ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К КОМПЛЕКСНОМУ ОЦЕНИВАНИЮ ПАРАМЕТРОВ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. И. Миронов[1], Ю. В. Миронов[2]

[1]Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14 линия ВО, д.39
<ipi@iias.spb.ru>

[2]Военно-космическая академия им.А.Ф.Можайского
197082, Санкт-Петербург, П-82, Ждановская наб., д.13
<mironuv@yandex.ru>

УДК 629.191
В. И. Миронов, Ю. В. Миронов. **Вариационный подход к комплексному оцениванию параметров состояния нелинейных динамических систем** // Труды СПИИРАН, Вып. 2, т. 2. — СПб.: Наука, 2005.
Аннотация. *Рассматривается применение вариационного подхода для решения комплексных задач статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем по критерию максимального правдоподобия. Обсуждаются вопросы учета априорной информации и регуляризации оценок.* — Библ.15 назв.

UDC 629.191
V.I.Mironov, Y.V.Mironov. **The variation approach towards complex estimation of conditions parameters of non-linear dynamic systems** // SPIIRAS Proceedings. Issue 2., vol 2 — SPb: Nauka, 2005.
Abstract. *One considers the application of variation approach for solution of complex problems of statistic estimation of non-linear dynamic systems due to criterion of maximum verisimilitude. One discusses questions of accounting of a priori information and regularization of marks appreciation.* — Bibl.15 items.

Задачи оценивания параметров состояния и характеристик динамических систем по результатам измерений имеют широкое распространение на практике. Особенно важное место они занимают на всех этапах создания, экспериментальной отработки и эксплуатации объектов ракетно-космической, авиационной, корабельной техники, а также других сложных автоматических и автоматизированных систем, комплексов различного назначения и видовой принадлежности. Наиболее сложные задачи оценивания приходится, в частности, решать при навигационно-баллистическом обеспечении полетов космических аппаратов (КА), при разработке систем автономной навигации, в ходе летных испытаний и др.

В настоящее время основными методами определения орбит КА являются методы, основанные на совместной обработке результатов наблюдений по полной выборке. Они широко освещены в отечественной и зарубежной литературе [1–5,10–12,14,15 и др.] и успешно решают широкий круг важных и сложных прикладных задач. Однако вопросы улучшения их точностных и вычислительных характеристик продолжают оставаться актуальными.

Созданная методология в основном базируется на непосредственном применении в динамических задачах оценивания условий метода максимального правдоподобия (и метода наименьших квадратов). По смыслу они представляют собой необходимые условия оптимальности, характерные для прямых методов оптимизации.

Вместе с тем, необходимо отметить, что методы теории оптимальной обработки измерений, как и методы теории оптимального управления, могут строиться и развиваться на основе использования различных форм и принципов формирования условий оптимальности — как прямых, так и вариационных. Вариационные условия оптимальности создают новую базу для решения данного класса задач.

Каждая форма условий оптимальности имеет свою область наиболее рационального применения. Теоретический анализ и накопленный опыт практического применения методов теории оптимального управления убедительно показывает, что там, где удается реализовать вариационные условия оптимальности (принцип максимума), обеспечиваются лучшие точностные и вычислительные характеристики алгоритмов по сравнению с алгоритмами управления, основанными на прямых методах оптимизации. Поэтому можно ожидать, что разработка и применение вариационного подхода к задачам оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем также позволит улучшить вычислительные и точностные характеристики соответствующих алгоритмов.

Вопросам обоснования и разработки указанного вариационного подхода к задачам статистического оценивания нелинейных динамических систем посвящены работы авторов [6–9].

Проведенный в этих работах анализ особенностей вычислительных процессов оптимального оценивания, связанных с применением каждого из рассматриваемых подходов, позволяет сделать вывод о наличии определенных вычислительных преимуществ вариационного варианта ММП по сравнению с прямым вариантом его применения. Это объясняется, прежде всего, тем, что при его численной реализации исключается необходимость вычисления матриц частных производных от измеряемых по оцениваемым параметрам.

В указанных работах главное внимание было уделено задаче оценивания вектора начального состояния системы по результатам измерений. Основной же целью данной статьи является рассмотрение задачи совместного (комплексного) статистического оценивания, как параметров исходного фазового состояния динамического объекта, так и векторов параметров его модели движения и модели измерений.

При этом определяются и конкретизируются необходимые условия оптимальности оценок вариационного типа применительно к моделям дискретных и дискретно-непрерывных измерений, как для нормального, так и ненормального законов распределения ошибок измерений. Кроме того, рассматриваются вопросы учета априорной информации при комплексном оценивании, а также регуляризации оценок.

1. Постановка задачи. Достаточно общая задача оценивания параметров движения динамического объекта заключается в наилучшем в некотором смысле определении n-мерного вектора его исходного состояния $\bar{x}_0$ на заданный начальный момент времени $t = t_0$ по результатам измерений, проводимых в N точках t_i, заданных на мерном интервале $\tau = T - t_0$. В более широкой постановке одновременно требуется также оценить некоторый l-мерный вектор $\bar{c}$ параметров модели движения и p-мерный вектор $\bar{c}_1$ параметров модели измерений.

В качестве базовой рассмотрим следующую нелинейную задачу оптимального оценивания.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Задача 1. Пусть динамика объекта описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{c},t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \in [t_0,T]. \tag{1}$$

Измерениям подвергается m-мерный вектор

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}[\bar{x}(t),\bar{c}_1].$$

Измеренное значение вектора $\bar{\psi}$ в момент t_i обозначим, как $\bar{y}(t_i) = \bar{y}_i$ и представим модель измерений в виде

$$\bar{y}(t_i) = \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1] + \bar{\delta}_i, \tag{2}$$

$$i = 1(1)N;\ t_i \in [t_0,T].$$

Здесь $\bar{\delta}_i$ — m-мерный вектор случайных ошибок измерений, стохастическое изменение которого зададим некоторым многомерным непрерывным дифференцируемым распределением $f(\bar{\delta}_i,\bar{\alpha}_i)$ с параметрами $\bar{\alpha}_i$, отличающемся в общем случае от нормального распределения.

Требуется найти такие оценки векторов $\bar{x}_0$, $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$, которые обеспечивают минимальное значение функционала:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \{\bar{y}(t_i), \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1], \bar{\alpha}_i\}, \tag{3}$$

где

$$\rho_i = \ln f_i \{\bar{y}(t_i) - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1], \bar{\alpha}_i\}; \tag{4}$$

$$i = 1(1)N.$$

Функции $\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{c},t)$ и $\bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1]$ будем считать однозначными, ограниченными, непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам во всей области их определения.

Нетрудно видеть, что функционал (3) есть не что иное, как логарифмическая функция правдоподобия.

Предполагается выполнение известных условий наблюдаемости.

2. Вариационные условия оптимальности оценок. Для решения поставленной задачи представим функционал (3) в эквивалентной интегральной форме. Для этого введем функцию

$$\rho\{\bar{y}(t), \bar{\psi}[\bar{x}(t),\bar{c}_1], \bar{\alpha}(t)\} = \ln f\{\bar{y}(t) - \bar{\psi}[\bar{x}(t),\bar{c}_1], \bar{\alpha}(t)\}, \tag{5}$$

где $\bar{y}(t)$ и $\bar{\alpha}(t)$ — произвольные непрерывные дифференцируемые вектор-функции, принимающие в моменты t_i, соответственно, значения $\bar{y}_i$ и $\bar{\alpha}_i$ (например, полиномы Лагранжа). Тогда для функционала (3) получим выражение

$$I = \int_{t_0}^{T} \rho\{\bar{y}(t), \bar{\psi}[\bar{x}(t),\bar{c}_1]\} \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i) dt, \tag{6}$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

где $\delta(t-t_i)$ — импульсная дельта-функция.

Расширим затем пространство состояний путем введения дополнительных векторов $\bar{x}_1(t)=\bar{c}$, $\bar{x}_2(t)=\bar{c}_1$ и систем

$$\dot{\bar{x}}_1(t)=\bar{\varphi}_{x_1}(\bar{x}_1,t)\equiv 0\,;\ \dot{\bar{x}}_2(t)=\bar{\varphi}_{x_2}(\bar{x}_2,t)\equiv 0 \tag{7}$$

$$\bar{x}_1(t_0)=\bar{c}\,;\ \bar{x}_2(t_0)=\bar{c}_1.$$

Применяя далее стандартную процедуру вариационного исчисления, по аналогии с [7] приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.1. Оптимальные оценки векторов $\bar{x}_0,\bar{c},\bar{c}_1$ и порождаемая ими оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}=\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{c},t); \\ \dot{\bar{\lambda}}=-\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}^T\bar{\lambda}+\dfrac{\partial\rho}{\partial\bar{x}}[\bar{y},\bar{\psi}(\bar{x},\bar{c}_1),t]\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\delta(t-t_i); \\ \dot{\bar{\mu}}_c=-\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{c}}^T(\bar{x},\bar{c},t)\,\bar{\lambda}; \\ \dot{\bar{\mu}}_{c_1}=\dfrac{\partial\rho}{\partial\bar{c}_1}[\bar{y},\bar{\psi}(\bar{x}),\bar{c}_1,t]\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\delta(t-t_i); \end{cases} \tag{8}$$

при граничных условиях

$$\bar{\lambda}(t_0)=\bar{\lambda}(T)=0\,;\ \bar{\mu}_c(t_0)=\bar{\mu}_c(T)=0\,;\ \bar{\mu}_{c_1}(t_0)=\bar{\mu}_{c_1}(T)=0\,.$$

Эта краевая задача выражает необходимые условия оптимальности вариационного типа метода максимального правдоподобия при комплексном оценивании нелинейной динамической системы.

Отметим особенность интегрирования сопряженной системы, которая определяется наличием в правых частях дифференциальных уравнений импульсных дельта-функций. Это вызывает в моменты t_i скачкообразное изменение соответствующих сопряженных переменных на величину производной от критериальной функции ρ по вектору текущего состояния динамического процесса

$$\bar{\lambda}(t_i^+)=\bar{\lambda}(t_i^-)+\Delta\bar{\lambda}(t_i\,)\,; \tag{9}$$

$$\bar{\mu}_{c_1}(t_i^+)=\bar{\mu}_{c_1}(t_i^-)+\Delta\bar{\mu}_{c_1}(t_i\,)\,,$$

где

$$\Delta\bar{\lambda}(t_i\,)=\frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}}\{\bar{y}_i,\bar{\psi}[\bar{z}(t_i)]\};$$

$$\Delta\bar{\mu}_{c_1}(t_i\,)=\frac{\partial\rho}{\partial\bar{c}_1}[\bar{y}_i,\bar{\psi}(\bar{x}_i,\bar{c}_1),t_i\,];\quad i=1(1)N\,.$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

С учетом скачков сопряженных переменных теорему 1.1 можно переформулировать в следующем эквивалентном виде.

Теорема 1.2. Оптимальные оценки векторов $\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{c}_1$ и порождаемая ими оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{c},t); \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}^{T}\bar{\lambda}; \\ \dot{\bar{\mu}}_c = -\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{c}}^{T}(\bar{x},\bar{c},t)\,\bar{\lambda}; \\ \dot{\bar{\mu}}_{c_1} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

при граничных условиях

$$\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0;\ \bar{\mu}_c(t_0) = \bar{\mu}_c(T) = 0;\ \bar{\mu}_{c_1}(t_0) = \bar{\mu}_{c_1}(T) = 0;$$

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial\rho}{\partial\bar{x}}[\bar{y}_i, \bar{\psi}(\bar{x}_i,\bar{c}_1), t_i]; \tag{11}$$

$$\bar{\mu}_{c_1}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_1}(t_i^-) + \frac{\partial\rho}{\partial\bar{c}_1}[\bar{y}_i, \bar{\psi}(\bar{x}_i,\bar{c}_1), t_i].$$

В этих выражениях функция $\rho[\cdot]$ является логарифмической функцией правдоподобия (5).

Приведенные выше условия оптимального оценивания нетрудно конкретизировать применительно к заданному виду распределения вектора случайных ошибок измерений.

Так, если для вектора $\bar{\delta}_i$ принимается нормальное распределение $N(0,K_{\delta_i})$ с нулевым вектором математического ожидания и корреляционной матрицей K_{δ_i}, что, как правило, имеет место на практике, при совместном оценивании векторов $\bar{x}_0$, $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$ из условий теоремы 1.2 приходим к следующей краевой задаче

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{c},t); \qquad \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}^{T}\bar{\lambda}; \tag{12}$$

$$\dot{\bar{\mu}}_c = -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{c}}^{T}\bar{\lambda};\ \dot{\bar{\mu}}_{c_1} = 0;$$

$$\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0;\ \bar{\mu}_{\tilde{n}}(t_0) = \bar{\mu}_{\tilde{n}}(T) = 0;\ \bar{\mu}_{\tilde{n}_1}(t_0) = \bar{\mu}_{\tilde{n}_1}(T) = 0;$$

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial\bar{\psi}^T(t_i)}{\partial\bar{x}_i}K_{\delta_i}^{-1}\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1]\};$$

$$\bar{\mu}_{c_1}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_1}(t_i^-) + \frac{\partial\bar{\psi}^T(t_i)}{\partial\bar{c}_1}K_{\delta_i}^{-1}\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\bar{c}_1]\}; \qquad i = 1(1)N.$$

Полагая в (12) корреляционные матрицы равными соответствующим единичным матрицам, получаем условия, соответствующие вариационному варианту метода наименьших квадратов.

При наличии непрерывных или дискретно-непрерывных измерений в при-

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

веденные выше вариационные условия оптимальности оценок вносятся очевидные изменения.

Так, например, если помимо дискретных измерений (2) проводятся и непрерывные измерения согласно модели

$$\bar{y}_1(t) = \bar{\psi}_1[\bar{x}(t), \bar{c}_1] + \bar{\delta}_1(t),$$

где $\bar{\delta}_1(t)$ — вектор ошибок измерений, имеющий нормальное распределение $N[0, K_\delta(t)]$ с нулевым вектором математического ожидания и корреляционной матрицей $K_\delta(t)$, то краевая задача комплексного оценивания принимает вид

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t);$$

$$\dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}}^T \bar{\lambda} + \frac{\partial \bar{\psi}_1^T}{\partial \bar{x}} K_{\delta_1}^{-1}(t)\{\bar{y}_1(t) - \bar{\psi}_1[\bar{x}(t)]\}; \qquad \dot{\bar{\mu}}_c = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{c}}^T \bar{\lambda};$$

$$\dot{\bar{\mu}}_{c_1} = K_{\delta_1}^{-1}(t)\{\bar{y}_1(t) - \bar{\psi}_1[\bar{x}(t)]\}; \tag{13}$$

$$\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0; \ \bar{\mu}_{\tilde{n}}(t_0) = \bar{\mu}_{\tilde{n}}(T) = 0; \ \bar{\mu}_{\tilde{n}_1}(t_0) = \bar{\mu}_{\tilde{n}_1}(T) = 0;$$

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \bar{\psi}^T(t_i)}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1}\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1]\};$$

$$\bar{\mu}_{c_1}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_1}(t_i^-) + \frac{\partial \bar{\psi}^T(t_i)}{\partial \bar{c}_1} K_{\delta_i}^{-1}\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}_1]\}; \qquad i = 1(1)N.$$

При произвольном законе распределения некоррелированных по времени ошибок измерений и рассматриваемых моделей дискретно-непрерывных измерений условия комплексного оценивания можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1.3. Оптимальные по критерию минимума логарифмической функции правдоподобия оценки векторов $\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{c}_1$ при дискретно-непрерывных измерениях и порождаемая ими оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t); \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}}^T \bar{\lambda} + \dfrac{\partial \rho_1}{\partial \bar{x}}[\bar{y}_1(t), \bar{\psi}_1(\bar{x}, \bar{c}_1, t)]; \\ \dot{\bar{\mu}}_c = -\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{c}}^T (\bar{x}, \bar{c}, t)\bar{\lambda}; \\ \dot{\bar{\mu}}_{c_1} = \dfrac{\partial \rho_1}{\partial \bar{c}_1}[\bar{y}_1(t), \bar{\psi}_1(\bar{x}, \bar{c}_1, t)]; \end{cases} \tag{14}$$

при граничных условиях

$$\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0; \ \bar{\mu}_c(t_0) = \bar{\mu}_c(T) = 0; \ \bar{\mu}_{c_1}(t_0) = \bar{\mu}_{c_1}(T) = 0.$$

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}}[\bar{y}_i, \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1), t_i]; \tag{15}$$

$$\bar{\mu}_{c_1}(t_i^+) = \bar{\mu}_{c_1}(t_i^-) + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\tilde{n}}_1}[\bar{y}_i, \bar{\psi}(\bar{x}_i, \bar{c}_1), t_i].$$

Здесь ρ_1 — логарифмическая функция правдоподобия непрерывных измерений $\rho_1\{\bar{y}_1(t),\bar{\psi}_1[\bar{x}(t),\bar{c}_1],\bar{\alpha}_1(t)\} = \ln f_1\{\bar{y}_1(t)-\bar{\psi}_1[\bar{x}(t),\bar{c}_1],\bar{\alpha}_1(t)\}$.

В этом выражении f_1 — плотность распределения ошибок непрерывных измерений.

При проведении только непрерывных измерений в приведенных выше условиях исключаются скачки сопряженных переменных.

3. Учет априорной информации. Обобщим полученные результаты на случай использования априорной информации о возможных значениях неизвестных векторов $\bar{x}_0$, $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$. Будем считать, что эта информация задается априорной дифференцируемой плотностью распределения $\bar{f}(\bar{z}_0,\bar{\alpha}_0)$, где $\bar{z}_0 = [\bar{x}_0,\bar{c},\bar{c}_1]^T$, где $\bar{\alpha}_0$ — вектор параметров распределения, а критерием оценивания является критерий максимума апостериорной вероятности [3]. В общем случае значение условной апостериорной плотности вероятности, согласно правилу Байеса, определяется выражением

$$f(\bar{z}_0/\bar{y}) = \frac{f(\bar{z}_0)W(\bar{y}/\bar{z}_0)}{f(\bar{y})},$$

где $f(\bar{y})$ — плотность вероятности случайного вектора измерений;
$W(\bar{y}/\bar{z}_0)$ — функция максимального правдоподобия.

В качестве оптимальной оценки примем такое значение $\bar{z}_0$, которое максимизирует апостериорную плотность вероятности $f(\bar{z}_0/\bar{y})$.

Если учесть, что плотность вероятности $f(\bar{y})$ не зависит от оцениваемых параметров, то в качестве критерия можно принять условие максимума показателя

$$I = f(\bar{z}_0)W(\bar{y}/\bar{z}_0), \tag{16}$$

или же условие максимума его логарифма

$$I_1 = \ln f(\bar{z}_0) + \ln W(\bar{y}/\bar{z}_0). \tag{17}$$

В рамках рассмотренной выше задачи 1 принятый показатель качества оценок (3) имеет смысл логарифмической функции правдоподобия. Поэтому выражение (17) можно записать как

$$I_1 = \ln f(\bar{z}_0) + I(\bar{z}_0), \tag{18}$$

или же в виде, аналогичном (3), т.е.

$$I = \sum_{i=0}^{N} \rho_i\{\bar{y}(t_i),\bar{\psi}[\bar{z}(t_i)]\}, \tag{19}$$

где

$$\rho_0 = \ln f(\bar{z}_0). \tag{20}$$

а значения ρ_i при $i = 1(1)N$ определяются, как и ранее, соотношениями (4).

Нетрудно видеть, что если для функционала I_1 повторить все выкладки и рассуждения, проведенные выше по отношению к показателю I при выводе необходимых условий оптимальности оценок, то в результате придем к утвержде-

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ниям, аналогичным теореме 1.1. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 2. Оптимальная апостериорная оценка вектора $\bar{z}_0 = [\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{c}_1]^T$ в задаче 1 и порождаемая ей оптимальная апостериорная траектория $\bar{z}(\bar{z}_0, t)$ доставляют решение двухточечной краевой задаче для канонической системы

$$\dot{\bar{z}} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \bar{\lambda}_z}; \ \dot{\bar{\lambda}}_z = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \bar{z}}, \quad (21)$$

при граничных условиях (22), (23) и

$$\bar{\lambda}_z(t_0) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} \ln f(\bar{z}_0); \qquad \bar{\lambda}_z(T) = 0. \quad (22)$$

Здесь

$$\widetilde{H} = \bar{\lambda}_z^T \bar{\varphi}_z(\bar{z}, t). \quad (23)$$

На основании этой теоремы можно конкретизировать краевые задачи оптимального оценивания с учетом априорной информации.

В частном случае, когда в качестве априорного принимается многомерное нормальное распределение

$$f(\bar{z}_0) = (2\pi)^{-n_z/2} \left|\widetilde{K}_{\bar{z}_0}\right|^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}(\bar{z}_0 - \tilde{\bar{z}}_0)\widetilde{K}_{\bar{z}_0}^{-1}(\bar{z}_0 - \tilde{\bar{z}}_0)]; \quad n_z = n + l + p, \quad (24)$$

то для определения начального значения сопряженного вектора $\bar{\lambda}_z(t_0)$ в условиях (22) теоремы 2 получаем выражение

$$\bar{\lambda}_z(t_0) = \widetilde{K}_{\bar{z}_0}^{-1}(\bar{z}_0 - \tilde{\bar{z}}_0). \quad (25)$$

При решении задач комплексного оценивания векторов $\bar{x}_0$, $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$ априорные распределения этих векторов естественно принять независимыми. Соответственно примем, что

$$f(\bar{x}_0) = N(\tilde{\bar{x}}_0, \widetilde{K}_{\bar{x}_0}), \quad (26)$$
$$f(\bar{c}) = N(\tilde{\bar{c}}, \widetilde{K}_{\bar{c}}), \qquad f(\bar{c}_1) = N(\tilde{\bar{c}}_1, \widetilde{K}_{\bar{c}_1}).$$

В этом случае при нормальном распределении ошибок измерений решение рассматриваемой задачи комплексного оценивания сводится к решению двухточечной краевой задачи, определяемой уравнениями и условиями (13) с измененными начальными значениями сопряженных переменных. Согласно теореме 2 они примут следующие значения

$$\bar{\lambda}(t_0) = \widetilde{K}_{\bar{x}_0}^{-1}(\bar{x}_0 - \tilde{\bar{x}}_0); \qquad \bar{\mu}_c(t_0) = \widetilde{K}_{\bar{c}}^{-1}(\bar{c} - \tilde{\bar{c}}); \qquad \bar{\mu}_{c_1}(t_0) = \widetilde{K}_{\bar{c}_1}^{-1}(\bar{c}_1 - \tilde{\bar{c}}_1). \quad (27)$$

Аналогичные результаты можно получить и для других типовых задач оптимального апостериорного оценивания при различных видах априорного распределения и распределений ошибок измерений.

4. Регуляризация оптимальных статистических оценок. Как известно, многие задачи статистического оценивания могут быть отнесены к некорректным обратным задачам. Мощным средством решения таких задач является метод регуляризации, созданный А.Н.Тихоновым, и развитый во многих работах.

В случае некорректности (плохой обусловленности) исходной задачи 1 в соответствии с методом регуляризации [13] в качестве ее приближенного решения следует принять такое значение вектора $\bar{z}_0 = [\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{c}_1]^T$, на котором сглаживающий функционал

$$I_\alpha = I(\bar{z}_0) + \alpha F(\bar{z}_0), \tag{28}$$

принимает экстремальное значение.

Выбор стабилизирующего функционала (стабилизатора) $F(\bar{z}_0)$ определяется характером решаемой задачи и обычно основан на априорной информации об искомых параметрах $\bar{z}_0$. Параметр регуляризации $\alpha, (\alpha > 0)$ также должен быть определенным образом согласован как с априорными данными о $\bar{z}_0$, так и с характеристиками ошибок измерений. Очевидно, что необходимые условия оптимальности оценок вариационного типа применительно к функционалу I_α (28) могут быть получены по аналогии с предыдущим. Соответствующий результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Регуляризированная комплексная оценка вектора $\bar{z}_0 = [\bar{x}_0, \bar{c}, \bar{c}_1]^T$ в задаче 1 и порождаемая ей регуляризированная траектория $\bar{z}(\bar{z}_0, t)$ доставляют решение двухточечной краевой задаче для канонической системы

$$\dot{\bar{z}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \bar{\lambda}_z}; \ \dot{\bar{\lambda}}_z = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \bar{z}}, \tag{29}$$

при граничных условиях

$$\bar{\lambda}_z(t_0) = \alpha \frac{\partial F(\bar{z}_0)}{\partial \bar{z}_0}; \quad \bar{\lambda}_z(T) = 0. \tag{30}$$

При решении задач навигационного оценивания обычно для стабилизирующего функционала принимается выражение вида

$$F(\bar{z}_0) = (\bar{z}_{on} - \bar{z}_0)^T C_z (\bar{z}_{on} - \bar{z}_0). \tag{31}$$

где $\bar{z}_{on}$ — заданный опорный вектор, близкий к истинному значению $\bar{z}_0$; C_z — некоторая симметричная положительно определенная матрица.

В этом случае для определения начального значения сопряженного вектора $\bar{\lambda}_z(t_0)$ в условиях (30) теоремы 3 получаем расчетное соотношение

$$\bar{\lambda}_z(t_0) = \alpha C_z (\bar{z}_{on} - \bar{z}_0). \tag{32}$$

Утверждения теоремы 3 можно конкретизировать для типовых задач, связанных с определением регуляризованных оценок при различных структурах стабилизатора $F(\bar{z}_0)$ и различных видах распределений ошибок измерений.

В частности, при решении задач комплексного оценивания векторов $\bar{x}_0$, $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$ для стабилизатора естественно принять следующую аддитивную структуру

$$F(\bar{z}_0) = (\bar{x}_{0_{on}} - \bar{x}_0)^T C_x (\bar{x}_{0_{on}} - \bar{x}_0) + (\bar{c}_{on} - \bar{c})^T C (\bar{c}_{on} - \bar{c}) +$$
$$+ (\bar{c}_{1_{on}} - \bar{c}_1)^T C_1 (\bar{c}_{1_{on}} - \bar{c}_1),$$

где C_x, C, C_1 — некоторые симметричные положительно определенные матрицы. В этом случае при нормальном распределении ошибок измерений решение рассматриваемой задачи комплексного оценивания сводится к решению двухточечной краевой задачи, определяемой уравнениями и условиями (13) с измененными начальными значениями сопряженных переменных. Согласно теореме 3 они примут следующие значения

$$\bar{\lambda}(t_0) = C_x (\bar{x}_{0_{on}} - \bar{x}_0); \qquad \bar{\mu}_c(t_0) = C (\bar{c}_{0_{on}} - \bar{c}); \qquad \bar{\mu}_{c_1}(t_0) = C_1 (\bar{c}_{1_{on}} - \bar{c}_1).$$

В заключении отметим, что предлагаемые методические средства могут быть использованы при разработке и модернизации алгоритмов оптимального статистического оценивания нелинейных динамических объектов различных типов в составе автоматизированных комплексов обработки наблюдений. Они могут также применяться для решения задач тестирования приближенных алгоритмов навигационного оценивания, для выбора эффективного состава и программы измерений. Статья написана при поддержке РФФИ (Проект № 02-07-90463-в).

Литература

[1] *Аким Э. Л., Энеев Т. М.* Определение параметров движения космических аппаратов по данным траекторных измерений.– Космические исследования, 1963, т.1, №1. С. 5–50.

[2] *Бажинов И. К., Алешин В. И., Почукаев В. Н., ПоляковВ.С.* Космическая навигация. М.: Машиностроение, 1975. 352 с.

[3] *Брандин Н. К., Разоренов Г. Н.* Определение траекторий КА.–М.: Машиностроение, 1978. 216 с.

[4] Космические траекторные измерения. Коллектив авторов под ред. *Агаджанова П. А., Дулевича В. Е., Коростелева А. А.*: Сов. Радио, 1969. 504с.

[5] *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, 1958. 350 с.

[6] *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный вариант метода максимального правдоподобия в задачах статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем. СПб: СПИИРАН, ISBN 5-7452-0060-Х, 2002. 70 с.

[7] *Миронов В. И., Миронов Ю.В.* Вариационный метод максимального правдоподобия // Труды СПИИРАН Вып. 1, т. 3. СПб: СПИИРАН, 2003. С. 148–176 с.

[8] *Миронов В. И., Миронов Ю. В.* Вариационный подход к статистическому оцениванию параметров орбитального движения космических аппаратов. СПб: ВИКУ им.А.Ф.Можайского, 2002. — 166 с.

[9] *Миронов Ю. В.* Применение принципа максимума Понтрягина для решения навигационных задач. // Сборник трудов военно-научной конференции «Управление частями запуска и управления КА, войск РКО при решении задач космического информационного обеспечения» в ВИКУ им.А.Ф.Можайского (13–14 апреля 2000 г.), СПб, 2000. С.146–149.

[10] Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6»–«Союз»–«Прогресс». Под ред. *Б .Н. Петрова, Н. К. Бажинова,* М.:Наука, 1985. 376 с.

[11] Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. *Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова,* М.: Машиностроение, 1972. 608 с.

[12] Статистические методы обработки результатов наблюдений. Под ред. *Р. М. Юсупова*, МО СССР, 1984. 563 с.

[13] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач, М: Наука, 1979. — 288 с.

[14] *Шапиро Н. Н.* Расчет траекторий баллистических снарядов по данным радиолокационных наблюдений, М.: ИЛ, 1968. 319 с.

[15] *Эльясберг П. Е.* Определение движения по результатам измерений, М.: Наука,1976. 416 с.