НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ В МНОГОТОЧЕЧНЫХ ЗАДАЧАХ О ВСТРЕЧЕ ДВИЖЕНИЙ

В. И. Миронов[1], Ю. В. Миронов[2]

[1]Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14 линия ВО, д. 39
<ipi@iias.spb.ru>

[2]Военно-космическая академия им.А.Ф.Можайского
197082, Санкт-Петербург, П-82, Ждановская набережная, д.13
<mironuv@yandex.ru>

УДК 629.191
В. И. Миронов, Ю. В. Миронов. **Необходимые условия оптимальности управления в многоточечных задачах о встрече движений** // Труды СПИИРАН, Вып. 2, т. 2. — СПб.: Наука, 2005.
Аннотация. *Рассматривается задача оптимального управления движением активным объектом при его последовательной встрече с системой подвижных целевых объектов. Определяются необходимые условия оптимальности управления с учетом ограничений.* — Библ.7 назв.

UDC 629.191
V.I.Mironov, Y.V.Mironov. **The necessary conditions for optimum control in multipointed problems on meeting points motions** // SPIIRAS Proceedings. Issue 2, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2005.
Abstract. One considers the task of optimum control of active objects movement at it's consecutive meeting with a system of mobile objects for special targets. One determines necessary with regard of restrictions. — Bibl.7 items.

Задача оптимизации управления активным объектом (АО) при его последовательном сближении с группой подвижных целевых объектов (ЦО) относится к сложному и сравнительно мало изученному классу нелинейных многоточечных вариационных задач и, кроме того, связана с большим объемом вычислений. Задача такого рода рассматривалась, в частности, в [2,3] для импульсной постановки применительно к условиям космического полета к астероидам, где определялся оптимальный маршрут облета нескольких небесных тел. Аналогичные задачи возникают и при маневрировании космических аппаратов в околоземном пространстве и др.

Особенно трудоемкими являются многоточечные задачи оптимального управления с конечным управлением, и поэтому для них особенно обостряется проблема разработки высокоточных, надежных (устойчивых) и экономичных методов численного решения, пригодных для использования в контурах оперативного управления [4].

В данной статье рассматриваются некоторые пути решения этих вопросов при заданном маршруте обхода ЦО.

Разработку таких методов принципиально можно вести на основе двух известных подходов: прямого и вариационного.

Прямые методы, в принципе, позволяют строить достаточно надежные вычислительные схемы решения сложных оптимизационных задач. Однако они весьма громоздки и требуют большого объема вычислений. Кроме того, в рамках прямого подхода трудно определить оптимальную структуру управления и оценить близость получаемых решений к строго оптимальным [7].

По этой причине в большинстве известных работ, посвященных оптимизационным двухточечным задачам встречи на орбите, используется вариационный подход, базирующийся на применении принципа максимума Л.С.Понтрягина [5]. Принцип максимума выражает необходимые условия первого порядка сильного локального минимума функционала. Он сводит исходную континуальную проблему к соответствующей краевой задаче для сопряженной П–системы.

Важным моментом при разработке методов решения многоточечных задач перехвата, является формализация соответствующих необходимых условий оптимальности.

В теории оптимального управления рассматривались, в основном, такие многоточечные задачи последовательного типа, как задачи с промежуточными граничными условиями. Наиболее общие результаты в этой области получены в [1,6]. Однако сформулированные задачи и полученные в этих работах необходимые условия оптимальности не учитывают главной особенности многоточечной задачи о встрече движений, в которой граничные условия формируются на решениях соответствующих систем нелинейных дифференциальных уравнений. Это обстоятельство обосновывает необходимость специального рассмотрения вопросов конкретизации необходимых условий оптимальности для данного класса задач.

1. Постановка задачи. Пусть динамика АО на интервале $t \in [t_0, T]$ описывается системой уравнений

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{c}, t), \tag{1}$$

а движение N ЦО — системами

$$\dot{\bar{y}}_i = \bar{f}_i(\bar{y}_i, t);\ t \in [t_0, T_i];\ i = 1,2,\ldots,N, \tag{2}$$

где

$$\bar{x} = [\bar{r}, \bar{V}]^T;\ \bar{y} = [\bar{r}_y, \bar{V}_y]^T;\ \bar{\varphi} = [\bar{\varphi}_r, \bar{\varphi}_V]^T;\ \bar{f} = [\bar{f}_r, \bar{f}_V]^T.$$

В начальный момент t_0 исходное положение каждого ЦО определяется как

$$\bar{y}_i(t_0) = \bar{y}_{i_0}, \qquad i = 1,2,\ldots,N, \tag{3}$$

а начальное $\bar{x}(t_0)$ и конечное $\bar{x}(T)$ положение управляемого объекта связаны зависимостями

$$\bar{z} = \bar{z}\left[\bar{x}(t_0), t_0, \bar{x}(\bar{T}), T\right] = 0. \tag{4}$$

Требуется найти траекторию $\bar{x}(t)$, управление и параметры сближения

$$\bar{u}(t) \in \Omega_u,\ t_0,\ t_1, \ldots,\ t_N, T, \bar{c},$$

обеспечивающие в моменты t_i выполнение заданных условий встречи с каждым i-м целевым объектом

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}\left[\bar{x}(t_i), \bar{y}_i(t_i)\right] = 0; \tag{5}$$

$$i = 1,2,\ldots,N; \qquad (t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t_N < T),$$

и при этом функционал:

$$I = g\left[\bar{x}(t_0), t_0, \bar{x}(T), T\right] + \int_{t_0}^{T} \varphi_0(\bar{x}, \bar{u}, t)dt \tag{6}$$

должен принимать минимальное значение, т.е.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\{\bar{u}(t), t_0,\ t_1, \ldots,\ t_N, T, \bar{c}\} \to \min_{\bar{u}\in\Omega_u, \bar{c}} I\,.$$

2. Необходимые условия оптимальности. Для определения необходимых условий оптимальности управления можно применить различные известные методы. В данной статье этот вопрос решается на основе методического подхода, принятого в работе В.А.Троицкого [6]. Полагается, что введенные функции дифференцируемы по соответствующим аргументам.

Разобьем весь интервал $t \in [t_0, T]$ точками t_i, $(i = 1,2,\ldots,N)$ на $N+1$ участков. Тогда, следуя общим правилам [6], составим функционал J, при помощи которого определяются необходимые условия стационарности функционала I.

$$J = \gamma + \sum_{i=1}^{N}\left\{\bar{\vartheta}^T \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{y}_i(t_i)] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} L_i dt\right\} + \int_{t_N}^{T} L_{N+1} dt\,, \tag{7}$$

где

$$\gamma = g[\bar{x}(t_0), t_0, \bar{x}(T), T] + \bar{\rho}^T \bar{z}[\bar{x}(t_0), t_0, \bar{x}(T), T];$$

$$L_i = \varphi_{0_i} + \bar{\lambda}_i^T \bar{g}_i = \bar{\lambda}_i^T \dot{\bar{x}}_i - H_{\lambda_i}\,;$$

$$L_{N+1} = \varphi_{0_N} + \bar{\lambda}_{N+1}^T \bar{q}_{N+1} = \bar{\lambda}^T \dot{\bar{x}}_{N+1} - H_{\lambda_{N+1}};$$

$$H_{\lambda_i} = -\varphi_{0_i} + \bar{\lambda}_i^T \bar{\varphi}_i\,;$$

$$H_{\lambda_{N+1}} = -\varphi_{0_{N+1}} + \lambda_{N+1}^T \bar{\varphi}_{N+1}\,,$$

$\bar{\lambda}_i(t), \bar{\lambda}_{N+1}(t), \bar{\rho}, \bar{\vartheta}_i$ — подлежащие вычислению неопределенные множители Лагранжа.

Условие стационарности получается приравниванием нулю первой вариации функционала J и представляется равенством

$$\Delta J = 0\,. \tag{8}$$

Подставив в соотношение (8) функции L_i и L_{N+1} из формул (7) и составив эту вариацию, приходим к вариации

$$\begin{aligned}\Delta J = \Delta\gamma + \sum_{t_{i-1}}^{N}\{\bar{\vartheta}_i^T \Delta\bar{\psi}[\bar{x}(t_i), y_i(t_i)] + (\varphi_{0_1} - \varphi_{0_{i+1}})\delta t_i\ + \\ + \int_{t_{i-1}}^{t_i}(\bar{\lambda}_i^T \delta\dot{\bar{x}}_i)dt + \int_{t_N}^{T}\left[\bar{\lambda}_{N+1}^T \delta\dot{\bar{x}}_{N+1} - \delta H_{\lambda N+1}\right]dt\}.\end{aligned} \tag{9}$$

Интегрируя (9) по частям, вычислим интеграл от членов, содержащие вариации $\delta\dot{\bar{x}}_i, \delta\dot{\bar{x}}_{N+1}$:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \bar{\lambda}^T \delta\dot{\bar{x}}_i = \bar{\lambda}_i^T \delta\bar{x}_T \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\bar{\lambda}}_i^T \delta\bar{x}_i dt\,; \tag{10}$$

$$\int_{t_N}^{T} \bar{\lambda}_N^T \delta\dot{\bar{x}}_{N+1} = \bar{\lambda}_{N+1}^T \delta\bar{x}_{N+1} \Big|_{t_N}^{T} - \int_{t_N}^{T} \dot{\bar{x}}_{N+1}^T \delta\bar{x}_{N+1} dt\,. \tag{11}$$

Определим далее вариации соответствующих членов в (9)

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\Delta\gamma = \left[\frac{\partial\gamma}{\partial\bar{x}(t_0)} - \bar{\lambda}(t_0)\right]^T \Delta\bar{x}(t_0) + \left[\frac{\partial\gamma}{\partial\bar{x}(T)} + \bar{\lambda}(T)\right]^T \Delta\bar{x}(T) +$$

$$+ \left[\frac{\partial\gamma}{\partial t_0} + (H_\lambda)_{t_0}\right]\delta t_0 + \left[\frac{\partial\gamma}{\partial T} - (H_\lambda)_T\right]\delta T\,; \qquad (12)$$

$$\Delta\bar{\psi} = \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}(t_i)}\Delta\bar{x}(t_i) + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}(t_i)}\dot{\bar{x}}(t_i)\delta t_i + \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y_i(t_i)}\dot{\bar{y}}_i(t_i)\delta t_i\,; \qquad (13)$$

$$\delta H_{\lambda_i} = \frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial\bar{x}_i}\delta\bar{x}_i + \frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial\bar{u}_i}\delta u_i\,; \qquad (14)$$

$$\delta H_{\lambda_{N+1}} = \frac{\partial H_{\lambda_{N+1}}}{\partial\bar{x}_{N+1}}\delta\bar{x}_{N+1}. \qquad (15)$$

После подстановки выражений (10)–15) в (8) и группирование соответствующих членов, получим следующее выражение для вариации ΔJ

$$\Delta J = \left[\frac{\partial\gamma}{\partial\bar{x}(t_0)} - \bar{\lambda}(t_0)\right]^T \Delta\bar{x}(t_0) + \left[\frac{\partial\gamma}{\partial\bar{x}(T)} + \bar{\lambda}(T)\right]^T \Delta\bar{x}(T) +$$

$$+ \left[\frac{\partial\gamma}{\partial t_0} + (H_\lambda)_{t_0}\right]\delta t_0 + \left[\frac{\partial\gamma}{\partial T} - (H_\lambda)_T\right]\delta T +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1}\left[\bar{\lambda}_{i+1}^T(t_i) - \bar{\lambda}_i^T(t_i) + \frac{\partial\bar{\psi}_i^T}{\partial\bar{x}(t_i)}\bar{\vartheta}_i\right]\Delta\bar{x}(t_i) +$$

$$\sum_{i=1}^{N-1}\left\{H_{\lambda_{N+1}} - H_{\lambda_i}\bar{\upsilon}^T\left[\frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial\bar{x}(t_i)}\bar{\varphi}(t_i) + \frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial\bar{y}_i(t_i)}\bar{f}(t_i)\right]\right\} +$$

$$+ \left[\bar{\lambda}_{N+1}^T - \bar{\lambda}_N^T\right]_{t_N}\Delta\bar{x}(t_N) + \left[H_{\lambda_{N+1}} - H_{\lambda_N}\right]_{t_N}\delta t_N - \sum_{i=1}^{N}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[(\dot{\bar{\lambda}}_i + \frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial\bar{x}_i})\delta\bar{x}_i - \frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial\bar{u}_i}\delta\bar{u}_i\right]dt -$$

$$- \int_{t_N}^{T}\left[(\dot{\bar{\lambda}}_{N+1} + \frac{\partial H_{\lambda_{N+1}}}{\partial\bar{x}_{N+1}})\delta\bar{x}_{N+1} - \frac{\partial H_{\lambda_{N+1}}}{\partial\bar{u}_{N+1}}\delta u_{N+1}\right]dt = 0\,. \qquad (16)$$

Вариация (16) должна быть равна нулю, поэтому будут равны нулю коэффициенты при всех независимых вариациях переменных. Соответствующие коэффициенты при зависимых вариациях переменных можно обратить в нуль за счет выбора лагранжевых множителей. После этих операций получаем следующие системы уравнений

$$\dot{\bar{\lambda}}_i = -\frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial\bar{x}_i}; \qquad i = 1,2,\ldots,N+1, \qquad (17)$$

соотношения

$$\frac{\partial H_{\lambda_i}}{\partial\bar{u}} = 0\,, \qquad i = 1,2,\ldots,N+1, \qquad (18)$$

условия трансверсальности

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\bar{x}(t_0)}-\bar{\lambda}(t_0)=0; \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\bar{x}(T)}-\bar{\lambda}(T)=0; \tag{19}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t_0}+(H_\lambda)_{t_0}=0; \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial T}-(H_\lambda)_T=0, \tag{20}$$

и условия Эрдмана-Вейерштрасса:

$$\bar{\lambda}_{i+1}(t_i)-\bar{\lambda}_i(t_i)+\frac{\partial\bar{\psi}_i^T}{\partial\bar{x}(t_i)}\bar{\vartheta}_i=0; \tag{21}$$

$$H_{i+1}(t_i)-H_i(t_i)+\bar{\vartheta}_i^T\left[\frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial\bar{x}(t_i)}\bar{\varphi}(t_i)+\frac{\partial\bar{\psi}_i}{\partial\bar{y}_i(t_i)}\bar{f}(t_i)\right]=0; \qquad i=1,2,...,N. \tag{22}$$

При решении задачи оптимизации нужно использовать еще уравнения (1–5) и условия непрерывности фазовых координат

$$\bar{x}_{i+1}(t_i)=\bar{x}(t_i), \qquad i=1,2,...,N \tag{23}$$

Совокупность условий (17–23) и (1–5) и представляют систему необходимых условий оптимальности процесса управления в рассматриваемой многоточечной вариационной задаче.

Здесь уравнения (17) — определяют динамику сопряженного вектора $\bar{\lambda}(t)$, а равенства (19) и (21) задают граничные условия, которым должна удовлетворять оптимальная функция $\bar{\lambda}(t)$ при $t\in[t_0,T]$ в моменты $t_0,t_1,t_2,...,t_N,T$. Как видим, поиск оптимального управления сводится к решению многоточечной краевой задачи. Из (21) следует, что в точках встречи t_i сопряженный вектор терпит разрыв.

Условия (4), (19) и (20) позволяют определить параметры начальной и конечной точек динамического процесса, а условия (22) служат для определения оптимальных моментов встречи t_i, $i=1,2,...,N$.

В целом, для решения поставленной задачи оптимизации необходимо определить вектор-функции $\bar{x}_i,\bar{\lambda}_i,\bar{u}_i$, векторы параметров $\bar{\rho},\bar{\vartheta}_i$ и величины $t_0,t_1,t_2,...,t_N,T$. Нетрудно видеть, что приведенная система условий содержит достаточное число связей для вычисления всей совокупности неизвестных.

Согласно (18), управляющие функции не зависят явно от переменных $\bar{y}_i(t)$, однако они учитываются в условиях, определяющих оптимальные моменты встречи t_i, $i=1,2,...,N$.

Рассмотрим вопрос учета ограничений на вектор управления $\bar{u}(t)\in\Omega_u$. Для этого, следуя [6], запишем необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала I

$$E\geq 0, \tag{24}$$

в котором E есть функция Вейерштрасса, составленная по формуле

$$E=L(\bar{x},\dot{\tilde{\bar{x}}},\tilde{\bar{u}},\bar{\lambda},t)-L(\bar{x},\dot{\bar{x}},\bar{u},\lambda,t)-(\dot{\tilde{\bar{x}}}-\dot{\bar{x}})\frac{\partial L}{\partial\dot{\bar{x}}}. \tag{25}$$

Здесь $\bar{x}$ и $\bar{u}$ — функции, сообщающие минимум функционалу J, а $\tilde{\bar{x}}$ и $\tilde{\bar{u}}$ — любые допускаемые функции, удовлетворяющие уравнениям задачи.

Подставим в (25) выражение L, тогда из (24) следует неравенство

$$H_\lambda(\bar{x},\bar{u},\bar{\lambda},t)\geq H_\lambda(\bar{x},\tilde{\bar{u}},\bar{\lambda},t). \tag{26}$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Это означает, что на оптимальной по управлению траектории при $\bar{u} \in \Omega_u$ функция $H_\lambda(\bar{x},\bar{u},\bar{\lambda},t)$ принимает максимальное значение.

Можно показать, что если в правые части уравнений движения активного объекта входит вектор параметров $\bar{c}$

$$\dot{\bar{x}} = \varphi(\bar{x},\bar{u},\bar{c},t),$$

то при совместной оптимизации управляющей функции $\bar{u}(t)$ и вектора $\bar{c}$ система необходимых условий оптимальности дополняются дифференциальным уравнением

$$\dot{\bar{\mu}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{c}}, \tag{27}$$

с граничными условиями $\bar{\mu}(t_0) = \bar{\mu}(T) = 0$.

Сформулируем полученные выше результаты в форме принципа максимума для случая, когда $T = t_N$.

Теорема 1. Для оптимальности $\bar{u}(t)$, $\bar{c}$, $\bar{t}_N$ и $\bar{x}(t)$ необходимо выполнение следующих условий:

1) Векторы $\bar{x}(t)$ и $\bar{\lambda}(t)$ удовлетворяют сопряженной системе

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H(\bar{x},\bar{u},\bar{\lambda},\bar{c},t)}{\partial \bar{\lambda}}; \qquad \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial H(\bar{x},\bar{u},\bar{\lambda},\bar{c},t)}{\partial \bar{x}}. \tag{28}$$

2) Вектор управления обеспечивает максимум гамильтониану

$$\bar{u}(t) \to \max_{\bar{u}\in\Omega_u} \left\{ H\left(\bar{x},\bar{u}\bar{\lambda},\bar{c},t\right) = \bar{\lambda}^T \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{u},t) - \varphi_0(\bar{x},\bar{u},t) \right\}; \; t_0 \le t \le T. \tag{29}$$

3) Выполняются условия трансверсальности для $\bar{x}(t_0)$, $\bar{\lambda}(t_0)$, $\bar{x}(T)$, $\bar{\lambda}(T)$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \bar{x}(t_0)} - \bar{\lambda}(t_0) = 0; \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{x}(T)} - \bar{\lambda}(T) = 0; \tag{30}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t_0} + (H_\lambda)_{t_0} = 0; \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial T} - (H_\lambda)_T = 0, \tag{31}$$

где

$$\gamma = g\left[\bar{x}(t_0),t_0,\bar{x}(T),T\right] + \bar{\rho}^T \bar{z}\left[\bar{x}(t_0),t_0,\bar{x}(T),T\right];$$

$$H_\lambda = \varphi_0(\bar{x},\bar{u},t) + \bar{\lambda}^T \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{u},t).$$

4) При $t = t_i$ выполняются условия Эрдмана-Вейерштрасса

$$\bar{\lambda}_{i+1}(t_i) - \bar{\lambda}_i(t_i) + \bar{\vartheta}_i^T \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{x}(T_i)} = 0; \tag{32}$$

$$H_{i+1}(t_i) - H_i(t_i) + \bar{\vartheta}_i^T \left[\frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{x}_i(T_i)} \bar{\varphi}(T_i) + \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{y}_i(T_i)} \bar{f}(\bar{y}_i,T_i) \right] = 0; \; i = 1,2,\ldots,N; \tag{33}$$

$$\bar{\lambda} = [\bar{\lambda}_r, \bar{\lambda}_V]^T,$$

где $\bar{\lambda}(t), \bar{\rho}, \bar{\vartheta}_i$ — неопределенные множители Лагранжа;

5) Вектор $\bar{c}$ удовлетворяет условию

$$\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H}{\partial \bar{c}} dt = 0. \tag{34}$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Как видно из условий 4, сопряженные переменные имеют скачки в моменты времени t_i, что является особенностью данного класса задач, которую необходимо учитывать при решении. Уравнения (2–5) с условиями (28–34) и условиями непрерывности вектора $\overline{x}(t)$ дают достаточное число условий для определения всех неизвестных параметров и функций.

Из теоремы 1 вытекают частными случаями ряд важных в прикладном отношении следствий, конкретизирующих необходимые условия оптимальности для разных типов функционалов и для различных условий встречи.

3. Пример. Рассмотрим частный вариант краевых условий для задачи жесткого сближения космического аппарата при последовательном обходе целевых объектов. Для этого конкретизируем исходную постановку задачи.

Будем полагать, что движение объектов происходит в нормальном гравитационном поле, учитывающем полярное сжатие Земли. Запишем соответствующие уравнения в абсолютной геоцентрической экваториальной системе отсчета для управляемого объекта

$$\dot{\bar{r}} = \overline{V}\ ;\ \dot{\overline{V}} = \overline{\varphi}(\bar{r},t) + \overline{u}(t);\ \dot{m} = -\beta\ ,$$

где

$$\varphi_x = ax; \quad \varphi_y = ay; \quad \varphi_z = (2bc + a)z; \tag{35}$$

$$a = -b[\alpha_{00} + c(d-1)];\ b = R_0 r^{-3};\ c = 1.5\alpha_{20}R_0^2 r^{-2};\ d = 5z^2 r^{-2};$$

$$J_{20} = -0.001082627\ ;\ \alpha_{00} = 62564951\,м^2/c^2;$$

$$\alpha_{20} = -67889{,}273\ м^2/c^2;\ R_0 = 6371\,км\ ;\ r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}.$$

$$\overline{u}(t) = u(t)\overline{\alpha}(t); \qquad u(t) = \frac{W\beta(t)}{m(t)};$$

$$\beta(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m_0}; \qquad 0 \le \beta \le \beta_{\max}; \tag{36}$$

$$\overline{\alpha}(t) = [\cos\nu(t)\cos\psi(t), \sin\nu(t)\cos\psi(t), \sin\psi(t)]^T .$$

W — скорость истечения газов;

β, m — относительные секундный расход топлива и масса;

ν,ψ — углы тангажа и рыскания.

Движение N пассивных ЦО описываются системами уравнений

$$\dot{\bar{r}}_i = \overline{V}_i; \qquad \dot{\overline{V}}_i = \bar{f}(\bar{r}_i,t); \qquad i = 1,2,\dots,N\ , \tag{37}$$

где $\bar{f}(\bar{r}_i,t)$ — правые части уравнений движения пассивных КО, имеющие структуру, аналогичную $\overline{\varphi}(\bar{r},t)$.

Требуется найти программу управления, доставляющую минимум функционалу

$$I = \int_0^T \varphi_0(\overline{x},\overline{u},t)dt\ ,$$

при заданных ограничениях (15).

Если минимизируются энергетические затраты, то

$$\varphi_0 = \beta(t)\,,$$

а в случае минимизации времени сближения:

$$\varphi_0 = 1,$$

при этом должно учитываться ограничения по имеющимся энергетическим запасам.

Решение при $\varphi_0 = \beta(t)$ сводится к соответствующей многоточечной краевой задаче, которая формируется условиями оптимальности управления

$$\bar{\alpha} = -\frac{\bar{\lambda}_V}{\left\|\bar{\lambda}_V\right\|}; \qquad \beta = \begin{cases} \beta_{max}, \text{ при } \Delta_\Pi \geq 0; \\ 0, \quad \text{при } \Delta_\Pi < 0; \end{cases}$$

$$\Delta_\Pi = -\left\|\bar{\lambda}_V\right\| \cdot \frac{m(t)}{W} - \lambda_m - 1,$$

где Δ_Π — функция переключения,

системами дифференциальных уравнений движения (35) и (37), сопряженной системой

$$\dot{\bar{\lambda}}_r = \frac{\pi_0}{r^3}[\bar{\lambda}_V - \frac{3}{r^2}(\bar{\lambda}_V^T \bar{r})\bar{r}]; \qquad \dot{\bar{\lambda}}_V = -\bar{\lambda}_r;$$

$$\dot{\lambda}_m = \frac{W\beta}{m^2}\bar{\lambda}_V^T \bar{\alpha};$$

а также краевыми и промежуточными условиями:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0; \qquad \bar{y}_i(t_0) = \bar{y}_{i_0};$$

$$\bar{\psi}_i = \bar{r}(t_i) - \bar{r}_i(t_i) = 0;$$

$$\bar{\lambda}_{r,i+1}(t_i) - \bar{\lambda}_{r,i}(t_i) + \bar{\vartheta}_{r,i} = 0;$$

$$\bar{\lambda}_{V,i+1}(t_i) - \bar{\lambda}_{V,i}(t_i) = 0; \qquad \bar{\lambda}_{V,N}(t_N) = 0; \qquad \lambda_m(T) = 0;$$

$$R_i = H_{i+1}(t_i) - H_i(t_i) + \bar{\vartheta}_{r,i}^T\left[\bar{\varphi}_r(t_i) - \bar{f}_r(t_i)\right] = 0;$$

$$i = 1,2,\ldots,N.$$

Неизвестными являются векторы параметров:

$$\bar{q} = [\bar{p}_\lambda, \bar{t}_N]^T;$$

$$\bar{p}_\lambda = [\bar{\lambda}_0, \bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \ldots, \bar{\vartheta}_{N-1}]^T; \; \bar{t}_N = [t_1, t_2, \ldots, t_N]^T,$$

где $\bar{\lambda}_0$ — начальный вектор сопряженных переменных;

$\bar{\vartheta}_i$ — векторы множителей Лагранжа;

$\bar{t}_N$ — вектор неизвестных моментов встречи.

Оптимальные значения вектора параметров управления $\bar{q} = [\bar{p}_\lambda, \bar{t}_N]^T$ являются решением краевого уравнения

$$\bar{S}(\bar{q}) = 0,$$

$$\bar{S} = [\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_N, \bar{R}, \bar{\lambda}_{V_N}]^T;$$

$$\bar{R} = [\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, \bar{R}_N]^T,$$

которое при подходящем выборе начального приближения можно получить известными численными методами [7].

Литература

[1] *Величенко В. В.* Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями значений координат. ДАН СССР, 1967, т.174, № 5. С. 1011–1013.

[2] *Жирнов В. А., Лидов М. Л.* К задаче сближения с несколькими астероидами. Космические исследования. Т.XXVII, №1, 1989. С. 3–8.
[3] *Жирнов В. А., Лидов М. Л.* Решение задачи сближения с несколькими астероидами алгоритмом оптимальной коррекции. Космические исследования. Т.XXVI, №4, 1988. С. 508–518.
[4] *Миронов Ю. В.* Необходимые условия оптимальности управления при обслуживании группы космических объектов // Труды военно-научной конференции 13–14 апреля 2000г. Т.1, СПб, ВИКУ им А.Ф.Можайского, 2000. С. 442–445.
[5] *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1969. 369 с.
[6] *Троицкий В. А.* Вариационные задачи оптимизации процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений координат. ДАН СССР, т.149, №5, 1963. С. 268–271.
[7] *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления, М.: Наука, 1978. — 488 с.