

А.Ю. ПЕРЕВАРИОХА

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ И ПЕРЕХОДНЫЕ РЕЖИМЫ В ДИНАМИКЕ НОВЫХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ БИОРЕСУРСАМИ

---

*Переварюха А.Ю. Нелинейные эффекты и переходные режимы в динамике новых моделей управления биоресурсами.*

**Аннотация.** Настоящая статья посвящена исследованию ряда нелинейных эффектов в динамических системах, моделирующих динамику управляемых биологических систем. При анализе результатов построения математических моделей регулярно сталкиваются с явлениями, которые выходят за рамки интерпретации в предполагаемой области применения. Традиционно исследования моделей сосредоточивают на определении структуры асимптотически устойчивых стационарных состояний — замкнутых инвариантных множеств динамических систем. Показано на примерах из настоящей работы, что неинвариантные множества и сложные переходные режимы имеют большое влияние при анализе результатов моделирования.

**Ключевые слова:** нелинейная динамика.

*Perevarukha A.U. Nonlinear phenomena and transient modes in the dynamics of new bioresources control models.*

**Abstract.** This article is dedicated to research of series nonlinear effects in dynamical systems modeling the dynamics of controlled biological systems. The problem of analysis of the results mathematical modeling regularly faced with phenomena which are beyond the scope of interpretation in the proposed area of application. Traditionally, investigation of models focuses on definition of the structure of asymptotically stable of stationary states, closed invariant sets of dynamical systems. It is shown by the examples of this paper, that noninvariant sets and complex transitional regimes have an important influence in the analysis of simulation results.

**Keywords:** nonlinear dynamics.

---

**1. Введение.** Динамические системы, в частности, используемые в моделировании унимодальные и некоторые бимодальные отображения со знакопеременным шварцианом (дифференциальным инвариантом Шварца), могут внезапно менять свое поведение, это так называемые «нелинейные эффекты». Качественно различные режимы поведения могут критически влиять на результаты интерпретации расчетов, полученные в ходе моделирования. Данная статья посвящена возникновению некоторых нетривиальных особенностей в динамике предложенных автором моделей, разработанных ранее для анализа эффективности воспроизводства водных биоресурсов и последствий их потребления.

**2. Разнообразие моделей экологических процессов.** В арсенале математической экологии существует ряд обобщенных типов динамических моделей, развивавшихся практически параллельно различными школами. Любое математическое описание процессов в данной научной области

(исключая регрессионные модели) базируется на биологическом обосновании, которое будем называть теоретическим базисом модели. Иногда исходят из весьма умозрительного обоснования без подтверждения анализом реальных данных, как, например, модель Ферхюльста. Теоретический базис этой известной модели в том, что прирост численности вида ограничен некоторой определенной емкостью среды, а негативное влияние плотности на скорость роста пропорционально квадрату плотности. Скорость роста увеличивается, достигает максимума и уменьшается до нуля, когда  $N = K$ . Модель не описывает всплеск численности, колебаний, и ряд других процессов, так как логистическим моделям посвящено достаточное число работ. Модель Ферхюльста была заново открыта в 1920-е гг. при попытке моделирования динамики численности населения США, однако в 1960-е гг. стало ясно, что реальная численность не соответствует данной модели. В отличие от моделей классической механики, теоретическая база моделей, предлагаемых в экологии, не имеет строгого количественного фундамента, подобного законам Ньютона.

Отдельно отметим, что дискретизация дифференциального уравнения Ферхюльста, для которого легко находится решение задачи Коши, не имеет на самом деле того же биологического обоснования:

$$N_{t+1} = N_t [1 + r(1 - N_t/K)],$$

так как лишена смысла для случая  $N = zK$ ,  $z > 1$  и  $r(z - 1) > 1$ .

Вольтерровские модели (известные как «predator-prey models») основываются на гипотезе, что положительное или отрицательное влияние взаимодействия видов на скорость роста численности в данный момент пропорционально числу встреч между особями взаимодействующих видов (в данный или в некоторый предшествующий момент в моделях с запаздыванием). Данное предположение Вольтерра называл «теорией встреч». Конечно, зоологи найдут достаточно аргументов против такого упрощенного представления математиков. Практикам известно, что циклические колебания численности вида-жертвы могут происходить и в отсутствие хищников. Существует очень большое число разнообразных модификаций моделей вида «хищник—жертва», в том числе рассматривающих пространственную диффузию (их подробный анализ представлен в обзоре [1]), а так же исследований по оптимизации на основе моделей данного типа. По-видимому, данное направление практически выработало потенциал научной новизны.

Методология построения моделей балансового равенства, разрабатываемая отечественной школой Г.Г. Винберга, основывается на идее описания трансформации энергии [2]. При переходе энергии с

одного трофического уровня на другой количество ее уменьшается и организмам каждого последующего уровня доступна только некоторая доля. Изменение биомасс биотических компонент экосистемы записывается в следующем виде:

$$\frac{db_i}{dt} = c_i - u_i - m_i - q_i - \sum_j \lambda_{ij} c_j,$$

где  $c_i$  — первичная продукция;  $u_i$  — неувоенная пища;  $q_i$  — траты на обмен;  $m_i$  — суточное отмирание;  $\lambda_{ij}$  — доля  $i$ -го вида в питании  $j$ -го.

Модели в рамках данного направления развивались для наиболее детального и глубокого описания процессов жизнедеятельности, особенно в зависимости от условий среды.

В своих работах автор статьи придерживается позиции, что именно различия и сходства теоретического обоснования должны в первую очередь дифференцировать разнообразие моделей экологии. Другим важнейшим квалифицирующим признаком для моделей экологических процессов должны стать эффекты нелинейности. В следующем разделе математически подробно описано, почему динамика моделей может быть очень сложной.

**3. Простые модели со сложным поведением.** Согласно одной из методологий моделирования считается, что некоторые ключевые величины в развитии популяционной динамике можно связать функциональными зависимостями. Выбор определенной функциональной зависимости с соответствующим набором параметров оказывают серьезное влияние на свойства фазового портрета динамической системы. Качественные изменения приводят к принципиально отличной временной динамике ключевых звеньев моделируемой системы. Например, различными зависимостями можно описать рацион питания вида, применив трофические функции В.С. Ивлева, Холлинга, Михаэлиса-Ментен-Моно.

Еще более наглядным примером являются модели теории формирования пополнения популяций рыб, формализующих саморегуляцию численности на основе рекуррентной зависимости последующего поколения от состояния настоящей нерестующей популяции. В. Рикер предложил использовать «кривые воспроизводства», связывающие запас и полученное пополнение, под которым понимал часть генерации, достигшей определенной стадии жизненного цикла [3]. Рикер исходил из сильного влияния компенсационной смертности на ранних этапах развития рыб, которые проходят при высокой плотности и факторах адельфогагии.

Предложенную Рикером зависимость «запас—полнение» будем исследовать как функциональную итерацию:

$$x_{n+1} = ax_n e^{-bx_n},$$

где  $a$  —репродуктивный потенциал;  $b$  — параметр, характеризующий негативное «сопротивление среды», в соответствии с биологическим смыслом  $0 < b \ll 1$ .

Это отображение унимодальной функции имеет одну точку перегиба, следовательно, дифференциальный инвариант Шварца  $S_\psi$  данного отображения знакопостоянен для всех  $x$ :

$$S_\psi = \frac{\psi'''(x)}{\psi'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} \right)^2.$$

С точки зрения теории дискретных динамических систем, для дальнейшего анализа необходимо оценить знак шварциана:

$$\psi'(x) = ae^{-bx}(1 - bx),$$

$$\psi''(x) = abe^{-bx}(bx - 2),$$

$$\psi'''(x) = ab^2e^{-bx}(3 - 3bx) \text{ и } \psi^{(n)}(x) = (-1)^n ab^{n-1}e^{-bx}(bx - n).$$

Получаем

$$S_\psi = b^2 \frac{-b^2x^2 + 4bx - 6}{2(1 - bx)^2}.$$

И очевидно

$$S_\psi < 0 \text{ для } x \in \mathfrak{R}.$$

Основное свойство шварциана в том, что если  $S_\psi < 0$  отрицателен для  $\psi(x)$ , то он отрицателен и для старших итераций  $\psi^n(x)$ . Следовательно, предложенная Рикером биологическая модель математически классифицируется как  $SU$ -отображение унимодальной функции с отрицательным дифференциальным инвариантом Шварца. Для этого отображения выполняются условия теоремы Д. Сингера [4], доказавшего, что такое отображение может иметь не более одной устойчивой траектории и эта траектория является  $\omega$ -предельным множеством для критической точки  $c$ :  $\psi'(c) = 0$ .

Как оказалось именно это свойство функции играет ключевую роль для динамических свойств модели. Отображение Рикера имеет стационарную точку:  $x^* = \ln a / b$ , которая потеряет устойчивость при:

$$\psi'(x^*) = -1,$$

где

$$\psi'(x^*) = ae^{-b\frac{\ln a}{b}} - b\frac{\ln a}{b}ae^{-b\frac{\ln a}{b}} = \frac{a(1-\ln a)}{e^{\ln a}} = 1 - \ln a.$$

При значении параметра  $a = e^2$ ,  $\psi'(x^*) = -1$  стационарная точка становится неустойчивой, тогда:

$$\frac{d\psi^2(x^*)}{dx} = 1,$$

$$\frac{d^2\psi^2(x)}{dx^2} = \frac{d\psi'(\psi(x))\psi'(x)}{dx} = \psi''(\psi(x))(\psi'(x))^2 + \psi'(\psi(x))\psi''(x),$$

$$\frac{d^2\psi^2(x^*)}{dx^2} = \psi''(x^*)(\psi'(x^*))^2 + \psi'(x^*)\psi''(x^*) =$$

$$= \psi'(x^*)\psi''(x^*)(\psi'(x^*) + 1) = 0.$$

$$S_{\psi^2(x^*)} = \frac{d^3\psi^2(x^*)}{dx^3}.$$

Таким образом, когда  $S_{\psi^2(x^*)} < 0$ , то  $\frac{d\psi^2(x)}{dx}$  имеет в точке  $x^*$  локальный максимум (иначе будет минимум). В этот момент появляются две устойчивые циклические точки, являющиеся стационарными точками для второй итерации  $\psi^2(x) \equiv \psi(\psi(x))$ . Далее при увеличении параметра будет происходить каскад бифуркаций удвоения, константы которого замечательно установлены М. Фейгенбаумом в знаменитой статье [5].

Отметим, что Фейгенбауму на тот момент не была известна теорема Сингера, так же как и не установлен в его работе критерий для реализации бесконечного удвоения периода цикла. В результате последовательных бифуркаций период цикла становится бесконечным за конечное приращение управляющего параметра, а траектория динамической системы становится хаотической. В отличие от классической теории бифуркации, в данном случае теория сталкивается с проблемой поведения динамических систем в окрестности некоторого значения параметра, при котором происходит накопление бесконечной последовательности бифуркационных значений [6].

Результаты исследований хаотизации отображений получены гораздо позднее работ авторов, развивавших теорию в ихтиологических исследованиях. Биологи вряд ли могли предполагать, что для таких несложных математических функций можно получить принципиально новые результаты. До сих пор поведение модели Рикера остается не в полной мере исследованным.

Модель Рикера отличается от объектов, исследованных Фейгенбаумом и другими (обычно, от квадратичного полинома) не только тем, что имеет точку перегиба  $\psi''(x_s) = 0, x_s = 2/b$  и вообще точки, где обращаются в ноль старшие производные

$$\psi^{(n)}(x) = 0 \text{ при } x = nc,$$

но и тем, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0$ , и это означает, что хаотический аттрактор может увеличиваться неограниченно, так как не возникнет граничного кризиса.

Не решен вопрос о существовании сходимости разности значений параметров, при которых возникают (или захлопываются) окна периодичности, возникающие в соответствии с теоремой Шарковского [7]. Некоторые численные результаты позволяют предполагать, что существует величина-аналог констант Фейгенбаума.

С окнами периодичности связаны два нелинейных эффекта, о которых надо обязательно иметь представление при моделировании.

1. После возникновения странного аттрактора, разделенного бесконечным множеством неустойчивых циклов на субинтервалы, хаотическое поведение не остается постоянным. Хаос прерывается при возникновении так называемых «окон периодичности<sup>1</sup>» при прямых касательных бифуркациях. После касательной бифуркации возникают устойчивые циклические точки и столько же неустойчивых. В каскаде бифуркаций Фейгенбаума не «участвуют» итерации

$$\psi^n(x), n \neq 2^i, i \in \mathbb{Z},$$

но когда у третьей итерации  $\psi^3(x)$  при  $a=22.53$  появляются шесть новых нетривиальных стационарных точек, три из которых образуют устойчивый цикл, а три другие — неустойчивый, устойчивый цикл вытесняет странный аттрактор. Цикл периода 3 важен тем, что его наличие означает и наличие циклов других всевозможных периодов.

---

<sup>1</sup> Устоявшийся, но совсем точный термин, так как в окне периодичности тоже может возникать хаотическое движение.

Возникший цикл претерпевает аналогичные бифуркации удвоения. Окно периодичности закрывается в момент внутреннего кризиса аттрактора. Проблема исследований окон периодичности связана с тем фактом, что существуют окна, которые вложены в другие окна. Так как периодическое окно закрывается при внутреннем кризисе аттрактора, когда восстанавливается весь связный хаотический аттрактор, то, следовательно, существуют и кризисы меньших масштабов, для которых еще нет четкого определения и описания.

2. Непосредственно перед касательной бифуркацией реализуется режим перемежаемости. Перед бифуркацией, приводящей к появлению цикла периода 3, точки между минимумами и максимумами третьей итерации приближаются к биссектрисе координатного угла. Тогда расстояние  $|\psi^3(x_i^*) - x_i^*| \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow a_3$  и движение траектории, попадающей в окрестность одного из трех близких к биссектрисе экстремумов,  $\psi^3(x)$  становится практически периодическим, но выход из диапазона сопровождается непериодическими колебаниями значительной амплитуды, но небольшой продолжительности.

Режим перемежаемости может иметь определяющее значение при статистическом анализе временных рядов, описывающих динамику процесса, когда применяются алгоритмы сглаживания и интерполяции.

**4. Проблема интерпретации.** Вернемся к биологической проблематике модели Рикера. Анализируя изложенное в предыдущем разделе, логично сформулировать следующие умозаключение:

*Предположение 1.* Увеличение репродуктивного потенциала популяции (т. е. параметр  $a$ ) приводит к появлению флуктуаций численности аperiodического характера.

Рассмотрим теперь другую модель формирования пополнения популяций рыб Дж. Шепарда:

$$x_{n+1} = \frac{ax_n}{1+(x_n/K)^m},$$

где  $K$  — биомасса, при превышении которой начинают действовать зависящие от плотности факторы смертности;  $m$  — параметр, определяющий интенсивность воздействия компенсационной (увеличивающейся от возрастания плотности) смертности.

Для динамической системы на основе модели Шепарда аналогично возможны появления циклов периода  $2^n$  и реализация сценария хаотизации Фейгенбаума, но бифуркационным параметром является показатель степени знаменателя  $m$ . Следовательно, для модели

Шепарда переход к хаотическому режиму будет происходить вследствие усиления действия лимитирующих факторов.

Если другая модель противоречит предположению 1, то естественно, что хотя бы одна из них неадекватна. Однако можно основать и более значимый вывод, сформулированный далее.

*Предположение 2.* Описанные нелинейные эффекты не имеют интерпретации в рамках динамики биологических популяций.

На самом деле предположение 2 легче доказывать, чем опровергать, так как опровержение потребовало бы обоснования наличия популяционной интерпретации у такого объекта как аттрактор фрактальной размерности, гомеоморфный канторовскому множеству.

**5. Сложная модель с тривиальным поведением.** Автор для задач моделирования деградирующей популяции волжского осетра разработал усовершенствованную модель [8], учитывающую эффект Олли и развитие особей на темп убыли численности поколения  $N$  :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta)N(t) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k(t) + \zeta}, \quad k < 1, \quad \theta(S) = \frac{1}{1 - \exp(-cS)} \\ S = N(T), w(0) = w_0, N(0) = \lambda S. \end{cases}$$

где  $S$  — нерестовой запас;  $w(t)$  — величина, отражающая уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей;  $g$  — параметр, учитывающий ограниченность числа доступных для молоди кормовых объектов;  $\theta(S) \rightarrow \infty$  — убывающая функция, не влияющая на выживаемость данного поколения, когда численность запаса достаточно велика;  $\zeta$  — параметр, учитывающий ограничение темпов развития, не зависящее от численности;  $\lambda$  — средняя плодовитость особей популяции;  $c$  — параметр, характеризующий степень действия эффекта, названного именем эколога В. Олли;  $\alpha$  — мгновенный коэффициент компенсационной смертности;  $\beta$  — коэффициент декомпенсационной смертности.

Полученная при решении уравнений модели на определенном интервале времени  $[0, T]$  новая зависимость не удовлетворяет критериям Сингера, имеет знакопеременный шварциан, но обладает двумя областями притяжения, разделенными неустойчивой стационарной точкой-репеллером  $x_r \in \Xi$ . Попадание область  $x < x_r$  означает необратимую деградацию.

**6. Переходный хаос и пределы предсказуемости.** Появление принципиально нового типа моделей в рассматриваемой области маловероятно, но можно на формальном математическом уровне объединить представления, лежащие в основе разных концепций.

Задача определена необходимостью построить модель воспроизводства волжской севрюги, имеющую волнообразную кривую пополнения [9]. Возникла идея, что в действительности мы наблюдаем действие нескольких итераций зависимости запас—пополнение, пусть и последовательно модифицирующихся. Таким образом, можно объяснить, что минимум образовался в области значений, где на предыдущем этапе развития был максимум выжившей молодежи.

Расширим теорию запас—пополнение в дополнительном предположении, что при формировании пополнения поколение проходит несколько последовательных этапов развития. В онтогенезе группы особей меняются факторы, действующие на смертность. Математическое решение задачи потребовало применения методов моделирования гибридных (непрерывно-дискретных) систем.

Запишем реализацию новой модели в виде системы гибридных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \begin{cases} -(\alpha w(t)N(t) + \theta(S)\beta) N(t), & 0 < t \leq \tau \\ -(\alpha_1 N(\tau)/w(\tau) + \beta) N(t), & t > \tau, \quad w(t) < w_{k1} \\ -(\alpha_2 w(t)N(t)) N(t - \zeta), & w_{k1} < w(t) < w_k. \end{cases} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{g}{N^k(t) + \zeta} \end{cases} .$$

Эта реализация позволила автору исследовать неунимодальную зависимость запаса и пополнить модель четырьмя нетривиальными стационарными точками, из которых устойчива только одна. Применение новых методов оказалось оправданным и позволило исследовать новые нелинейные явления, связанные уже с возникновением и эволюцией непритягивающих хаотических множеств динамических систем [10].

В данном случае свойства системы определяются не аттракторами, а границами их областей притяжения. Граница  $\Xi$ , так же как и аттрактор, представляет собой инвариантное множество, но оно может быть связным, но может и не образовывать непрерывного подмножества в фазовом пространстве. Примером построения такого множества является известное геометрическое отображение «подкова Смейла», отсюда часто употребляемый термин «horseshoe dynamics».

Однако в рассматриваемой модели подмножество  $\Xi$  локально-несвязной границы областей притяжения двух аттракторов ограничено

первой и третьей неустойчивыми стационарными точками, следовательно, в фазовом пространстве существуют области с качественно различной динамикой, независимые от изменения управляющего параметра модели.

Хаотический режим, реализующийся для траектории новой модели при  $\forall n: f^n(x_0) \in (x_1^*, x_2^*)$ , является переходным хаотическим режимом, так как  $\exists n: f^n(x_0) \notin (x_1^*, x_2^*)$ . Траектория с выбранной некоторой начальной точкой  $x_0 \in (x_1^*, x_2^*)$ ,  $x_0 \notin \Xi$  притягивается к одному из двух существующих аттракторов. Невозможно заранее определить принадлежность начальной точки области притяжения, и в этом заключается эффект неопределенности асимптотической динамики траектории. Продолжительность переходного хаотического режима так же чувствительно зависит от выбора начальной точки.

**7. Заключение.** Мы рассмотрели определенный математический аппарат с точки зрения свойств качественных изменений и хаоса, но в контексте биологической проблематики. Применение математики в биологии имеет особенности, если не говорить о статистических методах. Выдающийся физик П. Дирак высказал мнение, что «теория, обладающая математической красотой, имеет больше шансов оказаться правильной, чем уродливая теория, согласующаяся с какими-то числами». Теория универсальности Фейгенбаума, а так же теорема Шарковского безусловно обладают математической красотой, и велик соблазн распространить их результаты на природные процессы и биологические системы, но зависимости в таких системах вовсе не обязаны удовлетворять узким критериям Сингера.

Гораздо важнее понимать, что наши знания о природных процессах никогда не будут достаточными, что бы с определенностью сказать о характере зависимости на количественном уровне. Математические зависимости, предложенные в рамках развития одной теории, в действительности могут при описании процесса противоречить друг другу при сущностной интерпретации. Природным процессам свойственны неожиданные изменения качественного характера: вспышки численности, массовые вымирания видов, изменения ареала обитания. Особенно сложна проблема моделирования при наличии антропогенного фактора, ответственного например, за большинство вспышек численности видов вселенцев.

Эффект чувствительной зависимости от начальных условий есть фундаментальное свойство многих нелинейных динамических систем,

исследуемых современными численными методами [11], но не обязательно связанное с аттрактором, похожим на крылья бабочки, существуют другие сценарии хаотизации системы. Полученный в результате анализа модели вывод о том, что она не обладает достаточными прогностическими функциями, совсем не говорит о неадекватности модели, так же как впрочем, и не подтверждает ее.

### Литература

1. Гилдерман Ю.И. Дифференциальные уравнения динамики биологических сообществ // Applications of Mathematics. 1976. Vol. 21, N 3. P. 185–212.
2. Винберг Г.Г. Многообразие и единство жизненных явлений и количественные методы в биологии // Журнал общей биологии. 1981. Т. 13, № 1. 5–19 с.
3. Ricker W. Stock and recruitment // J. Fisheries research board of Canada. 1954. Vol. 11, N 5. P. 559–623.
4. Singer D. Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval // SIAM . J. of applied math. 1978. Vol. 35. P. 260–268.
5. Feigenbaum M.J. Universal behavior in nonlinear systems // Physica D. 1983. Vol. 7, N 1. P. 16–39.
6. Farmer J., Ott E., Yorke J. The dimension of chaotic attractors // Physica D. 1983. Vol. 7. P. 153—170.
7. Переварюха А.Ю. Основные концепции и разработка новых методов моделирования динамики популяций // Экологические системы и приборы. 2009. № 6. 38—44 с.
8. Переварюха А.Ю. Нелинейная динамическая модель системы запас—пополнение // Информационно-управляющие системы. 2009. № 2. 28–33 с.
9. Переварюха А.Ю. Моделирование эффекта волнообразной кривой воспроизводства популяций рыб // Экологические системы и приборы. 2008. № 8. С. 41–44.
10. Переварюха А.Ю. Непротягивающее хаотическое множество в новой мультистабильной модели биологической системы // Информационные технологии и вычислительные системы. 2009. № 2. 13–22 с.
11. Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow // J. of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20. Iss. 2. P. 130–141.

**Переварюха Андрей Юрьевич** — канд. техн. наук, младший научный сотрудник лаборатории информационных технологий в системном анализе и моделировании СПИИРАН. Область научных интересов: моделирование биологических процессов, сценарии хаотизации динамических систем. Число научных публикаций — 30. [madelf@pisem.net](mailto:madelf@pisem.net); СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ; п.т. +7(812)328-0103.

**Perevarukha Andrey Urievich** — Ph.D., junior researcher, Laboratory of Information technologies and system analysis St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: modeling of biological processes, routs to chaos. The number of publications — 30. [madelf@pisem.net](mailto:madelf@pisem.net); SPIIRAS, 39, 14th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-0103.

Рекомендовано лабораторией информационных технологий в системном анализе и моделировании, заведующий лабораторией Соколов Б.В., д-р техн. наук, проф.  
Статья поступила в редакцию 26.02.2011.

## РЕФЕРАТ

### *Переварюха А.Ю.* **Нелинейные эффекты и переходные режимы в динамике новых моделей управления биоресурсами.**

В статье рассмотрены подходы к разработке моделей управляемых биологических систем и различные явления, возникающие при анализе динамики моделей при изменении значения управляющих параметров. В том числе описан предложенный автором метод построения моделей на основе применения непрерывно-дискретных систем и формализма гибридных автоматов.

Основное внимание при определении свойств моделей уделено нелинейным эффектам, возникающим в простых моделях динамики биологических популяций. Подобные нелинейные эффекты имеют фундаментальное значение для осмысления результатов применения моделей на практике, так как влияют на качественный характер динамики. Показаны особенности и необходимые критерии хаотизации моделей на примере известных в математической биологии моделей Рикера и Шепарда. Модели предложены в рамках формализации теории зависимости запаса и пополнения популяций промысловых рыб. Обе модели относятся к классу  $SU$ -отображений. Установлено, что две модели в рамках одной биологической теории оказываются взаимно противоречивыми с точки зрения сущностной интерпретации сценария перехода к хаосу. Переход к хаосу в одном случае интерпретируется как следствие увеличения репродуктивного потенциала, а во втором возникает при увеличении сопротивления среды. В действительности все зависит только от критерия устойчивости стационарной точки как функции параметра модели и не имеет биологической интерпретации.

Описаны другие нелинейные эффекты, возникающие уже после накопления каскада бифуркаций удвоения и образования аттрактора, подобного канторовскому множеству, аналогично не имеющие биологической интерпретации, но влияющие на анализ данных моделирования.

Математические методы теории запаса и пополнения популяций расширены автором концепцией о влиянии смены этапов развития. Модель применена для задачи моделирования искусственного и естественного воспроизводства популяций осетровых рыб Каспия. Реализована модель на основе дифференциальных уравнений непрерывно-дискретной структуры. Модель учитывает эффект Олли, важный для деградирующих популяций.

Фазовое пространство динамической системы на основе разработанной зависимости разделено на две области притяжения аттракторов. Модель определяет неунимодальную зависимость воспроизводства и имеет четыре нетривиальных стационарных точки. Три наименьшие стационарные точки неустойчивы. Устойчивой является тривиальная стационарная точка. В модели возникает переходный хаотический ежим и присутствует эффект чувствительной зависимости от начальных условий, который является следствием наличия непритягивающего хаотического множества.

## SUMMARY

### *Perevarukha A.U. Nonlinear phenomena and transient modes in the dynamics of new bioresources control models.*

The article considers approaches for modeling controlled biological systems and the various phenomena arising in the analysis of the dynamics of models when the value of the control parameters is changed. Including those described by the author proposed a method for constructing models based on the use of continuous-discrete systems and the formalism of hybrid automation.

The main consideration is given on definition of properties of nonlinear effects in simple models of the dynamics of biological populations. Such nonlinear effects have fundamental importance for understanding the results of the models in practice, as this affects have the qualitative nature for dynamics. The features and the necessary criteria for chaotization of the models on the example of well-known in mathematical biology Ricker and Shepard maps. Models have been proposed in the framework formalization for the theory of the stock and recruitment dependency of populations of commercially important fish. Both models belong to  $SU$ -maps. Established, that the two models within a same biological theory are mutually contradictory in terms of essential interpretation of the scenario of transition to chaos. Transition to chaos in one case interpreted as a consequence of increased reproductive potential, while the second arises when the resistance of the environment factors increase. In reality, it depends on the stability criterion of a stationary point, which is functionally dependent on the parameters of the model and this phenomenon has no biological interpretation.

Also had described other nonlinear effects that occur after the accumulation of doubling cascade and the formation of the attractor, like the Cantor set, similar to not having a biological interpretation, but the impact for the analysis of simulation data.

Mathematical methods of stock and replenish populations were expanded by the author using the concept of the impact of changing the development stages of fish. The model was applied to the problem of simulation of artificial and natural reproduction of populations of sturgeon of Caspian Sea. Model is written based on the differential equations of continuous-discrete structure. The model considers the Allee effect which is important for degraded populations.

The phase space of dynamical systems on the basis of the developed depending divided into two domains of attraction of attractors. The model defines not unimodal functional dependence in reproduction process and has four non-trivial fixed point. The three lowest stationary points are not stable. Trivial fixed point is stable point. The model is characterized by the fact that there is a transition mode is chaotic and there is the effect of sensitive dependence on initial conditions. Sensitivity is a consequence of the presence of notattracting chaotic set in a bounded subset of phase space.