

В.Н. ЯКИМОВ  
**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ВРЕМЕННОЙ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА НА ОСНОВЕ  
ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
РЯДА ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ  
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

*Якимов В.Н. Восстановление дискретной временной последовательности сигнала на основе локальной аппроксимации с использованием ряда Фурье по ортогональной системе тригонометрических функций.*

**Аннотация.** В статье рассмотрена разработка математического и алгоритмического обеспечения для восстановления отсчетов на проблемных участках дискретной последовательности непрерывного сигнала. Цель работы состояла в том, чтобы обеспечить восстановление утраченных отсчетов или участков отсчетов с непостоянной искаженной временной сеткой при осуществлении дискретизации сигнала с равномерным шагом и одновременно обеспечить снижение вычислительной сложности цифровых алгоритмов восстановления. Решение поставленной задачи осуществлено на основе метода локальной аппроксимации. Спецификой применения этого метода стало использование двух подпоследовательностей отсчетов, расположенных симметрично по отношению к восстанавливаемому участку последовательности. В качестве аппроксимирующей модели используется ряд Фурье по ортогональной системе тригонометрических функций. Оптимальное решение задачи аппроксимации основано на критерии минимума квадратичной погрешности. Для данного вида погрешности получены математические соотношения. Они позволяют оценить ее значение в зависимости от порядка модели и числа отсчетов подпоследовательностей, по которым осуществляется процедура восстановления. Особенность полученных в настоящей работе математических соотношений для восстановления сигнала заключается в том, что они не требуют предварительного вычисления коэффициентов ряда Фурье. Они обеспечивают непосредственно вычисление значений восстанавливаемых отсчетов. При этом в случае выбора четного числа отсчетов в подпоследовательностях, используемых для восстановления, не требуется выполнять операции умножения. Всё это обеспечило снижение вычислительной сложности разработанного алгоритма для восстановления сигнала. Экспериментальные исследования алгоритма осуществлялись на основе имитационного моделирования с использованием модели сигнала, представляющей собой аддитивную сумму гармонических компонент со случайной начальной фазой. Численные эксперименты показали, что разработанный алгоритм обеспечивает результат восстановления отсчетов сигнала с достаточно низкой погрешностью. Алгоритм реализован в виде программного модуля. Работа модуля осуществляется на основе асинхронного управления процессом восстановления отсчетов. Он может быть применен в составе метрологически значимого программного обеспечения систем цифровой обработки сигналов.

**Ключевые слова:** сигналы дискретного времени, последовательность отсчетов, восстановление сигнала, локальная аппроксимация, тригонометрический ряд Фурье.

**1. Введение.** Восстановление значений отсчетов на поврежденных участках дискретной последовательности, полученной в результате равномерной дискретизации непрерывного во времени

сигнала, является активной областью исследований различных научных и прикладных дисциплин [1-3]. В частности это касается радиолокации, вибродиагностики, беспроводной передачи данных, обработки акустических сигналов и т.д.

Потери отсчетов и непреднамеренно возникшая неравномерность временной сетки на отдельных участках дискретной последовательности в процессе ее формирования и передачи, усложняют цифровую обработку сигнала и в итоге снижают достоверность конечных результатов. Это приводит к необходимости корректировки цифрового представления сигналов. Правильный выбор способа устранения возникшей проблемы зависит от прикладной области и задач проводимых исследований, а также от инструментальных средств, используемых для преобразования непрерывного сигнала в цифровой код и формирования однородной дискретной последовательности отсчетов во временной области.

В обычных условиях, когда цифровая обработка анализируемого сигнала осуществляется без пространственно-временных ограничений выполнения процедуры дискретизации, решение задачи по восстановлению проблемных значений отсчетов может быть осуществлено путем простого повторного формирования его дискретной выборки. В отдельных случаях качество представления сигнала в дискретном виде может быть улучшено за счет использования более совершенных устройств аналого-цифрового преобразования, если такая возможность существует. В условиях невозможности повторного воспроизведения процедуры дискретизации или ограниченности предоставляемого времени для преобразования сигнала в цифровой код такой подход оказывается невыполнимым. В отдельных случаях проблемные участки с неверными числовыми данными просто исключают из обрабатываемых последовательностей и их представляют в цифровом коде с использованием нулевых или усредненных значений. Это снижает вероятность грубых ошибок результатов вычисления оценок характеристик сигнала. Однако при коротких выборках погрешность таких результатов может оказаться весьма существенной.

Для того чтобы получить приемлемую оценку значений проблемных отсчетов кроме самой дискретной последовательности сигнала следует принимать во внимание и имеющуюся информацию о причинах, оказавших негативное влияние на ее формирование. Возможность восстановления отсчетов сигнала определяется как с учетом специфики непреднамеренно возникших технических ограничений, вызвавших снижение способности устройств цифрового

кодирования выполнять требуемые преобразования на отдельных временных интервалах, так и с учетом особенностей потерь из-за сложных условий распространения самого сигнала в процессе его дискретизации. В соответствии с этим характерной чертой разработки существующих алгоритмов восстановления дискретных последовательностей сигналов является их функциональная направленность осуществлять оценку значений проблемных отсчетов с учетом неопределенностей и ограничений для каждого конкретного приложения.

Подлежащие цифровой обработке дискретные последовательности сигналов приходится восстанавливать по причине потери отсчетов, как из-за ухудшения физических свойств самого источника сигнала, так и из-за аппаратных ограничений аналого-цифрового преобразования принимающей стороны [4-6]. Недоступность отсчетов сигнала может возникнуть, когда некоторые участки выборки были пропущены из-за внешнего искажающего воздействия или высокого уровня фоновых шумов [7]. Кроме того дискретные последовательности сигналов могут иметь участки отсчетов с непостоянной временной сеткой. Причиной этого может стать непреднамеренная вариация периода следования тактовых импульсов синхронизирующих устройств, вызывающая эффект дрожания, или системные особенности представления данных в цифровом виде, приводящие к неравномерной во времени выборке [8-11]. В отдельных случаях для достижения определенных полезных свойств дискретная выборка сигнала может быть преднамеренно сформирована нерегулярной за счет рандомизации процедуры аналого-цифрового преобразования. Для того чтобы можно было бы использовать хорошо зарекомендовавшие себя классические цифровые методы обработки сигналов осуществляют ее преобразование в последовательность с равномерной временной сеткой. В частности такая процедура осуществляется на основе спектральной оценки с последующей реконструкцией формы сигнала и равномерной передискретизацией. Это позволяет эффективно восстанавливать и обрабатывать сигналы высокой сложности, но требует выполнения и относительно сложных вычислений [12, 13]. Неравномерность дискретного представления сигнала также может возникнуть в многоканальных высокоскоростных системах цифровой обработки сигнала, использующих для дискретизации сигнала несколько параллельно работающих аналого-цифровых преобразователей с более низкой скоростью. Это связано с тем, что на участках объединения несинхронизированных однородных выборок в одну общую

дискретную последовательность могут иметь место относительные смещения и потери отсчетов [14-16].

С целью получения эффективных алгоритмов для восстановления дискретной последовательности сигнала с проблемными участками отсчетов при их разработке используют специальные методы частотно-временного преобразования или разложения во временные ряды [1, 17-25]. Первый вид методов позволяет за счет преобразований с применением различного рода адаптивных ядер реконструировать форму сигнала. Применение адаптивного ядра позволяет восстановить равномерную временную сетку дискретного представления сигнала с исходным разрешением и соответствующие ее узлам значения отсчетов, но при этом может оказать сглаживающее влияние, что может негативно отразиться на форме частотного спектра сигнала. Второй тип методов на основе аппроксимативного подхода предоставляет возможность восстанавливать утраченные выборки отсчетов непосредственно во временной области. Аппроксимация позволяет воспроизводить аналитическое описание обрабатываемого фрагмента сложного сигнала. Она обеспечивает хорошую сходимость и производительность алгоритмов восстановления. Однако эти характеристики ухудшаются по мере увеличения числа проблемных отсчетов. Это объясняется тем, что практическая реализация таких алгоритмов, как правило, приводит к необходимости выполнения большого числа операций. В особенности это касается операций умножения. Проблема заключается в том, что выполнение операций умножения занимает относительно много времени и оказывает отрицательное влияние на мультипликативную сложность цифровых вычислительных процедур. Следствием этого является снижение эффективности восстановления отсчетов сигнала непосредственно в реальном режиме обработки дискретной последовательности.

Таким образом, в процессе восстановления проблемных участков равномерной дискретной последовательности актуальной задачей является уменьшение искажающего влияния неопределенности получаемых оценок значений утраченных отсчетов на динамику изменения сигнала во времени и на конечные результаты цифровой обработки сигнала в целом. При этом математическое решение этой задачи должно быть направлено на разработку практических и эффективных в вычислительном отношении алгоритмов, программная реализация которых обеспечивала бы низкую мультипликативную сложность вычисления оценок значений восстанавливаемых отсчетов.

## **2. Разработка математического обеспечения для восстановления дискретной временной последовательности сигнала на основе метода локальной аппроксимации.**

Восстановление сигнала представляет собой процедуру, в процессе выполнения которой осуществляются операции с имеющимися отсчетами сигнала с целью оценки тех значений, которые имели бы отсчеты, если бы они не были утрачены. Математическая формулировка задачи восстановления во времени сигнала по его известным дискретным значениям сводится к нахождению приемлемой функциональной зависимости, позволяющей воспроизвести его исходную форму. Чтобы спроектировать эффективный алгоритм восстановления дискретной последовательности, необходимо учитывать характерные особенности потерь отсчетов, приводящие к ухудшению результатов цифровой обработки сигнала. Основная идея заключается в том, что бы как можно точнее смоделировать проблемные участки с потерями отсчетов. Однако при этом следует принимать во внимание тот факт, что сложно найти общее представление о потерях отсчетов в дискретных последовательностях. Поэтому следует определить границы области использования разрабатываемого алгоритма, в пределах которых восстановление значений отсчетов должно быть численно стабильным и обеспечивать получение удовлетворительных результатов.

Поставленную задачу восстановления будем решать исходя из выполнения условия, что цифровой обработке подвергается непрерывный во времени и ограниченный по спектральному составу верхней граничной частотой  $F_{\max}$  сигнал  $x(t)$ . Будем также считать, что сигнал удовлетворяет условиям стационарности или квазистационарности. Выполнение условия квазистационарности позволяет учесть также те сигналы, для которых частотно-временные характеристики в пределах заданного интервала времени наблюдения можно считать неизменными, и их распространение происходит по одному и тому же временному закону в медленно изменяющейся среде. Пусть в результате аналого-цифрового преобразования такого сигнала с равномерным шагом дискретизации будем иметь дискретную последовательность отсчетов  $x_i$ . При этом процедура дискретизации сигнала осуществлена с частотой превышающей минимально необходимую частоту дискретизации, определяемую согласно теореме Котельникова. Будем считать, что для  $i \in [0; \nu]$  и  $i \in [\nu + m + 1; N - 1]$  отсчеты  $x_i$  получены без искажения временной

сетки, и их значения известны точно. Значения  $m$  отсчетов  $x_i$  для  $i \in [v+1; v+m]$  образуют проблемный участок последовательности. Они могут быть, как искажены или утрачены, так и не соответствовать равномерной временной сетке. В любом случае значения этих отсчетов необходимо восстановить.

Для восстановления проблемного участка отсчетов  $x_i$  воспользуемся методом локальной аппроксимации. Согласно этому методу восстанавливаемый участок последовательности аппроксимируется линейной комбинацией конечного набора известных и фиксированных базисных функций. При этом в качестве параметров локальности, определяющих временной интервал применения аппроксимирующей модели, для каждого проблемного участка в его окрестности выбирается область с известными значениями отсчетов. В пределах этой области определяется подпоследовательность отсчетов, на основе которой осуществляется построение аппроксимирующей модели, как решение локальной экстремальной задачи [26]. Применение локальной аппроксимации позволяет получать оценки значений проблемных отсчетов с учетом только динамики изменения известных значений подпоследовательностей в близких узлах. Одним из явных преимуществ такого метода является то, что он обеспечивает оперативность процедуры восстановления. Однако следует понимать, что локальная аппроксимация применима для восстановления значений отсчетов на временных интервалах, на которых прослеживается устойчивая зависимость значений проблемных участков и используемых для восстановления их отсчетов подпоследовательностей. Исходя из сказанного, применение данного метода на практике предполагает выбор аппроксимирующей модели, критерия оценки ее параметров, определение области и состава локально расположенных подпоследовательностей.

В соответствии методом локальной аппроксимации будем осуществлять восстановление значений отсчетов  $x_i$  для  $i \in [v+1; v+m]$  в узлах временной сетки с равномерным шагом равным исходному интервалу дискретизации. При этом в окрестности восстанавливаемого участка выберем две локальные подпоследовательности отсчетов  $x_i$  с известными значениями, где  $i \in [v-L+1; v]$  и  $i \in [v+m+1; v+m+L]$ . Схематично восстанавливаемый участок представлен на рисунке 1.

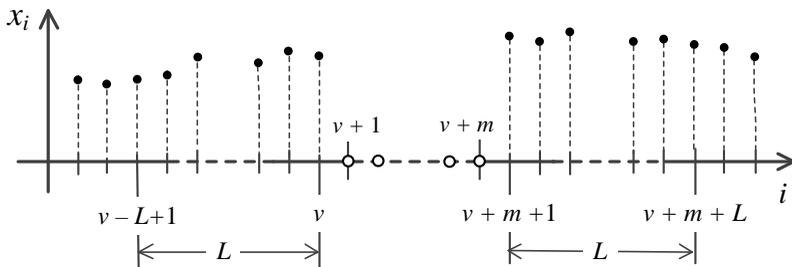


Рис. 1. Фрагмент последовательности с восстанавливаемым участком

Фактически будем использовать  $L$  предыдущих (слева) отсчетов и  $L$  последующих (справа) отсчетов от проблемного участка последовательности. Отметим, что  $L$  должно удовлетворять условиям:

$$v - L + 1 \geq 0 \text{ и } v + m + L \leq N - 1. \quad (1)$$

В качестве аппроксимирующей модели выберем тригонометрический ряд Фурье [27]:

$$\hat{x}_i = a_0 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k \cos \frac{2\pi k}{L} i + \sum_{k=1}^{p-1} b_k \sin \frac{2\pi k}{L} i, \quad (2)$$

где  $p$  – порядок модели,  $a_k$  и  $b_k$  – постоянные коэффициенты.

Тригонометрический ряд Фурье представляет собой функциональный ряд, основу построения которого составляют периодические базисные функции синусов и косинусов с кратными частотами. В (2) функции синусов и косинусов попарно ортогональны и образуют ортогональные системы для  $i \in [-L; L]$ . Ортогональные системы характеризуются хорошими вычислительными свойствами и обеспечивают равномерную сходимость результата в пределах интервала аппроксимации во всей области определения сигнала [27-30].

Значения коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  для модели (2) порядка  $p$  будем находить из критерия минимума квадратичной погрешности:

$$\delta_p = \sum_i (\hat{x}_i - x_i)^2 \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $i \in [\nu - L + 1; \nu]$  и  $i \in [\nu + m + 1; \nu + m + L]$ .

В соответствии с критерием (3) нахождение значений коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  аппроксимирующей модели осуществляется таким образом, чтобы сумма квадратов ошибок приближения в узлах временной сетки дискретизации была минимальной. При этом такой подход позволяет сглаживать возможные ошибки за счет использования избыточного числа отсчетов в подпоследовательностях.

Для обеспечения выполнения критерия (3) найдем частные производные первого порядка по  $a_0$ ,  $a_n$  и  $b_n$ , где  $n \in [1; p - 1]$ :

$$\frac{\partial \delta_p}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial \delta_p}{\partial a_n} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \delta_p}{\partial b_n} = 0. \quad (4)$$

С целью упрощения записей математических соотношений введем обозначения:

$$\alpha_{k,i} = \cos \frac{2\pi k}{L} i \quad \text{и} \quad \beta_{k,i} = \sin \frac{2\pi k}{L} i. \quad (5)$$

После вычисления частных производных (4) с учетом (5) будем иметь систему уравнений, решение которой позволяет получить соотношения для определения значений коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$ :

$$2La_0 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k \sum_i \alpha_{k,i} + \sum_{k=1}^{p-1} b_k \sum_i \beta_{k,i} = \sum_i x_i, \quad (6)$$

$$a_0 \sum_i \alpha_{n,i} + \sum_{k=1}^{p-1} a_k \sum_i \alpha_{k,i} \alpha_{n,i} + \sum_{k=1}^{p-1} b_k \sum_i \beta_{k,i} \alpha_{n,i} = \sum_i x_i \alpha_{n,i}, \quad (7)$$

$$a_0 \sum_i \beta_{n,i} + \sum_{k=1}^{p-1} a_k \sum_i \alpha_{k,i} \beta_{n,i} + \sum_{k=1}^{p-1} b_k \sum_i \beta_{k,i} \beta_{n,i} = \sum_i x_i \beta_{n,i}, \quad (8)$$

где  $n \in [1; p - 1]$ ;  $i \in [\nu - L + 1; \nu]$  и  $i \in [\nu + m + 1; \nu + m + L]$ .

Ввиду того, что функции  $\alpha_{k,i}$  и  $\beta_{k,i}$  образуют ортогональные системы, справедливы соотношения [27, 30]:

$$\sum_i \alpha_{k,i} \alpha_{n,i} = \sum_i \cos \frac{2\pi k}{L} i \cos \frac{2\pi n}{L} i = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ L, & k = n. \end{cases} \quad (9)$$

$$\sum_i \beta_{k,i} \beta_{n,i} = \sum_i \sin \frac{2\pi k}{L} i \sin \frac{2\pi n}{L} i = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ L, & k = n. \end{cases} \quad (10)$$

$$\sum_i \cos \frac{2\pi k}{L} i \sin \frac{2\pi n}{L} i = 0, \quad k \in [1; p-1] \text{ и } n \in [0; p-1]. \quad (11)$$

Принимая во внимание (9)-(11), для  $a_k$  и  $b_k$  получаем:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \sum_i x_i, \quad a_n = \frac{1}{L} \sum_i x_i \alpha_{n,i}, \quad b_n = \frac{1}{L} \sum_i x_i \beta_{n,i}. \quad (12)$$

С учетом того, что  $i \in [v-L+1; v]$  и  $i \in [v+m+1; v+m+L]$ , в явном виде для (12) будем иметь:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \sum_{i=0}^{L-1} (x_{v-i} + x_{i+v+m+1}), \quad (13)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \left( x_{v-i} \cos \frac{2\pi n(v-i)}{L} + x_{i+v+m+1} \cos \frac{2\pi n(i+v+m+1)}{L} \right), \quad (14)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \left( x_{v-i} \sin \frac{2\pi n(v-i)}{L} + x_{i+v+m+1} \sin \frac{2\pi n(i+v+m+1)}{L} \right). \quad (15)$$

Соотношения (13)-(15) определяют вычислительный алгоритм нахождения коэффициентов аппроксимирующей модели (2) при заданном числе отсчетов подпоследовательностей  $L$  и порядке модели  $p$  в процессе восстановления  $m$  значений проблемных отсчетов последовательности  $x_i$ . При этом квадратическая погрешность равна:

$$\delta_p = \sum_{i=0}^{L-1} (x_{v-i}^2 + x_{i+v+m+1}^2) - 2La_0^2 - L \sum_{n=1}^{p-1} (a_n^2 + b_n^2). \quad (16)$$

Согласно (16) при выбранном значении  $L$  погрешность  $\delta_p$  полностью зависит от порядка модели  $p$ . Однако следует иметь в виду, что увеличение порядка модели  $p$  ведет к усложнению вычислительного процесса восстановления. Рассмотрим вариант рационального выбора порядка модели  $p$ .

Из (14)-(15) следует:

$$a_n = a_{L-n} \text{ и } b_n = -b_{L-n}. \quad (17)$$

Отсюда приходим к простому выводу, что  $0 \leq n \leq L/2$ . При этом имеем, что  $b_{L/2} = 0$ . Как следствие из этого получаем, что число отсчетов  $L$  в каждой из подпоследовательностей, по которым осуществляется локальная аппроксимация, предпочтительно выбирать четным. В этом случае порядок модели целесообразно выбирать равным не более чем  $p = (L/2 + 1)$ . В свою очередь при предварительно выбранном порядке модели  $p$  число отсчетов по возможности следует задавать равным  $L = 2(p - 1)$  для каждой из подпоследовательностей. С учетом выполнения этих условий рациональная с точки зрения выбора порядка и его влияния на вычислительную сложность аппроксимирующая модель (2) будет иметь вид:

$$\hat{x}_i = a_0 + \sum_{k=1}^{L/2} a_k \cos \frac{2\pi k}{L} i + \sum_{k=1}^{L/2-1} b_k \sin \frac{2\pi k}{L} i. \quad (18)$$

Подставив  $\hat{x}_i$  из (18) в (3), получаем, что с учетом (13)-(15) для  $p = (L/2 + 1)$  квадратическая погрешность равна:

$$\begin{aligned} \delta_{\frac{L}{2}+1} = & \frac{1}{2} \sum_{i=m+1}^L (x_{i+v} + x_{i+v-L})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (x_{i+v-L} + x_{i+v+L})^2 + \\ & + \frac{1}{2L} \left( \sum_{i=0}^{L-1} (-1)^i (x_{v-1} + (-1)^{m+1} x_{i+v+m+1}) \right)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее получим соотношения, которые позволяют упростить алгоритм восстановления значений отсчетов  $x_i$ . С этой целью примем, что  $i = v + j$ , где  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ . Тогда (2) примет вид:

$$\hat{x}_{v+j} = a_0 + \sum_{k=1}^{p-1} a_k \cos \frac{2\pi k(v+j)}{L} + \sum_{k=1}^{p-1} b_k \sin \frac{2\pi k(v+j)}{L}. \quad (20)$$

Подставим  $a_k$  и  $b_k$  из (13)-(15) в (20). После изменения порядка суммирования по индексам  $k$  и  $i$ , перегруппировки и приведения подобных членов будем иметь:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{v+j} = & \frac{1}{2L} \sum_{i=0}^{L-1} (x_{v-i} + x_{i+v+m+1}) + \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} x_{v-i} \sum_{k=1}^{p-1} (C1_{k,i} + S1_{k,i}) + \\ & + \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} x_{i+v+m+1} \sum_{k=1}^{p-1} (C2_{k,i} + S2_{k,i}), \end{aligned} \quad (21)$$

$$C1_{k,i} = \cos \frac{2\pi k(v+j)}{L} \cos \frac{2\pi k(v-i)}{L}, \quad (22)$$

$$C2_{k,i} = \cos \frac{2\pi k(v+j)}{L} \cos \frac{2\pi k(i+v+m+1)}{L}, \quad (23)$$

$$S1_{k,i} = \sin \frac{2\pi k(v+j)}{L} \sin \frac{2\pi k(v-i)}{L}, \quad (24)$$

$$S2_{k,i} = \sin \frac{2\pi k(v+j)}{L} \sin \frac{2\pi k(i+v+m+1)}{L}. \quad (25)$$

В (22) и (23) произведения косинусов могут быть представлены в виде суммы косинусов, а в (24) и (25) произведения синусов в виде разности косинусов. Осуществив соответствующие преобразования, после приведения подобных членов получаем:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{v+j} = & \frac{1}{2L} \sum_{i=0}^{L-1} x_{v-i} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \cos \frac{2\pi k(j+i)}{L} \right) + \\ & + \frac{1}{2L} \sum_{i=0}^{L-1} x_{i+v+m+1} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \cos \frac{2\pi k(i+m+1-j)}{L} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

В (26) суммы по индексу  $k$  будут равны:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \cos \frac{2\pi k(j+i)}{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin((2p-1)\pi(j+i)/L)}{\sin(\pi(j+i)/L)} - 1 \right), \quad (27)$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} \cos \frac{2\pi k(i+m+1-j)}{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin((2p-1)\pi(i+m+1-j)/L)}{\sin(\pi(i+m+1-j)/L)} - 1 \right). \quad (28)$$

С учетом (27) и (28) будем иметь:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{v+j} = & \frac{1}{2L} \sum_{i=0}^{L-1} x_{v-i} \frac{\sin((2p-1)\pi(j+i)/L)}{\sin(\pi(j+i)/L)} + \\ & + \frac{1}{2L} \sum_{i=0}^{L-1} x_{i+v+m+1} \frac{\sin((2p-1)\pi(i+m+1-j)/L)}{\sin(\pi(i+m+1-j)/L)}. \end{aligned} \quad (29)$$

В (29) в первой сумме заменим  $j+i$  на  $i$ , а во второй сумме заменим  $i+m+1-j$  на  $i$ . С учетом этого окончательно получаем:

$$\hat{x}_{v+j} = \frac{1}{2L} \left( \sum_{i=j}^{L-1+j} x_{v+j-i} D_i(2p-1, L) + \sum_{i=m+1-j}^{L+m-j} x_{v+j+i} D_i(2p-1, L) \right), \quad (30)$$

$$D_i(p, L) = \frac{\sin((2p-1)i\pi/L)}{\sin(\pi i/L)}. \quad (31)$$

Соотношения (30) и (31) определяют алгоритм восстановления отсчетов  $\hat{x}_{v+j}$  для  $j=1, 2, 3, \dots, m$  без предварительного вычисления коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$ . В (31)  $\sin(\pi i/L) = 0$  для  $i = \lambda L$ , где  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ . В результате в (31) получаем деление на ноль. Эту ситуацию необходимо учитывать и не допускать в процессе выполнения процедуры восстановления. Для этого случая имеем:

$$D_i(p, L) = \frac{\sin(2p-1)\lambda\pi}{\sin \lambda\pi} = (2p-1). \quad (32)$$

Для того чтобы осуществлять вычисления  $\hat{x}_{v+j}$  без проверки условия  $i = \lambda L$  соотношение (30) запишем следующим образом:

$$\hat{x}_{v+j} = \frac{1}{2L} \left( (2p-1)(x_{v+j-L} + x_{v+j+L}) + \sum_{i=j}^{L-1} x_{v+j-i} D_i(p, L) + \sum_{i=1}^{j-1} x_{v+j-i-L} D_i(p, L) + \sum_{i=m+1-j}^{L-1} x_{v+j+i} D_i(p, L) + \sum_{i=1}^{m-j} x_{v+j+i+L} D_i(p, L) \right). \quad (33)$$

Полученное соотношение справедливо для любого порядка модели  $p$ . Однако как было показано выше с целью снижения вычислительной сложности в процессе восстановления отсчетов  $\hat{x}_{v+j}$  порядок модели  $p$  при четном числе отсчетов подпоследовательностей  $L$  по возможности целесообразно выбирать равным  $p = (L/2 + 1)$ . С учетом такого выбора порядка (33) примет вид:

$$\hat{x}_{v+j} = \frac{x_{v+j-L} + x_{v+j+L}}{2} + \frac{(-1)^j}{2L} \sum_{i=0}^{L-1} (-1)^i (x_{v-i} - (-1)^m x_{v+i+m+1}). \quad (34)$$

С математической точки зрения соотношение (34) является достаточно простым. Надо только помнить, что число отсчетов  $L$  в подпоследовательностях, используемых для аппроксимации, обязательно должно быть четным. Согласно этому соотношению вычисление оценок значений отсчетов  $\hat{x}_{v+j}$  в своей основе сводится к выполнению операций суммирования. При этом необходимость в выполнении операций умножения фактически отсутствуют. Это позволяет говорить о том, что практическая реализация соотношения (34) приводит к вычислительным процедурам с низкой мультипликативной сложностью. Такой результат повышает вычислительную эффективность восстановления последовательности отсчетов сигнала.

**3. Разработка алгоритмического обеспечения для восстановления дискретной временной последовательности сигнала.** Соотношения (33) и (34) положены в основу разработки вычислительных алгоритмов для восстановления дискретной временной последовательности сигнала. Алгоритмы разработаны с ориентированием на принципы модульного программирования. Ниже представлена краткая запись этих алгоритмов, отражающая выполнение основных действий при их реализации.

**Алгоритм восстановления на основе соотношения (33).**

1. Инициализация восстановления выборки отсчетов:
  - 1.1. идентифицируются параметры проблемного участка  $v$  и  $m$ ;

- 1.2. задается порядок аппроксимирующей модели  $p$ ;  
 1.3. задается число отсчетов  $L$  для подпоследовательностей с учетом условий  $v - L + 1 \geq 0$  и  $v + m + L \leq N - 1$ .
2. Выполнение процедуры восстановления выборки отсчетов:
- 2.1. для  $i = 1, 2, 3, \dots, L - 1$  вычисляется массив отсчетов:

$$DpL[i] = \sin((2 \times p - 1) \times i \times \pi / L) / \sin(\pi \times i / L);$$

- 2.2. для  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  выполняются действия с 2.2.1 по 2.2.6:

2.2.1.  $\hat{x}[v + j] = (2 \times p - 1)(x[v + j - L] + x[v + j + L]);$

- 2.2.2. для  $i = j, j + 1, j + 2, \dots, L - 1$  вычисляется:

$$\hat{x}[v + j] = \hat{x}[v + j] + x[v + j - i] \times DpL[i];$$

- 2.2.3. для  $i = 1, 2, 3, \dots, j - 1$  вычисляется:

$$\hat{x}[v + j] = \hat{x}[v + j] + x[v + j - i - L] \times DpL[i];$$

- 2.2.4. для  $i = m - j + 1, m - j + 2, m - j + 3, \dots, L - 1$  вычисляется:

$$\hat{x}[v + j] = \hat{x}[v + j] + x[v + j - i - L] \times DpL[i];$$

- 2.2.5. для  $i = 1, 2, 3, \dots, m - j$  вычисляется:

$$\hat{x}[v + j] = \hat{x}[v + j] + x[v + j + i + L] \times DpL[i];$$

- 2.2.6. для текущего значения  $j$  вычисляется оценка отсчета:

$$\hat{x}[v + j] = \hat{x}[v + j] / (2 \times L).$$

3. В исходной последовательности отсчеты  $x[i]$  с индексами  $i = v + 1, v + 2, v + 3, \dots, v + m$  замещаются на оценки  $\hat{x}[v + j]$ .

Особенностью алгоритма на основе соотношения (33) является то, что значения отсчетов  $DpL[i]$ , которые вычисляются согласно (31), не зависят от значений параметров восстанавливаемого участка  $v$  и  $m$ . Поэтому, если возникает ситуация, требующая восстановления нескольких проблемных участков в пределах одной и той же последовательности, то нет необходимости в повторном вычислении

массива этих отсчетов при неизменных значениях  $p$  и  $L$ . С учетом этого он формируется предварительно непосредственно после инициализации параметров восстановления перед выполнением основной процедуры вычисления оценок восстанавливаемых отсчетов. Повторное формирование этого массива осуществляется только при изменении параметров аппроксимации. Однако целесообразно сохранять все его предыдущие версии для случая возврата к ранее используемым параметрам аппроксимации. Отметим также то, что вычислительные процедуры 2.2.2 – 2.2.5 являются относительно независимыми при их выполнении. Поэтому их можно представить в виде отдельных потоков обработки отсчетов, которые могут выполняться параллельно. При этом многопоточность обработки будет учитываться в виде суммирования полученных результатов 2.2.2 – 2.2.5 при выполнении 2.2.6. Такой подход ускоряет вычислительный процесс и способствует повышению производительности процедуры восстановления отсчетов для случая независимого задания значений  $L$  и  $p$ .

#### Алгоритм восстановления на основе соотношения (34).

1. Инициализация восстановления выборки отсчетов:
  - 1.1. идентифицируются параметры проблемного участка  $v$  и  $m$ ;
  - 1.2. задается порядок аппроксимирующей модели  $p$  или четное число отсчетов  $L$  для подпоследовательностей с учетом выполнения условий  $v - L + 1 \geq 0$  и  $v + m + L \leq N - 1$ ;
    - 1.2.1. если задается порядок модели  $p$ , то  $L = 2 \times (p - 1)$ ;
    - 1.2.2. если задается число отсчетов  $L$  для подпоследовательностей, то  $p = (L / 2 + 1)$ .
2. Выполнение процедуры восстановления выборки отсчетов:
  - 2.1.  $Sum1 = 0$  и  $Sum2 = 0$ ;
  - 2.2. для  $i = 0, 2, 4, \dots, L - 2$  вычисляются промежуточные суммы:

$$Sum1 = Sum1 + x[v - i] - x[v - i - 1];$$

$$Sum2 = Sum2 + x[v + i + m + 1] - x[v + i + m + 2];$$

- 2.3. если  $m$  чётное, то  $Sum = (Sum1 - Sum2) / 2L$ ,  
иначе  $Sum = (Sum1 + Sum2) / 2L$ ;
- 2.4. для  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  выполняются действия:
  - 2.4.1.  $\hat{x}[v + j] = (x[v + j - L] + x[v + j + L]) / 2$ ;
  - 2.4.2. для текущего значения  $j$  вычисляется оценка отсчета:

если  $j$  чётное, то  $\hat{x}[v + j] = \hat{x}[v + j] + Sum$ ,

иначе  $\hat{x}[v + j] = \hat{x}[v + j] - Sum$ ;

3. В исходной последовательности отсчеты  $x[i]$  с индексами  $i = v + 1, v + 2, v + 3, \dots, v + m$  замещаются на оценки  $\hat{x}[v + j]$ .

Алгоритм на основе соотношения (34) на этапе инициализации его выполнения предлагает сделать альтернативный выбор между приоритетным заданием порядка аппроксимирующей модели  $p$  и числом отсчетов  $L$  для подпоследовательностей, которое обязательно должно быть только четным числом. При задании одного из этих параметров, второй рассчитывается согласно 1.2.1 или 1.2.2. Алгоритм не требует выполнения операций цифрового умножения. Основу его выполнения составляет вычисление промежуточных сумм  $Sum1$  и  $Sum2$  согласно 2.2. Эти суммы можно вычислять независимо друг от друга. Поэтому при программной реализации алгоритма процедуры вычисления сумм  $Sum1$  и  $Sum2$  можно реализовать в виде отдельных потоков обработки отсчетов подпоследовательностей, которые будут выполняться параллельно. Объединение результатов многопоточных вычислений будет учитываться при выполнении 2.3. Данный алгоритм совместно с многопоточной организацией определяемых им вычислительных процедур повышают производительность восстановления отсчетов. Однако следует учитывать тот факт, что применение алгоритма ограничено требованием выполнения обязательного условия взаимно однозначного соответствия порядка аппроксимирующей модели  $p$  и числа отсчетов  $L$  для подпоследовательностей.

В общем случае рассмотренные алгоритмы позволяют эффективно и рационально в вычислительном отношении организовать процесс восстановления отсчетов, поскольку большинство вычислительных процедур можно выполнять параллельно. Практическая реализация алгоритмов осуществлена в виде проблемно-ориентированного программного модуля. Функциональным назначением модуля является восстановление утраченных отсчетов или значений отсчетов на участках дискретной последовательности сигнала с непостоянной искаженной временной сеткой. Работа модуля осуществляется на основе асинхронного управления процессом восстановления отсчетов. Реализация асинхронной модели управления обеспечивает выполнение процедуры вычисления оценок значений отсчетов в режиме многозадачности. Модуль запускается по мере необходимостью восстановления конкретного участка дискретной последовательности сигнала.

Процедура восстановления проходит без блокировки выполнения вычислительного процесса, реализуемого основной программой по обработке сигнала. Это приводит к тому, что возможности вычислительных средств используются наиболее рационально. При этом предварительно устанавливается режим задания порядка аппроксимирующей модели и число отсчетов для подпоследовательностей, по которым осуществляется восстановление проблемных участков сигнала. Модуль может быть использован в качестве функционально самостоятельного компонента в составе интегрированного метрологически значимого программного обеспечения, выполняемого на прикладном уровне систем для комплексного цифрового анализа сложных сигналов [31, 32].

**4. Численные эксперименты по восстановлению дискретных последовательностей сигнала.** Исследования работоспособности и функциональных возможностей разработанных алгоритмов осуществлялось на основе имитационного моделирования дискретной последовательности сигнала с потерями отсчетов и последующего ее восстановления. В процессе моделирования для имитации работы модуля использовалась среда программирования TypeScript. Численные эксперименты проводились с применением набора тестовых моделей сигналов с ограниченным частотным спектром. В качестве математической основы представления таких моделей сигналов во временной области использовалась аддитивная смесь независимых в статистическом смысле гармонических компонент с нулевой постоянной составляющей. Аддитивный гармонический синтез модели сигнала предоставил возможность эффективно и просто регулировать его частотный состав и контролировать форму во временной области.

Значения частот гармонических компонент в процессе моделирования задавались в пределах от нуля до единицы. Они интерпретировались как нормированные частоты  $f_k^n = f_k / F_{\max}$  по отношению к верхней граничной частоте  $F_{\max}$  в спектре сигнала. Использование понятия нормированной частоты обеспечило моделирование различного частотного состава сигнала в единой полосе частот в пределах от нуля до единицы. Значения амплитуд гармонических компонент  $A_k^n$  задавались в диапазоне от нуля до единицы и интерпретировались как нормированные по отношению к наибольшей амплитуде компоненты, присутствующей в составе сигнала. Начальные фазы гармонических компонент удовлетворяли условию  $\phi_k \in [-\pi; +\pi]$ . Они принимали случайные значения в

пределах указанного диапазона. Для этого использовался программный генератор чисел с равномерным законом распределения. Переход к нормированным значениям амплитуд и частот позволил формализовать проведение численных экспериментов и оценить потенциальные возможности разработанного математического и алгоритмического обеспечения для восстановления дискретных последовательностей сигналов с различными амплитудно-частотными характеристиками.

Для каждого эксперимента генерировалась реализация модели сигнала и формировалась его дискретная последовательность. Эксперименты повторялись для различных значений частот дискретизации с учетом присутствия в составе модели сигнала гармонической составляющей с наибольшей нормированной частотой. В частности, одна из таких реализаций модели содержала семь гармонических компонент, нормированные амплитуды и частоты которых имели значения:  $A_1^n = 0,2$  и  $f_1^n = 0,1$ ;  $A_2^n = 0,35$  и  $f_2^n = 0,25$ ;  $A_3^n = 0,5$  и  $f_3^n = 0,3$ ;  $A_4^n = 0,7$  и  $f_4^n = 0,35$ ;  $A_5^n = 1$  и  $f_5^n = 0,4$ ;  $A_6^n = 0,7$  и  $f_6^n = 0,45$ ;  $A_7^n = 0,15$  и  $f_7^n = 0,5$ . В серии экспериментов дискретная последовательность данной реализации модели была получена в результате равномерной дискретизации с нормированной частотой  $1000f_7^n = 500$ , которая является достаточно высокой. В этом случае соседние отсчеты дискретной последовательности могут иметь мало отличающиеся значения. Ограничение значений таких отсчетов до конечного числа разрядов позволило интерпретировать процесс восстановления в условиях аддитивного шума, обусловленного квантованием по уровню мало отличающихся значений сигнала.

В процессе моделирования часть экспериментов была направлена на оценку результатов восстановления в зависимости от выбора порядка  $p$  аппроксимирующей модели и числа отсчетов  $L$  в подпоследовательностях, используемых для восстановления. В таблицах 1 и 2 представлены результаты экспериментов по восстановлению участка с пятью отсчетами. В таблице 1 результаты получены для модели порядка  $p=5$ , а число отсчетов  $L$  каждой подпоследовательности было равно пяти, десяти и шестнадцати. В таблице 2 результаты получены для  $L=20$ , а порядок модели  $p$  был равен пяти, десяти и пятнадцати.

Эксперименты также проводились с учетом вариации числа восстанавливаемых отсчетов на проблемном участке при неизменном значении порядка модели и фиксированном числе отсчетов подпоследовательностей. Эти эксперименты имели особое значение

для оценки возможности восстановления утраченных отсчетов последовательностей сигналов, которые формируются в условиях ограниченного времени его наблюдения. В таблице 3 представлены результаты восстановления десяти, пятнадцати и двадцати отсчетов, где  $L=20$  и  $p=5$ .

Для оценки отклонения результатов восстановления от истинных значений отсчетов использовалась относительная погрешность. Она рассчитывалась по формуле  $\delta_i^x = (\hat{x}_i - x_i)/x_i$ .

Результаты численных экспериментов, приведенные в таблицах 1, 2 и 3 не содержат грубых систематических ошибок, которые существенно бы исказили истинные значения восстанавливаемых отсчетов. Для каждого результата на всем интервале восстановления проблемного участка пределы изменения относительной погрешности отклонения вычисленных оценок отсчетов от их идеальных значений не превышают по абсолютной величине 0,01, т.е. одного процента.

Таблица 1. Результаты восстановления отсчетов для  $m=5, p=5$  и  $L=5,10,16$

$j$	$\nu + j$	$x_{\nu+j}$	$L=5$		$L=10$		$L=16$	
			$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$	$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$	$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$
1	201	1.9684	1.9628	-0.0028	1.9663	-0.0011	1.9678	-0.0003
2	202	1.9709	1.9679	-0.0015	1.9685	-0.0012	1.9618	-0.0046
3	203	1.9734	1.9729	-0.0002	1.9714	-0.0011	1.9674	-0.0031
4	204	1.9759	1.9779	-0.0010	1.9735	-0.0012	1.9731	-0.0015
5	205	1.9784	1.9828	0.0022	1.9763	-0.0010	1.9689	-0.0047

Таблица 2. Результаты восстановления отсчетов для  $m=5, L=20$  и  $p=5,10,15$

$j$	$\nu + j$	$x_{\nu+j}$	$p=5$		$p=10$		$p=15$	
			$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$	$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$	$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$
1	201	1.9684	1.9666	-0.0009	1.9596	-0.0044	1.9525	-0.0080
2	202	1.9709	1.9605	-0.0053	1.9616	-0.0047	1.9658	-0.0026
3	203	1.9734	1.9633	-0.0051	1.9647	-0.0044	1.9648	-0.0043
4	204	1.9759	1.9678	-0.0041	1.9665	-0.0047	1.9633	-0.0063
5	205	1.9784	1.9658	-0.0064	1.9695	-0.0044	1.9734	-0.0025

Таблица 3. Результаты восстановления отсчетов для  $p=5, L=20$ 

$j$	$\nu + j$	$x_{\nu+j}$	$m=10$		$m=15$		$m=20$	
			$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$	$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$	$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$
1	201	1.9684	1.9673	-0.0005	1.9678	-0.0003	1.9711	0.0014
2	202	1.9709	1.9600	-0.0055	1.9599	-0.0056	1.9600	-0.0055
3	203	1.9734	1.9619	-0.0058	1.9613	-0.0061	1.9605	-0.0065
4	204	1.9759	1.9678	-0.0041	1.9676	-0.0042	1.9672	-0.0044
5	205	1.9784	1.9708	-0.0038	1.9714	-0.0035	1.9717	-0.0034
6	206	1.9807	1.9708	-0.0049	1.9715	-0.0047	1.9719	-0.0045
7	207	1.9831	1.9726	-0.0053	1.9722	-0.0055	1.9721	-0.0055
8	208	1.9854	1.9773	-0.0041	1.9760	-0.0047	1.9756	-0.0049
9	209	1.9876	1.9802	-0.0038	1.9801	-0.0037	1.9799	-0.0039
10	210	1.9898	1.9768	-0.0065	1.9813	-0.0042	1.9818	-0.0040
11	211	1.9920	–	–	1.9812	-0.0054	1.9818	-0.0051
12	212	1.9941	–	–	1.9839	-0.0051	1.9836	-0.0053
13	213	1.9962	–	–	1.9889	-0.0037	1.9878	-0.0042
14	214	1.9982	–	–	1.9909	-0.0036	1.9909	-0.0037
15	215	2.0002	–	–	1.9867	-0.0067	1.9907	-0.0047
16	216	2.0021	–	–	–	–	2.0022	-0.0058
17	217	2.0040	–	–	–	–	1.9945	-0.0047
18	218	2.0058	–	–	–	–	0.0027	-0.0027
19	219	2.0076	–	–	–	–	2.0001	-0.0037
20	220	2.0094	–	–	–	–	1.9905	-0.0093

Рассмотренный подход по восстановлению отсчетов был также апробирован с использованием разработанного программного модуля при анализе реальных сигналов, в частности при вибрационных исследованиях автобуса марки МАЗ-206067 Минского автомобильного завода. МАЗ-206067 – это автобус категории МЗ, класса I согласно классификации Правил ООН № 107 и Технического регламента Таможенного союза ТР ТС 018/2011 «О безопасности колесных транспортных средств». Автобус предназначен для перевозки пассажиров на городских и пригородных маршрутах средней загруженности. Он оснащен двигателем Mercedes-Benz OM904LA (дизель, 177 л.с.) и шестиступенчатой автоматической коробкой

передач ZF6HP504C. Для регистрации вибрационных сигналов использовались однокомпонентные акселерометры со встроенной электроникой ICP общего назначения 352C04 с разрешением  $0,005 \text{ м/с}^2$ . Они обеспечивают хорошее разрешение для измерения сигналов вибрации с малыми уровнями. Фирма изготовитель «PCB Piezotronics, Inc.». Установка датчиков и обработка вибрационных сигналов осуществлялись в соответствии с требованиями по измерению и представлению результатов измерений локальной вибрации, а также согласно требованиям по оценке воздействия локальной вибрации на пассажира и водителя [33-36]. Частотный диапазон исследования вибрационных сигналов находился в пределах до 200 Гц. Длительность формирования последовательности доходила до 110 секунд. Частота дискретизации была равна 51200 Гц. Один из результатов восстановления десяти отсчетов сигнала вибрации на пассажирском сиденье над двигателем представлен в таблице 4.

Таблица 4. Результаты восстановления десяти отсчетов сигнала вибрации на пассажирском сиденье над двигателем автобуса марки МАЗ-206067

$j$	$\nu + j$	$x_{\nu+j}$	$p=5, L=20$		$p=10, L=20$	
			$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$	$\hat{x}_{\nu+j}$	$\delta_i^x$
1	30286	0.83	0.8285	-0.0028	0.8275	-0.0030
2	30287	0.81	0.8064	-0.0045	0.8069	-0.0038
3	30288	0.88	0.8759	-0.0047	0.8764	-0.0041
4	30290	0.79	0.7867	-0.0042	0.7867	-0.0042
5	30291	0.71	0.7065	-0.0050	0.7069	-0.0043
6	30292	0.72	0.7163	-0.0051	0.7170	-0.0041
7	30293	0.68	0.6767	-0.0049	0.6773	-0.0040
8	30294	0.69	0.6868	-0.0047	0.6874	-0.0038
9	30295	0.72	0.7172	-0.0039	0.7173	-0.0037
10	30296	0.62	0.6172	-0.0045	0.6178	-0.0035

Основываясь на полученных результатах численных экспериментов и примере восстановления реального вибрационного сигнала, можно говорить о том, что разработанный подход позволяет осуществлять восстановление отсчетов на проблемных участках дискретной последовательности сигнала с достаточно низкой погрешностью. В реальных условиях на полезный сигнал могут накладываться внешние аддитивные фоновые шумы и помехи, что приводит к искажению его исходной формы. Это оказывает влияние на ошибку вычисления оценок значений проблемных отсчетов и на выбор

количества отсчетов подпоследовательностей, необходимых для успешного выполнения процедуры восстановления. В общем случае можно считать, что в процессе восстановления происходит оценка и шумовой составляющей в отсчете сигнала. Поэтому по возможности следует принимать во внимание степень коррелированности полезного сигнала и внешних шумов, чтобы в последующем это можно было учесть при цифровой обработке восстановленной последовательности сигнала. При этом следует иметь в виду также то, что разработанный подход предполагает восстановление отсчетов последовательности непрерывного сигнала, который может быть представлен в виде стационарной или квазистационарной модели в пределах интервала времени, на котором осуществляется его дискретизация.

**5. Заключение.** В статье рассмотрена разработка математического и алгоритмического обеспечения для восстановления значений отсчетов на проблемных участках последовательности равномерно дискретизированного непрерывного во времени сигнала. Предполагается, что сигнал может рассматриваться как стационарный или квазистационарный в пределах интервала его обработки. Разработка осуществлена на основе метода локальной аппроксимации. Спецификой предложенного в настоящей работе подхода является то, что локальная аппроксимация осуществляется по двум подпоследовательностям отсчетов с известными значениями, которые находятся непосредственно перед и после восстанавливаемого участка дискретной последовательности сигнала. Такой подход позволяет получить оценки значений проблемных отсчетов непосредственно с учетом динамики изменения известных значений последовательности сигнала в близких по расположению к ним узлах временной сетки. В качестве аппроксимирующей модели используется ряд Фурье по ортогональной системе тригонометрических функций. Существенной особенностью полученных в настоящей работе математических соотношений для вычисления оценок проблемных отсчетов является то, что они не требуют предварительного вычисления коэффициентов ряда Фурье. Вычислительные процедуры, определяемые этими соотношениями, позволяют непосредственно получать оценки значений восстанавливаемых отсчетов во временной области. Кроме того, при четном числе отсчетов подпоследовательностей  $L$ , на основе обработки которых осуществляется восстановление проблемного участка сигнала, и выборе порядка аппроксимирующей модели равным  $p = (L/2 + 1)$ , вычислительные процедуры не требуют выполнения операций умножения.

Полученные математические соотношения реализованы в виде вычислительных алгоритмов, которые являются неитеративными. Они основаны на выполнении простых арифметических и логических операциях, что снижает общую сложность вычислительных процедур. Показано, что отдельные вычислительные процедуры, входящие в состав алгоритмов, целесообразно выполнять параллельно. На практике эти процедуры могут быть реализованы с применением метода многопоточного программирования. Снижение сложности алгоритмов и использование методов параллельной обработки ведут к повышению вычислительной эффективности процесса восстановления отсчетов.

Исследование возможностей разработанного подхода по восстановлению отсчетов проблемных участков дискретной последовательности сигнала проводились с использованием имитационного моделирования. На примере численных экспериментов было показано, что обеспечивается устойчивое восстановление отсчетов сигнала с достаточно низкой погрешностью. Практическим результатом стала разработка специализированного функционально завершенного программного модуля. Работа данного модуля осуществляется в режиме асинхронного управления вычислительным процессом восстановления отсчетов без блокирования выполнения основной прикладной программы обработки сигнала. Модуль может быть применен в составе метрологически значимого программного обеспечения многофункциональных систем цифровой обработки сигналов.

Дальнейшее выполнение работ, связанных с восстановлением дискретных последовательностей сигналов предполагается проводить с целью обобщения полученных результатов на нестационарные участки сигнала. Это обосновывается тем, что локальная аппроксимация осуществляется на близких интервалах к проблемному участку.

### **Литература**

1. Madisetti V.K. The Digital Signal Processing Handbook, Second edition: Digital Signal Processing Fundamentals // CRC Press, Taylor and Francis Group. 2010. 904 p.
2. Денисенко А.Н. Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие // М: Горячая линия-Телеком, 2005. 704 с.
3. Oppenheim A.V., Schaffer R.W. Discrete-Time Signal Processing: Third edition // Pearson Higher Education. 2010. 1108 p.
4. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Восстановление неравномерно дискретизированных сигналов с неизвестными значениями координат узлов временной сетки // Успехи современной радиоэлектроники. 2015. №6. С. 3–35.

5. Khan N.A., Ali S. Robust Sparse Reconstruction of Signals with Gapped Missing Samples from Multi-Sensor Recordings // *Digital Signal Processing*. 2022. vol. 123. 103392.
6. Aceska R., Bouchot J.-L., Li S. Local Sparsity and Recovery of Fusion Frame Structured Signals // *Signal Processing*. 2020. vol. 174. 107615.
7. Stankovic L., Stankovic S., Amin M. Missing samples analysis in signals for applications to L-estimation and compressive sensing // *Signal Processing*. 2014. vol. 94. pp. 401–408.
8. Aldroubi A., Leonetti C. Non-Uniform Sampling and Reconstruction from Sampling Sets with Unknown Jitter // *Sampling Theory in Signal and Image Processing*. 2008. vol. 7. no. 2. pp. 187–195.
9. Nordio A., Chiasserini C-F., Viterbo E. Signal Reconstruction Errors in Jittered Sampling // *IEEE Transactions on signal Processing*. 2009. vol. 57. no. 12. pp. 4711–4718.
10. Maymon S. Oppenheim A.V. Sinc Interpolation of Nonuniform Samples // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2011. vol. 59. no. 10. pp. 4745–4758.
11. Andras I., Dolinsky P., Michaeli L., Saliga J. A Time Domain Reconstruction Method of Randomly Sampled Frequency Sparse Signal // *Measurement*. 2018. vol. 127. pp. 68–77.
12. Якимов В.Н., Машков А.В. Знаковый алгоритм анализа спектра амплитуд и восстановления гармонических составляющих сигналов в условиях присутствия некоррелированных фоновых шумов // *Научное приборостроение*. 2017. Т. 27. № 2. С. 83–90.
13. Bilinskis I. *Digital Alias-free Signal Processing* // Wiley. 2007. 454 p.
14. Lu Y. M., Vetterli M. Multichannel Sampling with Unknown Gains and Offsets: A Fast Reconstruction Algorithm // *Proc. Allerton Conference on Communication, Control and Computing*. Monticello. 2010.
15. Sbaiz L., Vandewalle P., Vetterli M. Groebner Basis Methods for Multichannel Sampling with Unknown Offsets // *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2008. vol. 25. no. 3. pp. 277–294.
16. Liu N., Tao R., Wang R., Deng Y., Li N., Zhao S. Signal Reconstruction from Recurrent Samples in Fractional Fourier Domain and Its application in Multichannel SAR // *Signal Processing*. 2017. vol. 131. pp. 288–299.
17. Allen R.L., Mills D.W. *Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure* // IEEE Press (Wiley-Interscience). 2004. 966 p.
18. Sejdic E., Orovic I., Stankovic S. Compressive sensing meets time-frequency: An overview of recent advances in time-frequency processing of sparse signals // *Digital Signal Processing*. 2018. vol. 77. pp. 22–35.
19. Teke O., Gurbuz A.C., Arikani O. A robust compressive sensing based technique for reconstruction of sparse radar scenes // *Digital Signal Processing*. 2014. vol. 27. pp. 23–32.
20. Жукова Н.А., Соколов И.С. Метод восстановления структуры группового телеметрического сигнала на основе графовой модели // *Труды СПИИРАН*. 2010. Вып. 13. С. 45–66.
21. Khan N.A., Ali S. Reconstruction of gapped missing samples based on instantaneous frequency and instantaneous amplitude estimation // *Signal Processing*. 2022. vol. 193. no. 108429.
22. Dokuchaev N. On Recovery of Discrete Time Signals from Their Periodic Subsequences // *Signal Processing*. 2019. vol. 162. pp. 180–188.
23. Annaby M.H., Al-Abdi I.A., Abou-Dina M.S., Ghaleb A.F. Regularized Sampling Reconstruction of Signals in the Linear Canonical Transform Domain // *Signal Processing*. 2022. vol. 198. 108569.

24. Yue C., Liang J., Qu B., Han Y., Zhu Y., Crisalle O.D. A Novel Multiobjective Optimization Algorithm for Sparse Signal Reconstruction // *Signal Processing*. 2020. vol. 167. 107292.
25. Wijenayake C., Scutts J., Ignjatovic A. Signal recovery algorithm for 2-level amplitude sampling using chromatic signal approximations // *Signal Processing*. 2018. vol. 153. pp. 143–152.
26. Катковник В.Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации // М.: Главная редакция физико-математической литературы. 1985. 336 с.
27. Толстов Г.П. Ряды Фурье // М.: Наука. 1980. 381 с.
28. Brandt S. *Data Analysis. Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers* // Springer. 2014. 523 p.
29. Bernatz R. *Fourier Series and Numerical Methods for Partial Differential Equations* // Wiley. 2010. 318 p.
30. Edwards R.E. *Fourier Series: A Modern Introduction*. vol. 1 // Springer-Verlag. 1979. 224 p.
31. Yakimov V.N., Gorbachev O.V. Firmware of the Amplitude Spectrum Evaluating System for Multicomponent Processes // *Instruments and Experimental Techniques*. 2013. vol. 56. no. 5. pp. 540–545.
32. Yakimov V.N., Zaberzhinskij B.E., Mashkov A.V., Bukanova Yu.V. Multi-threaded Approach to Software High-speed Algorithms for Spectral Analysis of Multicomponent Signals // XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). 2019. IEEE. pp. 698–701.
33. ГОСТ 31191.1-2004 (ИСО 2631-1:1997) Вибрация и удар. Измерение общей вибрации и оценка ее воздействия на человека. Часть I. Общие требования. Введ. 2008-07-01. М.: Стандартинформ, 2010. 25 с.
34. ГОСТ 55855-2013. Автомобильные транспортные средства. Методы измерения и оценки общей вибрации. Введ. 2014-09-01. М.: Стандартинформ, 2014. 21 с.
35. ГОСТ ИСО 10326-1-2002. Вибрация. Оценка вибрации сидений транспортных средств по результатам лабораторных испытаний. Часть 1. Общие требования. Введ. 2007-11-01. М.: Стандартинформ, 2017. 12 с.
36. ГОСТ ИСО 8002-99. Вибрация. Вибрация наземного транспорта. Представление результатов измерений. Введ. 2001-01-01. Минск: Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации, 2000. 16 с.

**Якимов Владимир Николаевич** — д-р техн. наук, профессор, кафедра автоматизации и управления технологическими процессами, Самарский государственный технический университет. Область научных интересов: методы и средства статистических измерений, диагностика технического состояния и испытания систем, цифровая обработка сигналов, корреляционный и спектральный анализ сигналов, математическое и имитационное моделирование. Число научных публикаций — 295. yvnr@hotmail.com; улица Молодогвардейская, 244, 443100, Самара, Россия; р.т.: +7(846)279-0354.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00228-а).

V. YAKIMOV

**DISCRETE TIME SEQUENCE RECONSTRUCTION OF A SIGNAL  
BASED ON LOCAL APPROXIMATION USING A FOURIER  
SERIES BY AN ORTHOGONAL SYSTEM OF TRIGONOMETRIC  
FUNCTIONS**

*Yakimov V. Discrete Time Sequence Reconstruction of a Signal Based on Local Approximation Using a Fourier Series by an Orthogonal System of Trigonometric Functions.*

**Abstract.** The article considers the development of mathematical and algorithmic support for the sample's reconstruction in problem sections of a discrete sequence of a continuous signal. The work aimed to ensure the reconstruction of lost samples or sections of samples with a non-constant distorted time grid when sampling a signal with a uniform step and at the same time to reduce the computational complexity of digital reconstruction algorithms. The solution to the stated problem is obtained based on the local approximation method. The specific of this method application was the use of two subsequences of samples located symmetrically concerning the reconstructed section of the sequence. The approximating model is a Fourier series on an orthogonal system of trigonometric functions. The optimal solution to the approximation problem is based on the minimum square error criterion. Mathematical equations are obtained for this type of error. They allow us to estimate its value depending on the model order and the samples number in the subsequences used in the reconstruction process. The peculiarity of the mathematical equations obtained in this paper for signal reconstruction is that they do not require the preliminary calculation of the Fourier series coefficients. They provide a direct calculation of the values of reconstructed samples. At the same time, when the number of samples in the subsequences used for reconstruction will be even, it is not necessary to perform multiplication operations. All this made it possible to reduce the computational complexity of the developed algorithm for signal reconstruction. Experimental studies of the algorithm were carried out based on simulation modeling using a signal model that is an additive sum of harmonic components with a random initial phase. Numerical experiments have shown that the developed algorithm provides the reconstruction result of signal samples with a sufficiently low error. The algorithm is implemented as a software module. The operation of the module is carried out on the basis of asynchronous control of the sampling reconstruction process. It can be used as part of metrologically significant software for digital signal processing systems.

**Keywords:** discrete time signals, sampled sequence, signal reconstruction, local approximation, trigonometric Fourier series.

**References**

1. Madisetti V.K. The Digital Signal Processing Handbook, Second edition: Digital Signal Processing Fundamentals. CRC Press, Taylor and Francis Group. 2010. 904 p.
2. Denisenko A.N. Signaly. Teoreticheskaya radiotekhnika. Spravochnoye posobiye [Signals. Theoretical radio engineering. Reference manual]. Moscow: Goryachaya Liniya-Telekom. 2005. 704 p. (In Russ.).
3. Oppenheim A.V., Schaffer R.W. Discrete-Time Signal Processing: Third edition. Pearson Higher Education. 2010. 1108 p.
4. Porshnev S.V., Kusaykin D.V. [Reconstruction of non-uniform sampled discrete-time signals with unknown sampling locations]. Uspekhi sovremennoy radioelektroniki – Journal Achievements of Modern Radioelectronics. 2015. no. 6. pp. 3–35. (In Russ.).

5. Khan N.A., Ali S. Robust Sparse Reconstruction of Signals with Gapped Missing Samples from Multi-Sensor Recordings. *Digital Signal Processing*. 2022. vol. 123. 103392.
6. Aceska R., Bouchot J.-L., Li S. Local Sparsity and Recovery of Fusion Frame Structured Signals. *Signal Processing*. 2020. vol. 174. 107615.
7. Stankovic L., Stankovic S., Amin M. Missing samples analysis in signals for applications to L-estimation and compressive sensing. *Signal Processing*. 2014. vol. 94. pp. 401–408.
8. Aldroubi A., Leonetti C. Non-Uniform Sampling and Reconstruction from Sampling Sets with Unknown Jitter. *Sampling Theory in Signal and Image Processing*. 2008. vol. 7. no. 2. pp. 187–195.
9. Nordio A., Chiasserini C-F., Viterbo E. Signal Reconstruction Errors in Jittered Sampling. *IEEE Transactions on signal Processing*. 2009. vol. 57. no. 12. pp. 4711–4718.
10. Maymon S. Oppenheim A.V. Sinc Interpolation of Nonuniform Samples. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2011. vol. 59. no. 10. pp. 4745–4758.
11. Andras I., Dolinsky P., Michaeli L., Saliga J. A Time Domain Reconstruction Method of Randomly Sampled Frequency Sparse Signal. *Measurement*. 2018. vol. 127. pp. 68–77.
12. Yakimov V.N., Mashkov A.V. [The binary algorithm for the analysis of the spectrum amplitude and recover of harmonic components signals in the presence of uncorrelated background noise]. *Nauchnoe priborostroenie – Scientific Instrument Making*. 2017. vol. 27. no.2. pp. 83–90. (In Russ.).
13. Bilinskis I. *Digital Alias-free Signal Processing*. Wiley. 2007. 454 p.
14. Lu Y. M., Vetterli M. Multichannel Sampling with Unknown Gains and Offsets: A Fast Reconstruction Algorithm. *Proc. Allerton Conference on Communication, Control and Computing*. Monticello. 2010.
15. Sbaiz L., Vandewalle P., Vetterli M. Groebner Basis Methods for Multichannel Sampling with Unknown Offsets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2008. vol. 25. no. 3. pp. 277–294.
16. Liu N., Tao R., Wang R., Deng Y., Li N., Zhao S. Signal Reconstruction from Recurrent Samples in Fractional Fourier Domain and Its application in Multichannel SAR. *Signal Processing*. 2017. vol. 131. pp. 288–299.
17. Allen R.L., Mills D.W. *Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure*. IEEE Press (Wiley-Interscience). 2004. 966 p.
18. Sejdic E., Orovic I., Stankovic S. Compressive sensing meets time-frequency: An overview of recent advances in time-frequency processing of sparse signals. *Digital Signal Processing*. 2018. vol. 77. pp. 22–35.
19. Teke O., Gurbuz A.C., Arikani O. A robust compressive sensing based technique for reconstruction of sparse radar scenes. *Digital Signal Processing*. 2014. vol. 27. pp. 23–32.
20. Zhukova N.A., Sokolov I.S. [Method of reconstructing the structure of the group telemetric signals based on the graph model]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2010. no. 13. pp. 45–66. (in Russ.)
21. Khan N.A., Ali S. Reconstruction of gapped missing samples based on instantaneous frequency and instantaneous amplitude estimation. *Signal Processing*. 2022. vol. 193. no. 108429.
22. Dokuchaev N. On Recovery of Discrete Time Signals from Their Periodic Subsequences. *Signal Processing*. 2019. vol. 162. pp. 180–188.
23. Annaby M.H., Al-Abdi I.A., Abou-Dina M.S., Ghaleb A.F. Regularized Sampling Reconstruction of Signals in the Linear Canonical Transform Domain. *Signal Processing*. 2022. vol. 198. 108569.

24. Yue C., Liang J., Qu B., Han Y., Zhu Y., Crisalle O.D. A Novel Multiobjective Optimization Algorithm for Sparse Signal Reconstruction. *Signal Processing*. 2020. vol. 167. 107292.
25. Wijenayake C., Scutts J., Ignjatovic A. Signal recovery algorithm for 2-level amplitude sampling using chromatic signal approximations. *Signal Processing*. 2018. vol. 153. pp. 143–152.
26. Katkovnik V.Ya. *Neparametricheskaya identifikatsiya i sglazhivaniye dannykh: metod lokal'noy approksimatsii* [Nonparametric identification and data smoothing: local approximation method]. Moscow: Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury. 1985. 336 p. (In Russ.).
27. Tolstov G.P. Ryady Fur'ye [Fourier series]. Moscow: Nauka. 1980. 381 p. (In Russ.).
28. Brandt S. *Data Analysis. Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers*. Springer. 2014. 523 p.
29. Bernatz R. *Fourier Series and Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Wiley. 2010. 318 p.
30. Edwards R.E. *Fourier Series: A Modern Introduction*. vol. 1. Springer-Verlag. 1979. 224 p.
31. Yakimov V.N., Gorbachev O.V. Firmware of the Amplitude Spectrum Evaluating System for Multicomponent Processes. *Instruments and Experimental Techniques*. 2013. vol. 56. no. 5. pp. 540–545.
32. Yakimov V.N., Zaberzhinskij B.E., Mashkov A.V., Bukanova Yu.V. Multi-threaded Approach to Software High-speed Algorithms for Spectral Analysis of Multi-component Signals. XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). 2019. IEEE. pp. 698–701.
33. State Standard 31191.1-2004 (ISO 2631-1:1997). *Vibratsiya i udar. Izmereniye obshchey vibratsii i otsenka yeye vozdeystviya na cheloveka. Chast' I. Obshchiye trebovaniya (Vibration and shock. Measurement and evaluation of human exposure to whole-body vibration. Part 1. General requirements)*, Moscow, Standartinform Publ., 2010. 25 p. (In Russ.).
34. State Standard 55855-2013. *Avtomobil'nyye transportnyye sredstva. Metody izmereniya i otsenki obshchey vibratsii (Motor vehicles. Methods of measurement and evaluation of general vibrations)*, Moscow, Standartinform Publ., 2014, 21 p. (In Russ.).
35. State Standard ISO 10326-1-2002. *Vibratsiya. Otsenka vibratsii sideniy transportnykh sredstv po rezul'tatam laboratornykh ispytaniy. Chast' 1. Obshchiye trebovaniya (Vibration. Laboratory method for evaluating vehicle seat vibration. Part 1. Basic requirements)*, Moscow, Standartinform Publ., 2017, 12 p. (In Russ.).
36. State Standard ISO 8002-99. *Vibratsiya. Vibratsiya nazemnogo transporta. Predstavleniye rezul'tatov izmereniy (Mechanical vibration. Land vehicles. Method for reporting measured data)*, Minsk, Interstate council for standardization, metrology and certification Publ., 2000, 16 p. (In Russ.).

**Yakimov Vladimir** — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Department of automation and control of technological processes, Samara State Technical University. Research interests: methods and means of statistical measurements, diagnostics of technical condition and testing of systems, digital signal processing, correlation and spectral analysis of signals, mathematical and simulation modeling. The number of publications — 295. yvnr@hotmail.com; 244, Molodogvardeyskaya St., 443100, Samara, Russia; office phone: +7(846)279-0354.

**Acknowledgements.** This research is supported by RFBR (grant 19-08-00228-a).