеевич — д-р физ.-мат. наук, доцент, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения, вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов. Число научных публикаций — 153. van341@mail.ru; улица Приборостроительная, 35, 302025, Орёл, Россия; р.т.: +7(953)618-7100.

Логинов Кирилл Олегович — соискатель, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: математическое моделирование, методы статистического анализа данных, динамические системы, оптимальное управление, стохастические дифференциальные уравнения. Число научных публикаций — 12. kvirs@mail.ru; улица Приборостроительная, 35, 302025, Орёл, Россия; р.т.: +7(486)254-1325.

I. POLYANSKY, K. LOGINOV
**OPTIMAL NONLINEAR FILTERING OF INFORMATION IMPACT
ESTIMATES IN A STOCHASTIC MODEL OF INFORMATION
WARFARE**

Polyanskii I.S., Loginov K.O. Optimal Nonlinear Filtering of Information Impact Estimates in a Stochastic Model of Information Warfare.

Abstract. A computationally efficient algorithmic solution to the problem of optimal nonlinear filtering of information impact estimates in a generalized stochastic model of information warfare is developed in the article. The formed solution is applicable in the presence of heterogeneous rules for measuring the parameters of the information warfare model, on the basis of which a pair of systems of stochastic differential equations is formed. According to the criterion of maximum likelihood according to the determined evolution of the a posteriori conditional probability density function at a given observation interval, the evaluation of the information impact in the optimal nonlinear filtering model is performed. Taking into account the probability addition theorem, as the probability of the sum of two joint events, the density functions of which are established from the numerical solution of the corresponding robust Duncan-Mortensen-Zakai equations, finding a posteriori conditional probability density function at a given time is performed. For the first event, it is assumed that the first system of stochastic differential equations is the equation of state, and the second – is the equation of observation. For the second event, their definition is set in reverse order. The solution of the robust Duncan-Mortensen-Zakai equation is carried out in the formulation of the Galerkin spectral method when sampling the observation interval into subintervals and reducing the initial solution to a numerical recurrent study of the sequence of subtasks using the so-called Yau-Yau's algorithm, which assumes an estimate of the probability measure from the solution of the direct Kolmogorov equation with its subsequent correction by observation. To highlight the features of the algorithmic implementation of the compiled solution, an algorithm for optimal nonlinear filtering of information impact estimates in a generalized stochastic model of information confrontation when specifying the listing of the function implementing it, which is represented by a pseudocode, has been formed. To identify the preference of the compiled algorithmic solution for optimal nonlinear filtering of information impact assessments, a series of computational experiments on large-volume test samples was carried out. The result of the information impact assessment obtained by the proposed algorithm is compared with the determined solution: 1) by the average sample values from the observation models; 2) by an ensemble extended Kalman filter; 3) by a filtering algorithm involving a numerical study of the Duncan-Mortensen-Zakai equation. According to the conducted a posteriori study, quantitative indicators that establish the gain of the compiled algorithm and the limits of its applicability are highlighted.

Keywords: nonlinear filtering, information impact assessment, stochastic model of information confrontation, robust Duncan-Mortensen-Zakai equation, Gaussian basis functions, Galerkin spectral method.

References

1. Al-Oraiqat A.M., Ulichev O.S., Meleshko E.V., Al-Rawashdeh Y.S., Smirnov O.O., Polishchuk L.I. Modeling strategies for information influence dissemination in social networks. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2022. vol. 13. pp. 2463–2477. DOI: 10.1007/s12652-021-03364-w.

2. Mihajlov A.P., Petrov A.P.Ch. *Matematicheskie modeli sistemy «chelovek-obshchestvo»* [Mathematical models of the «man-society» system]. Moscow: Fizmatlit, 2022. 456 p. (In Russ.).
3. Chkhartishvili A.G., Gubanov D.A., Novikov D.A. *Social Networks: Models of information influence, control and confrontation*. Springer, 2018. 228 p.
4. Mikhailov A.P., Petrov A.P., Proncheva O.G. A model of information warfare in a society with a piecewise constant function of the destabilizing Impact. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019. vol. 11. pp. 190–197. DOI: 10.1134/S2070048219020108.
5. Byzov L.G., Gubanov D.A., Kozitsin I.V., Chkhartishvili A.G. A perfect politician for social networks: an approach to analyzing ideological preferences of users. *Automation and Remote Control*. 2021. vol. 82. pp. 1614–1631. DOI: 10.1134/S0005117921090095.
6. Kozitsin I.V. Modeling Opinion Dynamics: Ranking Algorithms on Heterogeneous Populations. 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). 2022. DOI: 10.1109/SUMMA57301.2022.9973437.
7. Galety M.G., Atroshi C.A., Balabantaray B.K., Mohanty S.N. *Social Network Analysis: Theory and Applications*. 2022. 232 p. DOI: 10.1002/9781119836759.
8. Chkhartishvili A.G. The Problem of Finding the Median Preference of Individuals in a Stochastic Model. *Automation and Remote Control*. 2021. vol. 82. pp. 853–862. DOI: 10.1134/S000511792105009X.
9. Gubanov D.A., Petrov I.V. Information Communities in Social Networks. Part II: Networked Models of Formation. *Control Sciences*. 2021. vol. 2. pp. 16–28. DOI: 10.25728/cs.2021.2.2.
10. Mikhailov A.P., Petrov A.P., Marevtseva N.A., Tretiakova I.V. [Development of a model of information dissemination in society]. *Matematicheskoe modelirovanie – Math modeling*. 2014. vol. 26. no. 3. pp. 65–74. (In Russ.).
11. Poljanskij I.S., Loginov K.O., Ilyin N.I., Velikikh A.S. [Mathematical model assessing the information impact on the electorate in social media during election campaigns]. *Matematicheskoe modelirovanie – Math modeling*. 2021. vol. 33. no. 12. pp. 67–81. (In Russ.).
12. Orlov Y.N., Pankratov A.S. To the evolution model of network graph structure construction. Preprinty' IPM im. M.V. Keldy'sha – IPM preprints im. M.V. Keldysh. 2021. no. 24. 16 p. DOI: 10.20948/prepr-2021-24. (In Russ.).
13. Il'inskii A.S., Polyanskii I.S., Loginov K.O., Arkhipov N.S. On the issue of numerical assessment of informational impact on the electorate during electoral campaigns. *Prikladnaya Matematika i informatika: Trudy' fakul'teta VMKMGUim. M.V. Lomonosova – Applied Mathematics and Informatics: Proceedings of the faculty of the VMK Moscow State University. M.V. Lomonosov*. Moscow: MAKS Press. 2021. no. 68. pp. 15–28. (In Russ.).
14. Polyanskii I.S., Polyanskaya I.V., Loginov K.O. [Algorithmic solutions to the problem of assessing the information impact on the electorate during election campaigns]. *Fizika volnovykh processov i radiotekhnicheskie sistemy – Physics of wave processes and radio engineering systems*. 2021. vol. 24. no. 4. pp. 72–80. (In Russ.).
15. Pugachev V.S., Sinityn I.N. *Stochastic differential systems analysis and filtering*. Wiley: Science, 1987. 549 p.
16. Tikhonov V.I. [Optimal signal reception] *Optimal'nyj priem signalov*. Moscow: Radio and communications, 1983. 320 p. (In Russ.).
17. Jiang Y., Tao J., Chen X. *Simulation of Non-Gaussian/Non-stationary Random Vibration. Non-Gaussian Random Vibration Fatigue Analysis and Accelerated Test*. Springer, Singapore. 2022. DOI: 10.1007/978-981-16-3694-3_3.

18. Loginov K.O. [Numerical solution of the problem of filtering estimates of information impact on the electorate]. *Informatika i avtomatizaciya – Informatics and automation*. 2022. vol. 3(21). pp. 624–652. DOI: 10.15622/ia.21.3.7. (In Russ.).
19. Nakano Y. Kernel-based collocation methods for Zakai equations. *Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations*. 2019. vol. 9. pp. 476–494. DOI: 10.1007/s40072-019-00132-y.
20. Liangliang S., Chang M.L. Galerkin spectral method for a multi-term time-fractional diffusion equation and an application to inverse source problem. *Networks and Heterogeneous Media*. 2022. vol. 18. no. 1. pp. 212–243. DOI: 10.3934/nhm.2023008.
21. Jiang Y., Tang Ch., Zhang X., Jiao W., Li G., Huang T. A Novel Rolling Bearing Defect Detection Method Based on Bispectrum Analysis and Cloud Model-Improved EEMD. *IEEE Access*. 2020. vol. 8. pp. 24323–24333. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2970813.
22. Chugai K.N., Kosachev I.M., Rybakov K.A. Approximate Filtering Methods in Continuous-Time Stochastic Systems. *Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics. Smart Innovation, Systems and Technologies*. Springer, Singapore. 2020. vol. 173. DOI: 10.1007/978-981-15-2600-8_24.
23. Semina T.A. [Text tonality analysis: modern approaches and existing problems]. *Social'nye i gumanitarnye nauki. Otechestvennaya i zarubeznaya literaturny. Seriya 6. Yazykoznanie. Referativnyj zhurnal – Social and human sciences. Domestic and foreign literature. Series 6. Linguistics. Abstract journal*. 2020. no. 4. pp. 47–63. (In Russ.).
24. Polyansky I.S., Loginov K.O. [On the issue of assessing the intensity of interpersonal communication of social network users]. XI Vserossijskaya nauchnaya konferenciya «Sistemnyj sintez i prikladnaya sinergetika» [XI All-Russian Scientific Conference «System Synthesis and Applied Synergetics»]. Rostovna-Donu; Taganrog : Izdatel'stvo Yuzhnogo federal'nogo universiteta, 2022. pp. 132–135. (In Russ.).
25. Dong W., Luo X., Yau S.S.-T. Solving Nonlinear Filtering Problems in Real-time by Legendre Galerkin Spectral Method. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2020. vol. 66(4). pp. 1559–1572. DOI: 10.1109/TAC.2020.3002979.
26. Borovkov A.A., Moullagaliev A. *Mathematical Statistics*. London: Routledge. 1998. 592 p. DOI: 10.1201/9780203749326.
27. Luo X., Yau S.S.-T. Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2013. vol. 58. no. 10. pp. 2563–2578. DOI: 10.1109/TAC.2013.2264552.
28. Polyanskii I.S., Polyanskaya I.V., Pham T.Z. [Mathematical model of filtering canonical parameters of a repeater satellite during orbital motion]. *Fizika volnovykh processov i radiotekhnicheskie sistemy – Physics of wave processes and radio engineering systems*. 2019. vol. 22. no. 4. pp. 50–57. (In Russ.).
29. Karimi N., Kazem S., Ahmadian D., Adibi H., Ballestra L.V. On a generalized Gaussian radial basis function: Analysis and applications. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. vol. 112. pp. 46–57.
30. Epperson J.F. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis: Solutions Manual to Accompany, Third Edition*. John Wiley and Sons, Inc. 2021. 304 p. DOI: 10.1002/9781119604570.
31. Johansson R. *Numerical Python: Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy, SciPy and Matplotlib*. Second Edition. 2019. 700 p. DOI: 10.1007/978-1-4842-4246-9.
32. Lasserre J.B. Simple formula for integration of polynomials on a simplex. *BIT Numerical Mathematics*. 2021. vol. 61. pp. 523–533. DOI: 10.1007/s10543-020-00828-x.

33. Encyclopedia of special functions: the Askey-Bateman project. Volume 1: Univariate orthogonal polynomials (Eds.: Mourad H. Ismail, Walter van Assche). NY: Cambridge University Press. 2020. 388 p. DOI: 10.1017/9780511979156.
34. Wagner U., Welzl E. Connectivity of Triangulation Flip Graphs in the Plane. *Discrete and Computational Geometry*. 2022. vol. 68. pp. 1227–1284. DOI: 10.1007/s00454-022-00436-2.
35. Il'inskiia A.S., Polyanskii I.S., Stepanov D.E. [On the convergence of the barycentric method in solving internal Dirichlet and Neumann problems in R^2 for the Helmholtz equation]. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki – Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science*. 2021. vol. 31. no. 1. pp. 3–18. (In Russ.).
36. Polyanskii I.S., Arkhipov N.S., Misyurin S.Yu. On solving the optimal control problem. *Automation and Remote Control*. 2019. vol. 80. pp. 66–80. DOI: 10.1134/S0005117919010065.
37. Suescun-Díaz D., Giron L.E. Valuation of Standard Call Options Using the Euler–Maruyama Method with Strong Approximation. *Computational Economics*. 2022. vol. 61(4). pp. 1545–1560. DOI: 10.1007/s10614-022-10258-2.
38. Kuksenko S.P. [Electromagnetic compatibility: simulation] *Elektromagnitnaya sovместimost' : modelirovanie*. Tomsk: B-Spectrum, 2018. 188 p. (In Russ.).
39. Oryiema R., Angwenyi D., Midenyo K. Extended Ensemble Filter for High-dimensional Nonlinear State Space Models. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*. 2021. pp. 84–97. DOI: 10.9734/james/2021/v36i530365.
40. Eshima N. *Statistical Data Analysis and Entropy*. Springer Singapore. 2020. 257 p. DOI: 10.1007/978-981-15-2552-0.

Polansky Ivan — Ph.D., Dr.Sci., Associate Professor, Employee, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: mathematical modeling, dynamical systems, differential equations, optimization methods, optimal control, conformal mappings, computational electrodynamics, digital signal processing. The number of publications — 153. van341@mail.ru; 35, Priborostroitel'naya St., 302025, Orel, Russia; office phone: +7(953)618-7100.

Loginov Kirill — Applicant, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: mathematical modeling, methods of statistical data analysis, dynamic systems, optimal control, stochastic differential equations. The number of publications — 12. kvirs@mail.ru; 35, Priborostroitel'naya St., 302025, Orel, Russia; office phone: +7(486)254-1325.