ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В АПОСТЕРИОРНОМ ВЫВОДЕ НАД ИДЕАЛАМИ ЦЕПОЧЕК КОНЪЮНКЦИЙ

А.Л. Тулупьев♦ и Д.А. Никитин

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, С.-Петербург, 14-я линия ВО, 39

<alt@iias.spb.su>

УДК 681.3

А. Л. Тулупьев и Д. А. Никитин. **Экстремальные задачи в апостериорном выводе над идеалами цепочек конъюнкций** // Труды СПИИРАН. Вып. 2, т. 2. — СПб.: Наука, 2005.

Аннотация. *Идеал цепочек конъюнкций с оценками вероятностей его элементов является одной из математических моделей фрагмента знаний с вероятностной неопределенностью. Цепи и сети таких идеалов являются математическим моделями баз фрагментов знаний и называются алгебраическим байесовскими сетями. В статье рассматриваются экстремальные задачи, возникающие при пропагации свидетельств и их кортежей (апостериорном выводе) в идеалах цепочек конъюнкций; предложено обобщение этого подхода на цепи и ациклические сети идеалов. Изначально возникающие задачи формулируются как задачи гиперболического программирования, но их удаётся свести к серии задач линейного программирования. В статье также описана индексация элементов идеала, позволяющая представить множество ограничений относительно оценок их вероятности на основе требований аксиоматики вероятностной логики, в виде, удобном для формальной записи рассматриваемых экстремальных задач.* — Библ. 16 назв.

UDC 681.3

*A. L. Tulupyev & D. A. Nikitin***. Extremal Tasks in à posteriori Inference over Conjunctions Chains Ideals** // SPIIRAS Proceedings. Issue 2, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2005.

Abstract. *An ideal of conjunctions with a probabilistic estimates/assignment of its elements is one of the mathematical models of a knowledge pattern with probabilistic uncertainty. Chains and networks of such ideals are mathematical models of knowledge pattern bases; these models are referred to as algebraic Bayesian networks. We consider extremal tasks that appear in conjunction chains ideals when elementary evidence or a set of such evidence is propagated over them. This propagation is referred to as à posteriori inference. We also generalize our approach to evidence propagation onto chains of conjunctions ideals and acyclic networks of those ideals. Initially appearing extremal tasks are hyperbolic programming ones; but we manage to reduce them to linear programming tasks. We describe as well an indexation of ideal elements. This indexation allows to formally specify a set of constraints, originated from probabilistic logic axioms, over a conjunctions ideal. This formal specification allows a convenient notation of the extremal tasks under question.* — Bibl. 16 items.

1. Введение

Объектом настоящего исследования является особый вид математических моделей фрагментов знаний (ФЗ) и баз фрагментов знаний (БФЗ) с вероятностной неопределенностью — идеалы цепочек конъюнкций с оценками вероятностей истинности своих элементов и, соответственно, сети таких идеалов, которые называются алгебраическим байесовскими сетями (АБС).

Другим объектом исследования являются свидетельства: отдельные детерминированные свидетельства, их кортежи, недетерминированные свидетельства, кортежи недетерминированных свидетельств, кортежи недетерминированных свидетельств с неопределенностью. Отметим, во-первых, что оба вида кортежей недетерминированных свидетельств также представимы с по-

♦ Исследования, результаты которых представлены в настоящей работе, были частично поддержаны грантом Фонда содействия отечественным учёным за 2004 и 2005 гг.

мощью распределения оценок вероятностей над некоторым идеалом цепочек конъюнкций, а, во-вторых, рассматриваемый аппарат представления свидетельств позволяет учитывать их взаимную зависимость.

Процессы вывода в ФЗ и в АБС разделяются на:

- вывод непротиворечивых оценок истинности[1] (*поддержание непротиворечивости* ФЗ или АБС);
- вывод априорных оценок истинности новых элементов (*априорный вывод*)[2];
- вывод апостериорных оценок истинности при поступившем свидетельстве или их кортеже, а также оценка вероятности истинности этого свидетельства или кортежа над заданным ФЗ или АБС (*апостериорный вывод*);
- вывод эмпирических оценок показателей чувствительности (*анализ чувствительности*).

Предметом исследования настоящей работы будет являться апостериорный вывод в ФЗ и АБС при различных видах поступающих свидетельств и их кортежей, а *целью* исследования — описание возникающих в процессе вывода задач *гиперболического* (иначе — *дробно-линейного*) программирования (ЗГП) и способ их сведения к задачам *линейного* программирования (ЗЛП).

Ключевым моментом для данной работы явился частный результат, представленный в [7]. С помощью замены переменных в указанной публикации удалось свести задачу гиперболического программирования, возникающую при поступлении детерминированного свидетельства в ФЗ, построенный над двумя атомарными пропозициональными формулами, с интервальными оценками истинности элементов, к задаче линейного программирования. Этот же подход к замене переменных оказался применим и в иных случаях пропагации свидетельств и их кортежей; результаты применения этого подхода приводятся в настоящей работе.

Следует отметить, что полученные результаты было бы трудно изложить систематически без приводимого в начале статьи способа *«естественной» индексации* элементов идеала цепочек конъюнкций и *квантов*, задаваемых над некоторым множеством атомарных пропозициональных формул.

Отметим также, что настоящая работа развивает теорию алгебраических байесовских сетей, представленную, в частности, в ряде публикаций [1–10, 13]. Ключевые идеи апостериорного вывода в случае детерминированных свидетельств и точечных оценок истинности над идеалами цепочек конъюнкций и их сетями (т.е. над АБС) были даны впервые в [1]; затем переработаны, обобщены, формализованы и систематически изложены в [9].

Дальнейшее изложение состоит из нескольких разделов. В разделе 2 приводятся необходимые сведения из математической логики, вводится ряд обозначений и описывается способ индексации (перенумерации) цепочек конъюнк-

---

[1] Здесь речь идет о поиске *максимальных подпирающих интервальных оценок истинности*, которые были бы непротиворечивы. Ведутся также исследования в области формализации и изучения свойств *минимальных объемлющих интервальных оценок истинности*, которые были бы непротиворечивы. В последнем случае основной сложностью становится неединственность такого рода оценок.

[2] Отметим, что в силу большого сходства решаемых в процессе поддержания непротиворечивости и в процессе априорного вывода экстремальных задач, оба процесса объединяются под названием *синтез согласованных оценок истинности*.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ций. В разделе 3 вводится вероятность истинности пропозициональной формулы на основе подхода Н. Нильссона.

В разделе 4 вводится определение непротиворечивости оценок вероятности истинности над идеалом цепочек конъюнкций; рассматривается ряд примеров, связанных с формированием множества ограничений для выполнения процесса поддержания непротиворечивости. В разделе 5 с использованием индексации в формальном виде выписываются связи между вероятностными означиваниями различных классов цепочек конъюнкций; а в разделе 6 полученные результаты используются для представления в формальном виде множества ограничений, накладываемых аксиоматикой вероятностной логики на вероятности элементов идеалов.

В разделе 7 рассматривается особый случай работы с тензором условных вероятностей, когда его значение неопределенно, точнее, должно оцениваться интервалом [0;1].

В разделе 8 рассматриваются виды свидетельств и их кортежей, вводятся необходимые дополнительные обозначения. В разделе 9 разбираются ключевые примеры апостериорного вывода при детерминированных свидетельствах; а общий случай рассматривается в разделе 12. Раздел 10 содержит формулы для расчётов, необходимых в процессе апостериорного вывода, при кортеже недетерминированных свидетельств; а в разделе 11 рассматриваются экстремальные задачи апостериорного вывода, возникающие при наличии непоределенности в совокупности свидетельств. Раздел 13 содержит схематическое описание подхода к распростарнению свидетельств в цепях фрагментов знаний и ациклических алгебраических байесовских сетях.

Раздел 14 содержит выводы по настоящей работе, а также описание возможных направлений дальнейших исследований и развития программно-технологических разработок.

2. Основные обозначения и терминология

Пусть W — некоторое множество. Множество всех его подмножеств обозначаем 2^W.

Пусть l, m, n — некоторые целые числа. Запись $j = \overline{m(l)n}$ означает, что j пробегает множество целых чисел от m до n с шагом l. Например, $j = \overline{0(1)7}$ или $j = \overline{15(-1)0}$.

Правый нижний натуральный индекс после записи числа указывает систему счисления, в которой запись исполнена. Отсутствие индекса в записи числа означает использование десятичной системы счисления. Например, $5 = 101_2$, $111_2 = 7$, $1000_2 = 2^3 = 8$.

Далее используются следующие обозначения логических операций: $\wedge$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, $\oplus$ — исключающее или. Удвоение знака бинарной логической операции означает использование ее побитовой версии. Отрицание высказывания x обозначается чертой сверху: $\bar{x}$. Знак конъюнкции в цепочках конъюнкций может для краткости опускаться.

Пусть у нас имеется множество атомарных пропозициональных формул

$$A = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

С точки зрения нашей задачи мы считаем, что это — самые элементарные пропозициональные формулы; они представляют собой простейшие высказывания о предметной области, истинность которых нам удается оценить.
Введем обозначение аргументного места (или литерала, что является синонимом) $\tilde{x}$. Аргументное место может принимать одно из двух значений

$$\tilde{x} \in \{x, \bar{x}\},$$

где $x \in A$, а $\bar{x}$ – его логическое отрицание.

Набор всех возможных пропозициональных формул над A обозначим $F = F(A)$, а набор *квантов* — цепочек конъюнкций аргументных мест максимальной длины со всеми возможными означиваниями, обозначим как $Q = Q(A) = \{\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n\}$. Напомним, что символ операции конъюнкции $\wedge$ в цепочках, как правило, опускается.

Приведем формулировку теоремы о совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ):

$$\forall(f \in F)\ \exists!(S_f \subseteq Q):\ f \equiv \bigvee_{q \in S_f} q.$$

Для удобства дальнейших рассуждений введем функцию

$$S : F \to 2^Q,$$
$$S(f) = S_f,$$

где S_f — множество квантов, участвующих в СДНФ пропозициональной формулы f.

Идеалом цепочек конъюнкций над заданным множеством атомарных формул назовем все непустые положительно-означенные цепочки конъюнкций атомарных пропозициональных формул:

$$C = C(A) = \left\{x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_k} : (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in 2^{\{\overline{1(1)m}\}}, k = \overline{1(1)m}\right\}.$$

Отметим, что мы рассматриваем на самом деле *классы* цепочек конъюнкций: мы не различаем цепочки конъюнкций с одинаковым набором аргументных мест и/или атомарных пропозициональных формул. Отметим также, что определение идеала цепочек конъюнкций исключает из него пустую конъюнкцию.

По умолчанию считаем, что пустая конъюнкция эквивалентна тождественной истине: $e_\wedge \equiv \mathbf{T}$, а пустая дизъюнкция эквивалентна тождественной лжи: $e_\vee \equiv \mathbf{F}$.

Отметим, что для записи последовательности из n аргументных мест вида $\tilde{x}_i$ мы будем в допустимых случаях использовать обозначение

$$\tilde{X} = \tilde{X}_{[n]} = \tilde{x}_1 \ldots \tilde{x}_n.$$

Индекс в квадратных скобках опускается, если его значение в контексте очевидно. Аналогичное обозначение используется и для положительно-означенной цепочки конъюнкций:

$$X = X_{[n]} = x_1 \ldots x_n.$$

Индекс в квадратных скобках может быть опущен при тех же условиях.

Для упрощения понимания материала рассмотрим два примера.

Пример 1 (два атома). Пусть

$$A = \{x_1, x_2\}.$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Тогда

$$Q = \{\tilde{x}_1\tilde{x}_2\} = \{x_1x_2, x_1\bar{x}_2, \bar{x}_1x_2, \bar{x}_1\bar{x}_2\};$$
$$C = \{x_1, x_2, x_1x_2\};$$
$$\tilde{X} = \tilde{x}_1\tilde{x}_2;$$
$$X = x_1x_2.\bullet$$

Пример 2 (три атома). Пусть

$$A = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Тогда

$$Q = \{\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3\} = \{x_1x_2x_3, x_1x_2\bar{x}_3, x_1\bar{x}_2x_3, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1x_2x_3, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\};$$
$$C = \{x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\};$$
$$\tilde{X} = \tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3;$$
$$X = x_1x_2x_3.\bullet$$

3. Вероятность истинности пропозициональной формулы по Н. Нильссону

Заметим, что все множества элементарных событий (возможных миров) в нашей работе предполагаются конечными.

При введении вероятности истинности на пропозициональных формулах можно было бы ограничиться замечанием, что булева алгебра пропозициональных формул над заданным конечным множеством атомов изоморфна булевой алгебре над некоторым конечным множеством подмножеств некоторого заданного множества. Далее можно было бы утверждать, что поскольку вероятность может быть задана на булевой алгебре множества подмножеств некоторого множества, то она аналогично может быть задана на булевой алгебре пропозициональных формул. Однако этот подход не представляется нам достаточно конструктивным для достижения цели данной работы. Мы воспользуемся подходом Н. Нильссона [14, 15] (в [11, 12] содержится его более глубокая и строгая формализация), внесшего концепцию вероятностной логики в исследования по искусственному интеллекту.

Содержательно подход Н. Нильссона состоит в следующем. Дан конечный набор пропозициональных формул. Все возможные истинностные означивания этого набора назовем возможными мирами. Все непротиворечивые означивания назовем допустимыми мирами. Рассмотрим множество допустимых миров как множество элементарных событий. Зададим на нем распределение вероятностей, подчиняющихся двум требованиям: вероятности элементарных событий неотрицательны и сумма вероятностей всех элементарных событий равна единице. Тогда вероятностью истинности формулы будем считать сумму вероятностей тех допустимых миров, в которых она принимает значение «истина».

Коротко обратившись к работам [10, 11], следует заметить, что они дают не только более строгую формализацию подхода Нильссона, но также сравнивают вероятностные структуры на пропозициональных формулах со структурами, которые можно было бы построить в рамках теории Демпстера–Шеффера.

Пример 3. (Вероятность на пропозициональных формулах). Рассмотрим набор пропозициональных формул $\{x, y, xy\}$. В таблице 1 приведены все возможные миры, ассоциированные с этим набором.

Таблица 1. Возможные миры

Формула	Логическое означивание							
x	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**	**F**	**F**
y	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**
xy	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**	**F**

Заштрихованные столбцы отмечают недопустимые миры – миры, означивание формул в которых противоречиво.

Таблица 2. Допустимые миры и распределение вероятности

Формула	Допустимое логическое означивание (допустимый мир)				Вероятность формулы
x	**T**	**T**	**F**	**F**	0,2
y	**T**	**F**	**T**	**F**	0,75
xy	**T**	**F**	**F**	**F**	0,15
Вероятность допустимого мира	0,15	0,05	0,6	0,2	

В таблице 2 приведены допустимые миры и распределение вероятностей на них. Исходя из этого начального распределения вероятностей, мы можем, согласно Нильссону, приписать вероятности истинности пропозициональным формулам из исходного набора. Рассчитанные вероятности указаны в последнем столбце таблицы 2. Отметим, что для краткости вместо «вероятность истинности формулы» говорят «вероятность формулы».•

Формальное изложение подхода Н. Нильссона основано на использовании теоремы о СДНФ. Рассмотрим Q как множество элементарных событий. Зададим на нем исходное распределение вероятностей

$$p^{\circ} : Q \to [0;1],$$

такое, что

$$\forall (q \in Q) \;\; p^{\circ}(q) \geq 0;$$

$$\sum_{q \in Q} p^{\circ}(q) = 1.$$

Введем вероятность $p : 2^{Q} \to [0;1]$ следующим образом:

$$\forall (S \subseteq Q) \;\; p(S) = \sum_{q \in S} p^{\circ}(q).$$

На этом шаге мы получили вероятностное пространство $\langle Q, 2^{Q}, p \rangle$. Определим вероятностную меру на множестве F следующим образом:

$$\forall (f \in F) \;\; p(f) = p(S(f)).$$

Взяв за основу такое распространение вероятности на множество пропозициональных формул, мы получим новое вероятностное пространство:

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$\langle Q, F, p \rangle$. Эта структура вероятностного пространства по Н. Нильссону задает вероятность над всеми пропозициональными формулами, построенными над множеством атомарных формул A.

Исходя из вышеописанного способа введения вероятности на пропозициональных формулах, мы получим $p(\mathbf{T}) = 1$ и $p(\mathbf{F}) = 0$, что согласуется с нашими интуитивными представлениями.

Интервальную оценку вероятности пропозициональной формулы f будем обозначать $\mathbf{p}(f) = \left[p^-(f);\, p^+(f)\right]$.

4. Непротиворечивость распределения оценок вероятности истинности над идеалом

Пусть над элементами идеала положительно-означенных цепочек конъюнкций C задано точечное распределение вероятности. Назовем это распределение непротиворечивым, если на соответствующем наборе квантов Q можно подобрать такое распределение вероятностей, которое отвечает аксиоматике вероятностей, а также задает те же вероятности элементов идеала цепочек конъюнкций. То есть, точечное распределение вероятностей на идеале цепочек конъюнкций непротиворечиво тогда и только тогда, когда на квантах можно подобрать такое распределение вероятностей, которое индуцирует исходное на элементах идеала.

На самом деле, вероятности элементов идеала цепочек конъюнкций выражаются через вероятности квантов, а вероятности квантов выражаются через вероятности элементов идеала цепочек конъюнкций [2, 3, 6, 7].

С вычислительной точки зрения в точечном случае — т.е. в случае, когда оценки вероятности истинности элементов идеала C все точечные, а не интервальные — задача проверки непротиворечивости сводится к пересчету вероятностей: из точечных оценок на элементах идеала надо получить точечные оценки на квантах. Рассмотрим процесс пересчета на примере.

Пример 4. (Непротиворечивость точечного означивания в идеале над двумя атомарными пропозициями). Пусть $A = \{x_1, x_2\}$, тогда аксиоматика вероятностей устанавливает множество ограничений, расположенное слева, в качестве требования непротиворечивости вероятностного означивания. Подставим в левые части неравенств выражения вероятности истинности квантов через вероятности истинности элементов идеала цепочек конъюнкций. Отметим, что нормировочное равенство при этом превратится в тавтологию; мы ее исключаем из набора ограничений.

$$\left\{\begin{array}{l} p(x_1 x_2) \ge 0, \\ p(x_1 \bar{x}_2) \ge 0, \\ p(\bar{x}_1 x_2) \ge 0, \\ p(\bar{x}_1 \bar{x}_2) \ge 0, \\ p(x_1 x_2) + p(x_1 \bar{x}_2) + p(\bar{x}_1 x_2) + p(\bar{x}_1 \bar{x}_2) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p(x_1 x_2) \ge 0, \\ p(x_1) - p(x_1 x_2) \ge 0, \\ p(x_2) - p(x_1 x_2) \ge 0, \\ 1 - p(x_1) - p(x_2) + p(x_1 x_2) \ge 0 \end{array}\right\}.$$

Набор неравенств слева, вытекающий из аксиоматики теории вероятностей, в теории АБС обозначается $E^{\wedge,2}$. В нашем примере его дополняет набор

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ограничений из предметной области $D^{\wedge,2}$, состоящий из исходных точечных оценок вероятности $p_\circ$ формул из идеала C:

$$\begin{Bmatrix} p(x_1) = p_\circ(x_1), \\ p(x_2) = p_\circ(x_2), \\ p(x_1 x_2) = p_\circ(x_1 x_2) \end{Bmatrix}.$$

Задача проверки непротиворечивости в данном случае сводится к проверке того, что $p_\circ$ удовлетворяет всем требованиям из $E^{\wedge,2}$. •

В дальнейшем множество ограничений, вытекающих из требований аксиоматики теории вероятностей относительно элементов идеала над n-элементным набором атомарных пропозиций, будем обозначать $E^{\wedge,n}$. Соответствующий набор ограничений из предметной области будем обозначать $D^{\wedge,n}$. Об идеале над n-элементным набором атомарных пропозиций будем говорить, что он — идеал n-ного прядка.

В случае точечных оценок состав $D^{\wedge,n} = \{p(f) = p_\circ(f) : f \in C\}$; в случае же интервальных оценок — $D^{\wedge,n} = \{p_\circ^-(f) \le p(f) \le p_\circ^+(f) : f \in C\}$. Объединение множеств ограничений обозначается $R^{\wedge,n} = E^{\wedge,n} \cup D^{\wedge,n}$.

Заметим, что под интервалом мы понимаем, на самом деле, отрезок или замкнутый промежуток. Это употребление термина несколько противоречит отечественной традиции, где интервал — это открытый промежуток. Однако оно происходит из области интервальных вычислений; кроме того, было бы трудно работать с термином *отрезковая*, *отрезочная* или *замкнутопромежуточная* оценка меры истинности.

В случае интервальных оценок условие непротиворечивости формулируется следующим образом: для любой точки из интервала значения оценки истинности любого элемента идеала существует (хотя бы один) такой набор точек из каждого интервала оценки истинности оставшихся элементов, что получающееся точечное означивание непротиворечиво.

Задача поддержания непротиворечивости сводится к тому, чтобы из интервалов оценок истинности удалить те точки, которые не удовлетворяют условию непротиворечивости. Или обнаружить, что исходный набор интервальных оценок противоречив.

Было показано [2, 6, 7], что если набор интервальных оценок истинности содержит в себе непротиворечивое подмножество, то новые границы интервальных оценок истинности получаются в результате решения двух задач линейного программирования (ЗЛП) для каждой формулы из идеала C:

$$p^-(f) := \min_{R^{\wedge,n}} \{p(f)\};$$

$$p^+(f) := \max_{R^{\wedge,n}} \{p(f)\}.$$

Если исходный набор интервальных оценок противоречив, то тогда вышеуказанные ЗЛП решения не имеют.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Пример 5. (Построение множества $E^{\wedge,3}$). Процесс построения множеств ограничений вида $E^{\wedge,n}$ ранее [7] описывался следующим образом:

1. Выписать требования аксиоматики теории вероятностей относительно квантов.
2. Подставить в соответствующие неравенства вместо вероятностей квантов их выражение через вероятности элементов идеала.
3. Нормировочное равенство выполняется автоматически — его удаляем.
4. Полученный набор неравенств и представляет собой $E^{\wedge,n}$.

Продемонстрируем еще раз, как работает ранее использовавшийся способ на примере идеала третьего порядка, а затем перейдем к вопросу новой формализации построения множеств $E^{\wedge,n}$.

Слева выписаны требования аксиоматики вероятностей, накладываемые на вероятности квантов. Справа расположено то же множество ограничений, но с подстановкой, выполненной по формуле включений-исключений.

$$\left\{\begin{array}{l} p(x_1x_2x_3)\ge 0,\\ p(x_1x_2\bar{x}_3)\ge 0,\\ p(x_1\bar{x}_2x_3)\ge 0,\\ p(x_1\bar{x}_2\bar{x}_3)\ge 0,\\ p(\bar{x}_1x_2x_3)\ge 0,\\ p(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3)\ge 0,\\ p(\bar{x}_1\bar{x}_2x_3)\ge 0,\\ p(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)\ge 0,\\ p(x_1x_2x_3)+p(x_1x_2\bar{x}_3)+p(x_1\bar{x}_2x_3)+p(x_1\bar{x}_2\bar{x}_3)+\\ +p(\bar{x}_1x_2x_3)+p(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3)+p(\bar{x}_1\bar{x}_2x_3)+p(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p(x_1x_2x_3)\ge 0,\\ p(x_1x_2)-p(x_1x_2x_3)\ge 0,\\ p(x_1x_3)-p(x_1x_2x_3)\ge 0,\\ p(x_1)-p(x_1x_2)-p(x_1x_3)+p(x_1x_2x_3)\ge 0,\\ p(x_2x_3)-p(x_1x_2x_3)\ge 0,\\ p(x_2)-p(x_1x_2)-p(x_2x_3)+p(x_1x_2x_3)\ge 0,\\ p(x_3)-p(x_1x_3)-p(x_2x_3)+p(x_1x_2x_3)\ge 0,\\ 1-p(x_1)-p(x_2)-p(x_3)+p(x_1x_2)+p(x_1x_3)+p(x_2x_3)-p(x_1x_2x_3)\ge 0 \end{array}\right\}.$$

Самое последнее неравенство слева в правой части выполняется автоматически (проверяется суммирование левых частей неравенств). Множество $E^{\wedge,3}$ построено.

Такой метод генерации ограничений пригоден для специалиста, который обладает достаточными знаниями в области комбинаторики и вероятностной логики. Для автоматизации генерации ограничений требуется разработать процесс, более явно допускающий алгоритмизацию и последующую программную реализацию. •

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

В примере 5 рассматривается построение множества ограничений $E^{\wedge,3}$. Отметим, что рассмотренный в примере способ понятен специалисту-математику, но не является строгой спецификацией для алгоритмизации процесса и последующего кодирования. Нашей «технической» задачей является формализация способа генерации ограничений $E^{\wedge,n}$.

5. Связь вероятностных означиваний

Введем ряд новых обозначений, связанных с использованием двоичного представления неотрицательных целых чисел. Мы будем использовать неотрицательные целые числа для представления или обозначения последовательности означиваний аргументных мест.

Выберем в качестве базового примера, мотивирующего дальнейшее изложение, $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3[i]$, где

$$i = \overline{0(1)(2^3 - 1)} = \overline{0(1)7},$$

что более удобно было бы рассмотреть в двоичной системе счисления, еще удобнее — в двоичной системе счисления с «ведущими» нулями:

$$i = \overline{0_2(1_2)111_2},$$

$$i = \overline{000_2(1_2)111_2}.$$

Таким образом, индекс i пробегает в двоичной системе с ведущими нулями следующую последовательность двоичных чисел:

$$\{000_2, 001_2, 010_2, 011_2, 100_2, 101_2, 110_2, 111_2\}.$$

Не исключено, что эту последовательность удобно было бы рассматривать в обратном порядке:

$$i = \overline{111_2(-1_2)000_2}.$$

Прежде, чем дать понимание записи $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3[i]$, рассмотрим запись $i[k:m]$. Эта запись предполагает, что в двоичной записи числа i присутствует m позиций. Если число недостаточно велико, то считается, что его двоичная запись пополнена недостающими ведущими нулями. Значением записи $i[k:m]$ считается двоичная цифра, стоящая на k-том месте слева в двоичной записи длиной m числа i.

$$101_2[1:3] = 1,$$

$$101_2[2:3] = 0,$$

$$101_2[3:3] = 1.$$

Если второй индекс m можно восстановить из контекста, мы его будем опускать ради сокращения длины записи.

Запись $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3[i]$ означает, что мы рассматриваем одно из означиваний литералов в конъюнкции $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$; при этом на месте k-ого литерала слева стоит положительное его означивание, если $i[k:3] = 1$, и — отрицательное, если $i[k:3] = 0$. Проиллюстрируем полученную конструкцию коротким примером:

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3[5] = x_1\bar{x}_2x_3,$$

или, если мы используем двоичную запись, что может иногда быть удобнее или нагляднее:

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3[101_2] = x_1\bar{x}_2x_3.$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Данный подход к обозначениям удобен с мнемонической точки зрения — при описании алгоритмов, и с практической точки зрения — при написании программ.

Аналогичные обозначения введем для положительно-означенных цепочек конъюнкций — элементов соответствующего идеала.

Рассмотрим запись упорядоченного множества атомарных пропозициональных формул: (x_1, x_2, x_3). Введем обозначение $\wedge(x_1, x_2, x_3)[i:3]$, сразу же заметим, что второй индекс, указывающий на количество элементов в упорядоченном множестве, мы будем, как правило, опускать за его ненадобностью. Следовательно, рассмотрим обозначение: $\wedge(x_1, x_2, x_3)[i]$. Оно выдает нам конъюнкцию положительно-означенных атомарных пропозиций, порядковый номер k которых отвечает условию $i[k:3]=1$, или, чуть более кратко $i[k]=1$. Если $i=0$, то получается пустая цепочка конъюнкций, которая по умолчанию тождественно равна истине.

Рассмотрим примеры, сразу используя двоичную запись индекса:

$$\wedge(x_1, x_2, x_3)[000_2] = \mathbf{T},$$
$$\wedge(x_1, x_2, x_3)[100_2] = x_1,$$
$$\wedge(x_1, x_2, x_3)[110_2] = x_1 x_2,$$
$$\wedge(x_1, x_2, x_3)[101_2] = x_1 x_3,$$
$$\wedge(x_1, x_2, x_3)[011_2] = x_2 x_3,$$
$$\wedge(x_1, x_2, x_3)[111_2] = x_1 x_2 x_3.$$

В результате, мы можем хранить данные об оценке вероятности квантов и положительно-означенных цепочек в массивах, причем индекс массива в данном случае будет иметь естественную интерпретацию означивания кванта или указания на состав цепочки конъюнкций.

Для краткости записи запятые в представлении упорядоченного множества литер будем, как правило, опускать.

$$\wedge(x_1 x_2 x_3)[000_2] = \mathbf{T},$$
$$\wedge(x_1 x_2 x_3)[100_2] = x_1,$$
$$\wedge(x_1 x_2 x_3)[110_2] = x_1 x_2,$$
$$\wedge(x_1 x_2 x_3)[101_2] = x_1 x_3,$$
$$\wedge(x_1 x_2 x_3)[011_2] = x_2 x_3,$$
$$\wedge(x_1 x_2 x_3)[111_2] = x_1 x_2 x_3.$$

Рассмотрим идеал n-ного порядка. Зададимся вопросом: как выразить вероятности наборов $\wedge(X)[i]$ и $\widetilde{X}[j]$ друг через друга в новой записи?

Обратим внимание на то, что вероятность положительно-означенной конъюнкции является суммой тех и только тех квантов, в которые входят все ее атомарные пропозиции с положительным означиванием. Пусть у нас имеется цепочка положительно означенных конъюнкций $\wedge X[i]$. Тогда нам потребуются только те кванты $\widetilde{X}[j]$, индексы которых удовлетворяют следующему уравнению:

$$i = i \wedge\wedge j\ ,$$

а итоговый ответ запишется следующим образом:

$$p(\wedge(X)[i]) = \sum_{\substack{j=(2^n-1)(-1)0, \\ i=i\wedge\wedge j}} p\left(\widetilde{X}[j]\right).$$

Введем две дополнительные операции для неотрицательного целого числа h. $\# h$ — количество единиц в двоичной записи числа h, а $\sim h$ — операция определения четности количества единиц в записи этого числа: $\sim h = (-1)^{\# h}$. Если количество единиц четное, то операция $\sim h$ принимает положительное значение, равное единице; если нечетное — значение отрицательное, равное минус единице.

Тогда обратное преобразование запишется таким образом (исходя из формулы включений-исключений):

$$p(\widetilde{X}[j]) = \sum_{\substack{i=(2^n-1)(-1)0, \\ j=j\wedge\wedge i}} \left(\sim(i\oplus\oplus j)\, p(\wedge(X)[i])\right).$$

6. Описание множества ограничений

С помощью описанного выше нового способа записи вероятностной связи между квантами и элементами идеала представим в формальном виде множество ограничений, исходящие из требований аксиоматики вероятности, для идеала конъюнкций над множеством 3-х, 4-х, 5-ти и 12-ти атомарных пропозиций: $E^{\wedge,3}, E^{\wedge,4}, E^{\wedge,5}, E^{\wedge,12}$. Для удобства элементы положительно-означенной цепочки выписаны в явном виде.

$$E^{\wedge,3} = \bigcup_{j=7(-1)0} \left\{ \sum_{\substack{i=7(-1)0, \\ j=j\wedge\wedge i}} \left(\sim(i\oplus\oplus j)\, p(\wedge(x_1x_2x_3)[i])\right) \geq 0 \right\};$$

$$E^{\wedge,4} = \bigcup_{j=15(-1)0} \left\{ \sum_{\substack{i=7(-1)0, \\ j=j\wedge\wedge i}} \left(\sim(i\oplus\oplus j)\, p(\wedge(x_1x_2\ldots x_4)[i])\right) \geq 0 \right\};$$

$$E^{\wedge,5} = \bigcup_{j=31(-1)0} \left\{ \sum_{\substack{i=31(-1)0, \\ j=j\wedge\wedge i}} \left(\sim(i\oplus\oplus j)\, p(\wedge(x_1x_2\ldots x_5)[i])\right) \geq 0 \right\};$$

$$E^{\wedge,12} = \bigcup_{j=4095(-1)0} \left\{ \sum_{\substack{i=4095(-1)0, \\ j=j\wedge\wedge i}} \left(\sim(i\oplus\oplus j)\, p(\wedge(x_1x_2\ldots x_{12})[i])\right) \geq 0 \right\}.$$

В общем случае множество ограничений для n атомов, составляющих множество атомарных пропозиций A, над которым строится идеал цепочек конъюнкций, будет записано следующим образом:

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$E^{\wedge,n} = \bigcup_{j=(2^n-1)(-1)0} \left\{ \sum_{\substack{i=(2^n-1)(-1)0,\\ j=j\wedge\wedge i}} \left(\sim(i\oplus\oplus j)p(\wedge(x_1x_2\dots x_n)[i:n])\right) \geq 0 \right\}.$$

Полученные соотношения являются формализацией того способа построения множества ограничений, который использовался в теории АБС ранее (см. пример 5).

Рост множества ограничений – экспоненциальный относительно размера (порядка) множества атомарных пропозиций; однако, согласно [14], на практике для представления связей между утверждениями о предметной области требуются фрагменты знаний (представленные в настоящей работе идеалами) над множествами атомарных пропозиций невысокого порядка: 2–3. Отметим при этом, что даже последний набор ограничений для идеала двенадцатого порядка доступен для использования при решении соответствующей ЗЛП современными программными объектно-ориентированными библиотеками — например, ILOG CPLEX в сочетании с ILOG Concert (см. <www.ilog.fr>, также можно пользоваться ссылкой <www.ilog.com>) — из области линейной оптимизации.

7. Неопределенность тензора условной вероятности

Далее в работе будет интенсивно использоваться аппарат условных вероятностей. Одну из особых ситуаций, возникающих при работе с условными вероятностями мы рассмотрим отдельно в настоящем разделе.

Определим условную вероятность $p(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X})$ соотношением

$$p(\widetilde{X}\widetilde{Y}) = p(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X}) \cdot p(\widetilde{X}).$$

При $p(\widetilde{X}) > 0$ из указанного определения мы можем выразить $p(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X})$:

$$\left(p(\widetilde{X}) > 0\right) \Rightarrow p(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X}) = \frac{p(\widetilde{X}\widetilde{Y})}{p(\widetilde{X})}.$$

Однако не всегда мы можем ожидать выполнение условия $p(\widetilde{X}) > 0$; таким образом, для организации вычислений мы должны хорошо представлять, что будет происходить с тензором условной вероятности в случаях, когда вероятность одного (или нескольких — но не всех!) означиваний $\widetilde{X}$ будет равна нулю: $p(\widetilde{X}) = 0$.

Укажем, во-первых, что согласно аксиоматике вероятностной логики $0 \leq p(\widetilde{X}\widetilde{Y})$. Во-вторых, $p(\widetilde{X}\widetilde{Y}) \leq p(\widetilde{X})$. Следовательно, при $p(\widetilde{X}) = 0$ мы будем иметь:

$$0 \leq p(\widetilde{X}\widetilde{Y}) \leq p(\widetilde{X});$$

$$0 \leq p(\widetilde{X}\widetilde{Y}) \leq 0;$$

$$p(\widetilde{X}\widetilde{Y}) = 0.$$

При подстановке оценок $p(\widetilde{X}) = 0$ и $p(\widetilde{X}\widetilde{Y}) = 0$ в исходное определение тензора условной вероятности мы получим:

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$p(\widetilde{X}\widetilde{Y}) = p(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X}) \cdot p(\widetilde{X});$$
$$0 = p(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X}) \cdot 0,$$

а последнее является линейным уравнением относительно $p(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X})$, допускающим в качестве решения любое действительное число. Поскольку «переменная» $p(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X})$ — вероятность, будем считать, что она в вышеописанном случае принимает значения из замкнутого промежутка [0;1]. Или, в терминах настоящей работы, интервальная оценка вероятности $\mathbf{p}(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X})$ равна $[0;1]$:

$$\left(p(\widetilde{X}) = 0\right) \Rightarrow \left(\mathbf{p}(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X}) = [0;1]\right);$$
$$\left(p(\widetilde{X}) = 0\right) \Rightarrow \left(p^{-}(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X}) = 0\right);$$
$$\left(p(\widetilde{X}) = 0\right) \Rightarrow \left(p^{+}(\widetilde{Y} \mid \widetilde{X}) = 1\right).$$

Если вероятностная модель базы данных с неопределенностью содержит оценку какого-то означивания $\widetilde{X}$, равную нулю $p(\widetilde{X}) = 0$, и на вход нам поступает кортеж детерминированных свидетельств $\left\langle \widetilde{X} \right\rangle$, содержащий именно это означивание цепочки конъюнкций, то тогда мы приходим к заключению, что вероятность возникновения такого кортежа свидетельств в классе ситуаций, описываемых нашей базой фрагментов знаний, равна нулю: $p\left(\left\langle \widetilde{X} \right\rangle \middle| \mathit{БФЗ}\right) = 0$. Кроме того, наша база фрагментов знаний не может дать сколько-нибудь нетривиальные оценки условных вероятностей своих элементов при свидетельстве $\left\langle \widetilde{X} \right\rangle$, поскольку не рассчитана на такие апостериорные сведения; а значит, исходя из изложенного выше особого свойства тензора условной вероятности, для всех цепочек $\widetilde{Y}$ из БФЗ, не содержащих общих с $\widetilde{X}$ атомарных пропозиций, апостериорная оценка вероятности будет неинформативной:

$$\mathbf{p}_a\left(\widetilde{Y} \mid \left\langle \widetilde{X} \right\rangle\right) = [0;1].$$

8. Виды свидетельств и цели апостериорного вывода

Будем считать, что у нас построен ФЗ на основе идеала цепочек конъюнкций с точечными или интервальными оценками истинности его элементов или БФЗ на основе алгебраической байесовской сети. В указанный ФЗ или в указанную БФЗ входят, в частности, атомарные пропозициональные формулы, над которыми и могут быть построены свидетельства (иногда будем говорить элементарное свидетельство) и кортежи свидетельств. Свидетельства и их кортежи могут быть детерминированными, недетерминированными и недетерминированными с неопределенностью. Кортежи свидетельств могут быть представлены, в свою очередь, с помощью отдельного фрагмента знаний, описывающего некий сложный комплекс свидетельств. Формально и отдельное элементарное свидетельство можно представить в виде ФЗ первого порядка.

Рассмотрим далее формальную запись различных вариантов свидетельств и их кортежей. При этом будем считать, что свидетельства и их кортежи строятся над атомарными пропозициональными формулами x_1, x_2, …, x_m, входящими в ФЗ или БФЗ. Если мы будем рассматривать лишь отдельное элементарное свидетельство, использующее лишь одну атомарную пропозицио-

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

нальную формулу, то тогда индекс будем опускать: x. Остальные атомарные пропозиции, входящие в рассматриваемый фрагмент, обозначим y_1, y_2, …, y_k. Скользящую переменную, перебирающую элементы идеала $C(y_1,y_2,\ldots,y_k)$, будем обозначать Z или Z_Y.

Примем соглашение относительно обозначений, упоминавшееся выше:

$$X = x_1x_2\ldots x_m;$$
$$\widetilde{X} = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_m;$$
$$Y = y_1y_2\ldots y_k;$$
$$\widetilde{Y} = \widetilde{y}_1\widetilde{y}_2\ldots\widetilde{y}_k.$$

Детерминированным свидетельством (или элементарным свидетельством) являются сведения о том, что какое-то утверждение, соответствующее атомарной пропозиции, оказалось либо истинным, либо ложным. Например, установлено, что утверждение x — истинно; тогда соответствующее свидетельство запишется как $\langle x\rangle$. Если же установлено, что утверждение x — ложно, то тогда свидетельство будет содержать в своей записи отрицание этой атомарной пропозиции: $\langle\bar{x}\rangle$.

Кортеж детерминированных свидетельств состоит из цепи элементарных свидетельств. Например, $\langle x_1x_2\rangle$, или $\langle x_1\bar{x}_2\rangle$, или $\langle\bar{x}_1x_2\rangle$, или $\langle\bar{x}_1\bar{x}_2\rangle$, или $\langle x_1x_2x_3\rangle$ и т.д. Запись кортежа детерминированных свидетельств может приобретать вид $\langle X\rangle$, что служит сокращением для более длинной записи $\langle X\rangle = \langle x_1x_2\ldots x_m\rangle$. Аналогично, $\langle\widetilde{X}\rangle = \langle\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_m\rangle$. В последнем случае мы подчёркиваем, что нас интересует некоторое означивание цепочки конъюнкций X, рассматриваемое в качестве поступившего свидетельства. Такое обозначение чаще всего используется в формулах для пропагации недетерминированных свидетельств или их кортежей.

Недетерминированное свидетельство характеризуется апостериорной вероятностью своей истинности. В этом случае запись свидетельства выглядит следующим образом: $\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\rangle$; то есть мы знаем апостериорную оценку вероятности всех двух означиваний $\widetilde{x}$.

Кортеж недетерминированных свидетельств характеризуется апостериорным распределением вероятностей конъюнкций означиваний атомарных пропозициональных формул, входящих в кортеж. Формальная запись кортежа недетерминированных свидетельств $\langle p_{[a]}(\widetilde{X})\rangle$ или, что одно и то же, $\langle p_{[a]}(\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_m)\rangle$, т.е. мы знаем апостериорную оценку вероятности всех двух означиваний $\widetilde{X} = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_m$. Заметим, что соответствующее распределение вероятностей может быть задано на идеале вида $C(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ в виде точечных оценок и, как правило, именно так и задаётся. Кроме того, подчеркнём, что апостериорное распределение вероятностей характеризует связи между элементарными свидетельствами и между наборами элементарных свидетельств. Возможность учитывать такие зависимости является важным свойством аппарата, а также сказывается на результатах апостериорного вывода. Распределение на идеале должно быть непротиворечивым.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Если же представить себе семейство апостериорных распределений вида $\Pr_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]=\Pr_{[a]}\left[\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_m\right]$, заданное на идеале $C(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ интервальными оценками вероятностей — обязательно непротиворечивыми, то тогда мы получим кортеж недетерминированных свидетельств с неопределённостью (и, как частный случай, отдельное недетерминированное свидетельство с неопределенностью). Такой кортеж запишется в виде $\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in\Pr_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle$ или в более подробном виде, что, впрочем, одно и то же: $\left\langle p_{[a]}(\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_m)\in\Pr_{[a]}\left[\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2\ldots\widetilde{x}_m\right]\right\rangle$. Существенно, что получающееся семейство апостериорных распределений вероятностей выпуклое и задаётся множеством линейных ограничений ранее рассмотренного вида $R^{\wedge,n}=E^{\wedge,n}\cup D^{\wedge,n}$.

Для краткой записи произвольного свидетельства или кортежа свидетельств будем пользоваться обозначением $\langle\langle\ \rangle\rangle$.

Первой задачей апостериорного вывода является оценка вероятности или ожидаемой вероятности появления свидетельства или кортежа свидетельств над заданным ФЗ C или заданной БФЗ N_{KPB}: $p\left(\langle\langle\ \rangle\rangle\mid C\right)$ и соответственно $p\left(\langle\langle\ \rangle\rangle\mid N_{KPB}\right)$. Результаты первой задачи можно использовать [1, 3], например, в формуле Байеса, если у нас есть несколько классов ситуаций, описанных ФЗ или БФЗ, которым [классам] присвоено априорное распределение вероятностей.

Второй задачей апостериорного вывода является оценка апостериорной вероятности или ожидаемой апостериорной вероятности цепочек конъюнкций ранее определённого вида Z_Y, входящих в ФЗ или БФЗ, но не имеющих общих атомарных пропозиций с поступившим свидетельством или кортежем свидетельств: $p_a\left(Z_Y\mid\langle\langle\ \rangle\rangle\right)$.

9. Апостериорный вывод в ФЗ при детерминированных свидетельствах[3]

Изложение в настоящем разделе будет строиться на основе разбора примеров. Обобщение и формализация примеров будет произведена ниже, в предназначенном для этой цели разделе работы.

Рассмотрим случай ФЗ C над атомарными пропозициями из цепочки xY. Обозначим символом p априорное распределение вероятностей над C. Предположим, что вероятности всех элементов C заданы точечно и непротиворечиво, и поступило детерминированное свидетельство $\langle x\rangle$. В этом случае первая задача апостериорного вывода решается с помощью формулы

$$p\left(\langle x\rangle\mid C\right)=p(x).$$

[3] Вклад второго автора в настоящую работу, ставший частью этого раздела, заключается в идее формального преобразования [7] рассматриваемых в этом разделе задач гиперболического программирования над идеалами цепочек конъюнкций 2-го и 3-го порядков с использованием замены переменных вида $\xi=p(X)^{-1}$ в задачи линейного программирования.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Вторая задача апостериорного вывода решается на основе формулы для расчёта условной вероятности (обязательно с учётом особого случая $p(x)=0$, рассмотренного выше в специальном разделе):

$$p_a\left(Z_Y \mid \langle x\rangle\right)=\frac{p(xZ_Y)}{p(x)}.$$

Получившаяся апостериорная вероятность будет точечной, за исключением указанного особого случая.

Пусть при тех же условиях поступило детерминированное свидетельство $\langle\overline{x}\rangle$. Формулы для решения первой и второй задачи апостериорного вывода будут:

$$p\left(\langle\overline{x}\rangle \mid C\right)=p(\overline{x})=1-p(x);$$

$$p_a\left(Z_Y \mid \langle\overline{x}\rangle\right)=\frac{p(\overline{x}Z_Y)}{p(\overline{x})}=\frac{p(Z_Y)-p(xZ_Y)}{1-p(x)}.$$

В общем случае, для отдельного свидетельства произвольного означивания $\langle\widetilde{x}\rangle$ формулы приобретут вид:

$$p\left(\langle\widetilde{x}\rangle \mid C\right)=p(\widetilde{x});$$

$$p_a\left(Z_Y \mid \langle\widetilde{x}\rangle\right)=\frac{p(\widetilde{x}Z_Y)}{p(\widetilde{x})}.$$

Напомним, что в случае возникновения особой ситуации $p(\widetilde{x})=0$, апостериорная вероятность цепочек Z_Y становится неопределённой: $\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \langle\widetilde{x}\rangle\right)=[0;1]$.

Вслед за [1, 3] заметим, что как в случае отдельного детерминированного свидетельства, та и в случае кортежа детерминированных свидетельств можно «переобозначить» элементы ФЗ таким образом, чтобы поступившее детерминированное свидетельство или кортеж детерминированных свидетельств можно было бы считать построенными над положительно-означенными атомарными пропозициями.

В случае детерминированного свидетельства и точечных оценок вероятностей элементов во фрагменте знаний перерасчёт можно вести по формуле:

$$p(\overline{x}Z_Y)=p(Z_Y)-p(xZ_Y).$$

В случае кортежа детерминированных свидетельств $\left\langle X_+\overline{X}_-\right\rangle$ будет применяться эта же формула для перерасчёта последовательно, пока не исчерпаются все атомарные пропозиции, вошедшие в отрицательно-означенную часть кортежа детерминированных свидетельств $\overline{X}_-$.

Описав процесс переобозначения, мы можем считать, что на вход нам поступают лишь положительно-означенные свидетельства и кортежи детерминированных свидетельств. Соответственно, мы ограничим рассмотрение некоторых видов апостериорного вывода только ими.

Пусть при тех же условиях и сделанных переобозначениях поступил кортеж детерминированных свидетельств $\langle X\rangle$. Тогда первая и вторая задачи апостериорного вывода будут решены с помощью формул:

$$p(\langle X\rangle \,|\, C) = p(X);$$

$$p_a(Z_Y \,|\, \langle X\rangle) = \frac{p(XZ_Y)}{p(X)}.$$

Предположим теперь, что оценки вероятностей элементов ФЗ могут быть как точечные так и интервальные. Мы можем продолжать считать, что на вход поступают лишь положительно-означенные детерминированные свидетельства и кортежи детерминированных свидетельств, поскольку переобозначение элементов ФЗ можно произвести на основе априорного вывода нижних и верхних оценок истинности «новых элементов» ФЗ $p^-\left(X_+\overline{X}_-Z_Y\right)$ и $p^+\left(X_+\overline{X}_-Z_Y\right)$. Вероятность $p\left(X_+\overline{X}_-Z_Y\right)$ выражается через вероятности исходных элементов ФЗ C по линейной формуле включений-исключений. Более того, означивание кванта $X_+\overline{X}_-Z_Y$ соответствует определенному значению индекса в формулах, приведенных в начале работы; это позволит воспользоваться указными формулами для построения целевого функционала задач линейного программирования, возникающих при работе с переобозначением атомарных пропозиций, входящих в элементы фрагмента знаний C. Процесс переобозначения подробнее рассмотрен в [3, 8, 9].

Пример 6. Рассмотрим фрагмент знаний второго порядка $C = \{x_1, x_2, x_1x_2\}$, построенный над $A = \{x_1, x_2\}$. Заданы непротиворечивые интервальные оценки истинности элементов фрагмента знаний $D^{\wedge,2}$:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1^- \le p(x_1) \le p_1^+, \\ p_2^- \le p(x_2) \le p_2^+, \\ p_{12}^- \le p(x_1x_2) \le p_{12}^+ \end{array}\right\}.$$

На вход поступает детерминированное свидетельство $\langle x_1\rangle$. Для особого случая $p(x_1) = 0$ результаты апостериорного вывода у нас уже рассмотрены. Мы будем предполагать, что $p(x_1)$ либо имеет точечное значение, отличное от нуля, либо имеет интервальную оценку с различающейся верхней и нижней границей. Эта интервальная оценка в качестве нижней границы может содержать ноль.

Первая задача апостериорного вывода будет иметь простой ответ, выражающийся интервальной оценкой вероятности свидетельства над данным ФЗ:

$$\mathbf{p}(\langle x_1\rangle \,|\, C) = \mathbf{p}(x_1),$$

$$p^-(x_1) \le p(\langle x_1\rangle \,|\, C) \le p^+(x_1).$$

Вторая задача апостериорного вывода сводится к решению задач гиперболического программирования вида:

$$p^-(x_2 \,|\, \langle x_1\rangle) = \min_{R^{\wedge,2}}\left\{\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)}\right\};$$

$$p^+(x_2 \,|\, \langle x_1\rangle) = \max_{R^{\wedge,2}}\left\{\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)}\right\}.$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Покажем, что возникшие экстремальные задачи сводятся к задачам линейного программирования. Впервые этот переход был предложен в [7].

Введём величину $\xi = \dfrac{1}{p(x_1)}$. При сделанных предположениях она строго положительна; более того $\xi \in [1;+\infty[$. Помножим неравенства из множества $R^{\wedge,2} = E^{\wedge,2} \cup D^{\wedge,2}$, соответствующего рассматриваемому фрагменту знаний, на переменную ξ. Неравенства не поменяют знак, поскольку ξ строго положительна. Произведём замену переменных $d(f) = \xi \cdot p(f)$. Отметим, что $d(x_1) = 1$. В получившееся множество неравенств включим дополнительный элемент — линейное неравенство $\xi \geq 1$. Получившееся множество неравенств назовём $R_d^{\wedge,2}$.

$$\left\{\begin{array}{l} p(x_1x_2) \geq 0, \\ p(x_1) - p(x_1x_2) \geq 0, \\ p(x_2) - p(x_1x_2) \geq 0, \\ 1 - p(x_1) - p(x_2) + p(x_1x_2) \geq 0, \\ p_1^- \leq p(x_1) \leq p_1^+, \\ p_2^- \leq p(x_2) \leq p_2^+, \\ p_{12}^- \leq p(x_1x_2) \leq p_{12}^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \xi \cdot p(x_1x_2) \geq 0, \\ \xi \cdot p(x_1) - \xi \cdot p(x_1x_2) \geq 0, \\ \xi \cdot p(x_2) - \xi \cdot p(x_1x_2) \geq 0, \\ \xi \cdot 1 - \xi \cdot p(x_1) - \xi \cdot p(x_2) + \xi \cdot p(x_1x_2) \geq 0, \\ \xi \cdot p_1^- \leq \xi \cdot p(x_1) \leq \xi \cdot p_1^+, \\ \xi \cdot p_2^- \leq \xi \cdot p(x_2) \leq \xi \cdot p_2^+, \\ \xi \cdot p_{12}^- \leq \xi \cdot p(x_1x_2) \leq \xi \cdot p_{12}^+ \end{array}\right\};$$

$$R_d^{\wedge,2} = \left\{\begin{array}{l} \xi \geq 1, \\ d(x_1x_2) \geq 0, \\ 1 - d(x_1x_2) \geq 0, \\ d(x_2) - d(x_1x_2) \geq 0, \\ \xi - 1 - d(x_2) + d(x_1x_2) \geq 0, \\ \xi \cdot p_1^- \leq 1, \;\; 1 \leq \xi \cdot p_1^+, \\ \xi \cdot p_2^- \leq d(x_2), \;\; d(x_2) \leq \xi \cdot p_2^+, \\ \xi \cdot p_{12}^- \leq d(x_1x_2), \;\; d(x_1x_2) \leq \xi \cdot p_{12}^+ \end{array}\right\}.$$

Отметим, что получившееся множество $R_d^{\wedge,2}$ линейно относительно содержащихся в нём переменных вида $d(f)$ и ξ. При такой замене переменных задачи гиперболического программирования свелись к задачам линейного программирования:

$$p^-(x_2 \mid \langle x_1 \rangle) = \min_{R_d^{\wedge,2}} \{d(x_1x_2)\};$$

$$p^+(x_2 \mid \langle x_1 \rangle) = \max_{R_d^{\wedge,2}} \{d(x_1x_2)\}. \bullet$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Пример 7. Рассмотрим построенный над $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ фрагмент знаний третьего порядка $C = \{x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$. Заданы непротиворечивые интервальные оценки истинности элементов фрагмента знаний $D^{\wedge,3}$:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1^- \le p(x_1) \le p_1^+, \\ p_2^- \le p(x_2) \le p_2^+, \\ p_3^- \le p(x_3) \le p_3^+, \\ p_{12}^- \le p(x_1x_2) \le p_{12}^+, \\ p_{13}^- \le p(x_1x_3) \le p_{13}^+, \\ p_{23}^- \le p(x_2x_3) \le p_{23}^+, \\ p_{123}^- \le p(x_1x_2x_3) \le p_{123}^+ \end{array}\right\}.$$

На вход поступает детерминированное свидетельство $\langle x_1 \rangle$. Для особого случая $p(x_1) = 0$ результаты апостериорного вывода у нас уже рассмотрены. Мы будем предполагать, что $p(x_1)$ либо имеет точечное значение, отличное от нуля, либо имеет интервальную оценку с различающейся верхней и нижней границей. Эта интервальная оценка в качестве нижней границы может содержать ноль.

Первая задача апостериорного вывода снова будет иметь простой ответ, выражающийся интервальной оценкой вероятности свидетельства над данным ФЗ:

$$\mathbf{p}(\langle x_1 \rangle \mid C) = \mathbf{p}(x_1),$$
$$p^-(x_1) \le p(\langle x_1 \rangle \mid C) \le p^+(x_1).$$

Вторая задача апостериорного вывода сводится к решению серии задач гиперболического программирования вида:

$$p^-(Z \mid \langle x_1 \rangle) = \min_{R^{\wedge,3}} \left\{ \frac{p(x_1Z)}{p(x_1)} \right\};$$
$$p^+(Z \mid \langle x_1 \rangle) = \max_{R^{\wedge,3}} \left\{ \frac{p(x_1Z)}{p(x_1)} \right\};$$
$$Z \in \{x_2, x_3, x_2x_3\}.$$

Покажем, что возникшие экстремальные задачи снова сводятся к задачам линейного программирования. Введём величину $\xi = \dfrac{1}{p(x_1)}$. При сделанных предположениях она строго положительна; более того $\xi \in [1;+\infty[$. Помножим неравенства из множества $R^{\wedge,3} = E^{\wedge,3} \cup D^{\wedge,3}$, соответствующего рассматриваемому фрагменту знаний, на переменную ξ. Неравенства не поменяют знак, поскольку ξ строго положительна. Произведём замену переменных $d(f) = \xi \cdot p(f)$. Отметим, что $d(x_1) = 1$. В получившееся множество неравенств включим дополнительный элемент — линейное неравенство $\xi \ge 1$.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Преобразования выделены в Формулу 1. Получившееся множество неравенств назовём $R_d^{\wedge,3}$.

$$
R_d^{\wedge,3} = \left\{
\begin{array}{l}
\xi \geq 1, \\
d(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
d(x_1x_2) - d(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
d(x_1x_3) - d(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
1 - d(x_1x_2) - d(x_1x_3) + d(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
d(x_2x_3) - d(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
d(x_2) - d(x_1x_2) - d(x_2x_3) + d(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
d(x_3) - d(x_1x_3) - d(x_2x_3) + d(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
\xi - 1 - d(x_2) - d(x_3) + d(x_1x_2) + d(x_1x_3) + d(x_2x_3) - d(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
\xi \cdot p_1^- \leq 1,\ 1 \leq \xi \cdot p_1^+, \\
\xi \cdot p_2^- \leq d(x_2),\ \ d(x_2) \leq \xi \cdot p_2^+, \\
\xi \cdot p_3^- \leq d(x_3),\ \ d(x_3) \leq \xi \cdot p_3^+, \\
\xi \cdot p_{12}^- \leq d(x_1x_2),\ \ d(x_1x_2) \leq \xi \cdot p_{12}^+, \\
\xi \cdot p_{13}^- \leq d(x_1x_3),\ \ d(x_1x_3) \leq \xi \cdot p_{13}^+, \\
\xi \cdot p_{23}^- \leq d(x_2x_3),\ \ d(x_2x_3) \leq \xi \cdot p_{23}^+, \\
\xi \cdot p_{123}^- \leq d(x_1x_2x_3),\ \ d(x_1x_2x_3) \leq \xi \cdot p_{123}^+.
\end{array}
\right\}
$$

Вторая задача апостериорного вывода в случае фрагмента знаний третьего порядка сводится к решению серии задач линейного программирования вида:

$$
p^-(Z \mid \langle x_1 \rangle) = \min_{R_d^{\wedge,3}} \{d(Z)\},
$$

$$
p^+(Z \mid \langle x_1 \rangle) = \max_{R_d^{\wedge,3}} \{d(Z)\},
$$

$$
Z \in \{x_2, x_3, x_2x_3\}. \bullet
$$

Пример 8. Снова рассмотрим построенный над

$$
A = \{x_1, x_2, x_3\}
$$

фрагмент знаний третьего порядка

$$
C = \{x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\}.
$$

В отличие от предыдущего примера на вход поступает кортеж детерминированных свидетельств $\langle x_1x_2 \rangle$. Для особого случая $p(x_1x_2) = 0$ результаты апостериорного вывода у нас уже рассмотрены. Мы будем предполагать, что $p(x_1x_2)$ либо имеет точечное значение, отличное от нуля, либо имеет интервальную оценку с различающейся верхней и нижней границей. Эта интервальная оценка в качестве нижней границы может содержать ноль.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$
\left\{
\begin{array}{l}
p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_1x_2) - p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_1x_3) - p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_1) - p(x_1x_2) - p(x_1x_3) + p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_2x_3) - p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_2) - p(x_1x_2) - p(x_2x_3) + p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_3) - p(x_1x_3) - p(x_2x_3) + p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
1 - p(x_1) - p(x_2) - p(x_3) + \\
\quad + p(x_1x_2) + p(x_1x_3) + p(x_2x_3) - p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p_1^- \leq p(x_1) \leq p_1^+, \\
p_2^- \leq p(x_2) \leq p_2^+, \\
p_3^- \leq p(x_3) \leq p_3^+, \\
p_{12}^- \leq p(x_1x_2) \leq p_{12}^+, \\
p_{13}^- \leq p(x_1x_3) \leq p_{13}^+, \\
p_{23}^- \leq p(x_2x_3) \leq p_{23}^+, \\
p_{123}^- \leq p(x_1x_2x_3) \leq p_{123}^+
\end{array}
\right\}
\Rightarrow
\left\{
\begin{array}{l}
\xi \geq 1, \\
\xi \cdot p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
\xi \cdot p(x_1x_2) - \xi \cdot p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
\xi \cdot p(x_1x_3) - \xi \cdot p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
\xi \cdot p(x_1) - \xi \cdot p(x_1x_2) - \xi \cdot p(x_1x_3) + \xi \cdot p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
\xi \cdot p(x_2x_3) - \xi \cdot p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
\xi \cdot p(x_2) - \xi \cdot p(x_1x_2) - \xi \cdot p(x_2x_3) + \xi \cdot p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
\xi \cdot p(x_3) - \xi \cdot p(x_1x_3) - \xi \cdot p(x_2x_3) + \xi \cdot p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
\xi \cdot 1 - \xi \cdot p(x_1) - \xi \cdot p(x_2) - \xi \cdot p(x_3) + \\
\quad + \xi \cdot p(x_1x_2) + \xi \cdot p(x_1x_3) + \xi \cdot p(x_2x_3) - \xi \cdot p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
\xi \cdot p_1^- \leq \xi \cdot p(x_1) \leq \xi \cdot p_1^+, \\
\xi \cdot p_2^- \leq \xi \cdot p(x_2) \leq \xi \cdot p_2^+, \\
\xi \cdot p_3^- \leq \xi \cdot p(x_3) \leq \xi \cdot p_3^+, \\
\xi \cdot p_{12}^- \leq \xi \cdot p(x_1x_2) \leq \xi \cdot p_{12}^+, \\
\xi \cdot p_{13}^- \leq \xi \cdot p(x_1x_3) \leq \xi \cdot p_{13}^+, \\
\xi \cdot p_{23}^- \leq \xi \cdot p(x_2x_3) \leq \xi \cdot p_{23}^+, \\
\xi \cdot p_{123}^- \leq \xi \cdot p(x_1x_2x_3) \leq \xi \cdot p_{123}^+
\end{array}
\right\}.
$$

Формула 1. Замена переменных во множестве $R^{\wedge,3}$

Заданы непротиворечивые интервальные оценки истинности элементов фрагмента знаний $D^{\wedge,3}$:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1^- \le p(x_1) \le p_1^+, \\ p_2^- \le p(x_2) \le p_2^+, \\ p_3^- \le p(x_3) \le p_3^+, \\ p_{12}^- \le p(x_1x_2) \le p_{12}^+, \\ p_{13}^- \le p(x_1x_3) \le p_{13}^+, \\ p_{23}^- \le p(x_2x_3) \le p_{23}^+, \\ p_{123}^- \le p(x_1x_2x_3) \le p_{123}^+ \end{array}\right\}.$$

Первая задача апостериорного вывода в третий раз будет иметь простой ответ, выражающийся интервальной оценкой вероятности свидетельства над данным ФЗ:

$$\mathbf{p}(\langle x_1x_2\rangle \mid C) = \mathbf{p}(x_1x_2),$$

$$p^-(x_1x_2) \le p(\langle x_1x_2\rangle \mid C) \le p^+(x_1x_2).$$

Вторая задача апостериорного вывода сводится к решению серии задач гиперболического программирования вида (формулу оставим в более общем виде, чем могло бы потребоваться — это удобно для подготовки к восприятию последующих обобщений):

$$p^-(Z \mid \langle x_1x_2\rangle) = \min_{R^{\wedge,3}}\left\{\frac{p(x_1x_2Z)}{p(x_1x_2)}\right\};$$

$$p^+(Z \mid \langle x_1x_2\rangle) = \max_{R^{\wedge,3}}\left\{\frac{p(x_1x_2Z)}{p(x_1x_2)}\right\};$$

$$Z \in \{x_3\}.$$

Покажем, что возникшие экстремальные задачи снова сводятся к задачам линейного программирования[4].

Введём величину $\xi = \dfrac{1}{p(x_1x_2)}$. При сделанных предположениях она строго положительна; более того $\xi \in [1;+\infty[$. Помножим неравенства из множества $R^{\wedge,3} = E^{\wedge,3} \cup D^{\wedge,3}$, соответствующего рассматриваемому фрагменту знаний, на переменную ξ.

Неравенства не поменяют знак, поскольку ξ строго положительна. Произведём замену переменных $d(f) = \xi \cdot p(f)$.

Отметим, что $d(x_1x_2) = 1$.

В получившееся множество неравенств включим дополнительный элемент — линейное неравенство $\xi \ge 1$.

[4] Мы опускаем в этом примере часть вывода по формированию множества линейных ограничений через замену переменных. Этот вывод практически совпадает с выводом примера 7. Его основная часть представлена в Формуле 1.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Основные преобразования снова выделены в отдельную Формулу 1. Получившееся множество неравенств назовём $R^{\wedge,3}_{d<x_1x_2>}$.

$$R^{\wedge,3}_{d<x_1x_2>} = \left\{ \begin{array}{l} \xi \ge 1, \\ d(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ 1 - d(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ d(x_1x_3) - d(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ d(x_1) - 1 - d(x_1x_3) + d(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ d(x_2x_3) - d(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ d(x_2) - 1 - d(x_2x_3) + d(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ d(x_3) - d(x_1x_3) - d(x_2x_3) + d(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ \xi - d(x_1) - d(x_2) - d(x_3) + 1 + d(x_1x_3) + d(x_2x_3) - d(x_1x_2x_3) \ge 0, \\ \xi \cdot p_1^- \le d(x_1), \;\; d(x_1) \le \xi \cdot p_1^+, \\ \xi \cdot p_2^- \le d(x_2), \;\; d(x_2) \le \xi \cdot p_2^+, \\ \xi \cdot p_3^- \le d(x_3), \;\; d(x_3) \le \xi \cdot p_3^+, \\ \xi \cdot p_{12}^- \le 1, \;\; 1 \le \xi \cdot p_{12}^+, \\ \xi \cdot p_{13}^- \le d(x_1x_3), \;\; d(x_1x_3) \le \xi \cdot p_{13}^+, \\ \xi \cdot p_{23}^- \le d(x_2x_3), \;\; d(x_2x_3) \le \xi \cdot p_{23}^+, \\ \xi \cdot p_{123}^- \le d(x_1x_2x_3), \;\; d(x_1x_2x_3) \le \xi \cdot p_{123}^+ \end{array} \right\}.$$

Вторая задача апостериорного вывода в случае фрагмента знаний третьего порядка и двулитерного кортежа детерминированных свидетельств сводится к решению серии задач линейного программирования вида:

$$p^-(Z \mid \langle x_1x_2 \rangle) = \min_{R^{\wedge,3}_{d<x_1x_2>}} \{d(Z)\};$$

$$p^+(Z \mid \langle x_1x_2 \rangle) = \max_{R^{\wedge,3}_{d<x_1x_2>}} \{d(Z)\};$$

$$Z \in \{x_3\}. \bullet$$

Отметим, что в примере 8 мы разобрали только кортеж положительно-означенных детерминированных свидетельств. В случае другого означивания свидетельств следовало бы применить алгоритм переобозначения элементов идеала цепочек конъюнкций.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

10. Апостериорный вывод в ФЗ при недетерминированных свидетельствах

Основная идея апостериорного вывода при недетерминированных свидетельствах и их кортежах — искать *ожидаемые оценки*, или, что более строго, искать *математическое ожидание* (верхние и нижние границы математического ожидания — если в свидетельстве или их кортеже помимо недетерминированности присутствует ещё и интервальная неопределённость) этих *оценок*.

В качестве распределения вероятности случайной величины выступает распределение вероятностей над недетерминированным свидетельством или их кортежем.

В качестве значений случайной величины выступают априорные (первая задача) и апостериорные (вторая задача) вероятности, которые получаются при переборе всех означиваний свидетельства или кортежа свидетельств.

Означивания в данном случае рассматриваются как детерминированные свидетельства или их кортежи. Но, при этом, на означиваниях уже задана вероятность $p_{[a]}$ (или семейство вероятностей $\mathrm{Pr}_{[a]}$). Такой подход был предложен в [9].

Подчеркнём, что на данный момент мы уже знаем как с помощью задач линейного программирования рассчитывать следующие величины: точечную оценку $p(\langle\langle\ \rangle\rangle \mid C)$, нижнюю границу интервальной оценки $p^{-}(\langle\langle\ \rangle\rangle \mid C)$, верхнюю границу интервальной оценки $p^{+}(\langle\langle\ \rangle\rangle \mid C)$, интервальную оценку $\mathbf{p}(\langle\langle\ \rangle\rangle \mid C)$; точечную оценку $p_a(Z_Y \mid \langle\langle\ \rangle\rangle)$, нижнюю границу интервальной оценки $p_a^{-}(Z_Y \mid \langle\langle\ \rangle\rangle)$, верхнюю границу интервальной оценки $p_a^{+}(Z_Y \mid \langle\langle\ \rangle\rangle)$, интервальную оценку $\mathbf{p}_a(Z_Y \mid \langle\langle\ \rangle\rangle)$ — как в точечном, так и в интервальном случае исходных оценок в ФЗ, если мы имеем детерминированное свидетельство или их кортеж $\langle\langle\ \rangle\rangle$.

Пусть задан фрагмент знаний C, на вход которого поступило недетерминированное свидетельство $\langle p_{[a]}(\tilde{x})\rangle$.

В случае точеных оценок вероятностей рассмотрим случайные величины $\hat{p}(\langle p_{[a]}(\tilde{x})\rangle \mid C)$ и $\hat{p}_a(Z_Y \mid \langle p_{[a]}(\tilde{x})\rangle)$. Это — дискретные случайные величины. Опишем законы распределения их значений.

$\hat{p}(\langle p_{[a]}(\tilde{x})\rangle \mid C)$ принимает значения $p(\langle\tilde{x}\rangle \mid C)$ с вероятностью $p_{[a]}(\tilde{x})$. Означивания $\tilde{x}$ в двух последних формулах связаны. Отметим, что $p_{[a]}(\tilde{x})$ известна, а способ расчёта величин $p(\langle\tilde{x}\rangle \mid C)$ описан — это первая задача апостериорного вывода при детерминированном свидетельстве.

$\hat{p}_a(Z_Y \mid \langle p_{[a]}(\tilde{x})\rangle)$ принимает значения $p_a(Z_Y \mid \langle\tilde{x}\rangle)$ с вероятностью $p_{[a]}(\tilde{x})$. Означивания $\tilde{x}$ в двух последних формулах связаны. Отметим, что $p_{[a]}(\tilde{x})$ известна, а способ расчёта величин $p_a(Z_Y \mid \langle\tilde{x}\rangle)$ описан — это вторая задача апостериорного вывода при детерминированном свидетельстве.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Решением первой задачи апостериорного вывода при недетерминированном свидетельстве является математическое ожидание соответствующей случайной величины:

$$p\left(\left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle \mid C\right)=\mathbf{E}\hat{p}\left(\left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle \mid C\right);$$

$$p\left(\left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle \mid C\right)=\sum_{\widetilde{x}} p\left(\left\langle \widetilde{x}\right\rangle \mid C\right)p_{[a]}(\widetilde{x}),$$

и решением второй задачи апостериорного вывода является также математическое ожидание:

$$p_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle\right)=\mathbf{E}\hat{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle\right);$$

$$p_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle\right)=\sum_{\widetilde{x}} p_a\left(Z_Y \mid \left\langle \widetilde{x}\right\rangle\right)p_{[a]}(\widetilde{x}).$$

Отметим, что получающееся *ожидаемое* распределение вероятностей над цепочками Z_Y непротиворечиво, поскольку является линейной комбинацией по $p_{[a]}(\widetilde{x})$ — неотрицательным нормированным на единицу весам других непротиворечивых распределений вероятностей над этими цепочками [8, 9].

В случае интервальных оценок в фрагменте знаний мы будем рассматривать случайные элементы, значением которых является замкнутый промежуток — интервальная оценка истинности цепочки конъюнкций. Фактически, мы будем работать со случайными величинами, представляющими собой верхние и нижние границы указанных замкнутых промежутков.

Итак, в случае интервальных оценок вероятностей рассмотрим случайные элементы $\hat{\mathbf{p}}\left(\left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle \mid C\right)$ и $\hat{\mathbf{p}}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle\right)$. Это — дискретные случайные элементы. Опишем законы распределения их значений.

$\hat{\mathbf{p}}\left(\left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle \mid C\right)$ принимает значения $\mathbf{p}\left(\left\langle \widetilde{x}\right\rangle \mid C\right)$ с вероятностью $p_{[a]}(\widetilde{x})$. Означивания $\widetilde{x}$ в двух последних формулах связаны. Отметим, что $p_{[a]}(\widetilde{x})$ известна, а способ расчёта величин $\mathbf{p}\left(\left\langle \widetilde{x}\right\rangle \mid C\right)$ описан — это первая задача апостериорного вывода при детерминированном свидетельстве.

$\hat{\mathbf{p}}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle\right)$ принимает значения $\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle \widetilde{x}\right\rangle\right)$ с вероятностью $p_{[a]}(\widetilde{x})$. Означивания $\widetilde{x}$ в двух последних формулах связаны. Отметим, что $p_{[a]}(\widetilde{x})$ известна, а способ расчёта величин $\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle \widetilde{x}\right\rangle\right)$ описан — это вторая задача апостериорного вывода при детерминированном свидетельстве.

Решением первой задачи апостериорного вывода при недетерминированном свидетельстве является математическое ожидание соответствующего случайного элемента:

$$\mathbf{p}\left(\left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle \mid C\right)=\mathbf{E}\hat{\mathbf{p}}\left(\left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle \mid C\right);$$

$$\mathbf{p}\left(\left\langle p_{[a]}(\widetilde{x})\right\rangle \mid C\right)=\left[\sum_{\widetilde{x}} p^{-}\left(\left\langle \widetilde{x}\right\rangle \mid C\right)p_{[a]}(\widetilde{x});\ \sum_{\widetilde{x}} p^{+}\left(\left\langle \widetilde{x}\right\rangle \mid C\right)p_{[a]}(\widetilde{x})\right],$$

и решением второй задачи апостериорного вывода является также математическое ожидание:

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{x})\right\rangle\right) = \mathbf{E}\hat{\mathbf{p}}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{x})\right\rangle\right);$$

$$\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{x})\right\rangle\right) = \left[\sum_{\tilde{x}} p_a^-(Z_Y \mid \tilde{x}) p_{[a]}(\tilde{x});\ \sum_{\tilde{x}} p_a^+(Z_Y \mid \tilde{x}) p_{[a]}(\tilde{x})\right].$$

Отметим, что получающееся *ожидаемое* распределение интервальных оценок вероятностей над цепочками Z_Y непротиворечиво, поскольку является линейной комбинацией по неотрицательным нормированным на единицу весам других непротиворечивых распределений интервальных оценок вероятностей над этими цепочками [8, 9].

Пусть задан фрагмент знаний C, на вход которого поступил кортеж недетерминированных свидетельств $\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle$.

В случае точеных оценок вероятностей рассмотрим случайные величины $\hat{p}\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle \mid C\right)$ и $\hat{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle\right)$. Это — дискретные случайные величины. Опишем законы распределения их значений.

$\hat{p}\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle \mid C\right)$ принимает значения $p\left(\left\langle \tilde{X}\right\rangle \mid C\right)$ с вероятностью $p_{[a]}(\tilde{X})$. Означивания $\tilde{X}$ в двух последних формулах связаны. Отметим, что распределение $p_{[a]}(\tilde{X})$ известно, а способ расчёта величин $p\left(\left\langle \tilde{X}\right\rangle \mid C\right)$ — описан: это — первая задача апостериорного вывода при кортеже детерминированных свидетельств.

$\hat{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle\right)$ принимает значения $p_a\left(Z_Y \mid \left\langle \tilde{X}\right\rangle\right)$ с вероятностью $p_{[a]}(\tilde{X})$. Означивания $\tilde{X}$ в двух последних формулах связаны. Отметим, что распределение $p_{[a]}(\tilde{X})$ известно, а способ расчёта величин $p_a\left(Z_Y \mid \left\langle \tilde{X}\right\rangle\right)$ — описан: это — вторая задача апостериорного вывода при кортеже детерминированных свидетельств.

Решением первой задачи апостериорного вывода при кортеже недетерминированных свидетельств является математическое ожидание соответствующей случайной величины:

$$p\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle \mid C\right) = \mathbf{E}\hat{p}\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle \mid C\right);$$

$$p\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle \mid C\right) = \sum_{\tilde{X}} p\left(\left\langle \tilde{X}\right\rangle \mid C\right) p_{[a]}(\tilde{X}),$$

и решением второй задачи апостериорного вывода является также математическое ожидание:

$$p_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle\right) = \mathbf{E}\hat{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle\right);$$

$$p_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle\right) = \sum_{\tilde{X}} p_a\left(Z_Y \mid \left\langle \tilde{X}\right\rangle\right) p_{[a]}(\tilde{X}).$$

Отметим, что получающееся ожидаемое распределение вероятностей над цепочками Z_Y непротиворечиво, поскольку является линейной комбинацией по неотрицательным нормированным на единицу весам ($p_{[a]}(\tilde{X})$) других непротиворечивых распределений вероятностей над этими цепочками [8, 9].

В случае интервальных оценок в фрагменте знаний мы будем рассматривать случайные элементы, значением которых является замкнутый промежуток — интервальная оценка истинности цепочки конъюнкций. Фактически, мы будем работать со случайными величинами, представляющими собой верхние и нижние границы указанных замкнутых промежутков.

Итак, в случае интервальных оценок вероятностей рассмотрим случайные элементы $\hat{\mathbf{p}}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right\rangle \mid C\right)$ и $\hat{\mathbf{p}}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right\rangle\right)$. Это — дискретные случайные элементы. Опишем законы распределения их значений.

$\hat{\mathbf{p}}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right\rangle \mid C\right)$ принимает значения $\mathbf{p}\left(\left\langle \tilde{X}\right\rangle \mid C\right)$ с вероятностью $p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)$. Означивания $\tilde{X}$ в двух последних формулах связаны. Отметим, что распределение $p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)$ известно, а способ расчёта величин $\mathbf{p}\left(\left\langle \tilde{x}\right\rangle \mid C\right)$ описан: это — первая задача апостериорного вывода при кортеже детерминированных свидетельств.

$\hat{\mathbf{p}}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right\rangle\right)$ принимает значения $\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle \tilde{X}\right\rangle\right)$ с вероятностью $p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)$. Означивания $\tilde{X}$ в двух последних формулах связаны. Отметим, что распределение $p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)$ известно: способ расчёта величин $\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle \tilde{X}\right\rangle\right)$ описан: это — вторая задача апостериорного вывода при кортеже детерминированных свидетельств.

Решением первой задачи апостериорного вывода при кортеже недетерминированных свидетельств является математическое ожидание соответствующего случайного элемента:

$$\mathbf{p}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right\rangle \mid C\right) = \mathbf{E}\hat{\mathbf{p}}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right\rangle \mid C\right);$$

$$\mathbf{p}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right\rangle \mid C\right) = \left[\sum_{\tilde{X}} p^{-}\left(\left\langle \tilde{X}\right\rangle \mid C\right) p_{[a]}\left(\tilde{X}\right);\ \sum_{\tilde{X}} p^{+}\left(\left\langle \tilde{X}\right\rangle \mid C\right) p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right],$$

и решением второй задачи апостериорного вывода является также математическое ожидание:

$$\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right\rangle\right) = \mathbf{E}\hat{\mathbf{p}}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right\rangle\right);$$

$$\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right\rangle\right) = \left[\sum_{\tilde{X}} p_a^{-}\left(Z_Y \mid \tilde{X}\right) p_{[a]}\left(\tilde{X}\right);\ \sum_{\tilde{X}} p_a^{+}\left(Z_Y \mid \tilde{X}\right) p_{[a]}\left(\tilde{X}\right)\right].$$

Отметим, что получающееся *ожидаемое* распределение интервальных оценок вероятностей над цепочками Z_Y непротиворечиво, поскольку является линейной комбинацией по неотрицательным нормированным на единицу весам других непротиворечивых распределений интервальных оценок вероятностей над этими цепочками [8, 9].

11. Апостериорный вывод в ФЗ при недетерминированных свидетельствах с неопределённостью

По результатам предыдущего раздела заметим, что величины вида $p_a\left(Z_Y \mid \tilde{X}\right)$, $p_a^{-}\left(Z_Y \mid \tilde{X}\right)$ и $p_a^{+}\left(Z_Y \mid \tilde{X}\right)$ вычисляются с помощью задач линейного программирования. Эти величинами можно считать константами в функциона-

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

лах вида $\sum_{\tilde{X}} p_a(Z_Y \mid \tilde{X}) p_{[a]}(\tilde{X})$, $\sum_{\tilde{X}} p_a^-(Z_Y \mid \tilde{X}) p_{[a]}(\tilde{X})$ и $\sum_{\tilde{X}} p_a^+(Z_Y \mid \tilde{X}) p_{[a]}(\tilde{X})$ над переменными вида $p_{[a]}(\tilde{X})$. При этом указанные функционалы становятся линейными формами; если нам известны линейные ограничения над множеством переменных $p_{[a]}(\tilde{X})$, то тогда мы можем искать максимум и минимум соответствующих функционалов, решая возникающие задачи линейного программирования. Этот приём и лежит в основе апостериорного вывода в случае $\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle$ — недетерминированного свидетельства с неопределённостью, а также в случае $\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{X}] \rangle$ — кортежа недетерминированных свидетельств с неопределенностью. Семейства распределений $\mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}]$ и $\mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{X}]$ как раз и задаются с помощью линейных ограничений, вытекающих из аксиоматики вероятностей и из предметной области, на переменные вида $p_{[a]}(\tilde{x})$ и $p_{[a]}(\tilde{X})$ соответственно.

В случае точечных оценок в исходном фрагменте знаний и одном недетерминированном свидетельстве с неопределенностью решение первой задачи апостериорного вывода достигается с помощью задач линейного программирования вида:

$$p^-(\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle \mid C) = \min_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{ \mathbf{E}\hat{p}(\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \rangle \mid C) \right\};$$

$$p^+(\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle \mid C) = \max_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{ \mathbf{E}\hat{p}(\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \rangle \mid C) \right\};$$

$$p^-(\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle \mid C) = \min_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{ \sum_{\tilde{x}} p(\langle \tilde{x} \rangle \mid C) p_{[a]}(\tilde{x}) \right\};$$

$$p^+(\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle \mid C) = \max_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{ \sum_{\tilde{x}} p(\langle \tilde{x} \rangle \mid C) p_{[a]}(\tilde{x}) \right\},$$

а решение второй задачи — с помощью:

$$p_a^-(Z_Y \mid \langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle) = \min_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{ \mathbf{E}\hat{p}_a(Z_Y \mid \langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle) \right\};$$

$$p_a^+(Z_Y \mid \langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle) = \max_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{ \mathbf{E}\hat{p}_a(Z_Y \mid \langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle) \right\};$$

$$p_a^-(Z_Y \mid \langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle) = \min_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{ \sum_{\tilde{x}} p_a(Z_Y \mid \langle \tilde{x} \rangle) p_{[a]}(\tilde{x}) \right\};$$

$$p_a^+(Z_Y \mid \langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}] \rangle) = \max_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \mathrm{Pr}_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{ \sum_{\tilde{x}} p_a(Z_Y \mid \langle \tilde{x} \rangle) p_{[a]}(\tilde{x}) \right\}.$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

В случае точечных оценок в исходном фрагменте знаний и кортеже недетерминированных свидетельств с неопределенностью решение первой задачи апостериорного вывода достигается с помощью задач линейного программирования вида:

$$p^{-}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle \mid C\right)=\min_{p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]}\left\{\mathbf{E}\hat{p}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\right\rangle \mid C\right)\right\};$$

$$p^{+}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle \mid C\right)=\max_{p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]}\left\{\mathbf{E}\hat{p}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\right\rangle \mid C\right)\right\};$$

$$p^{-}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle \mid C\right)=\min_{p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]}\left\{\sum_{\widetilde{X}} p\left(\left\langle \widetilde{X}\right\rangle \mid C\right)p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\right\};$$

$$p^{+}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle \mid C\right)=\max_{p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]}\left\{\sum_{\widetilde{X}} p\left(\left\langle \widetilde{X}\right\rangle \mid C\right)p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\right\},$$

а решение второй задачи — с помощью:

$$p_a^{-}\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle\right)=\min_{p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]}\left\{\mathbf{E}\hat{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle\right)\right\};$$

$$p_a^{+}\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle\right)=\max_{p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]}\left\{\mathbf{E}\hat{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle\right)\right\};$$

$$p_a^{-}\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle\right)=\min_{p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]}\left\{\sum_{\widetilde{X}} p_a\left(Z_Y \mid \left\langle \widetilde{X}\right\rangle\right)p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\right\};$$

$$p_a^{+}\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]\right\rangle\right)=\max_{p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{X}\right]}\left\{\sum_{\widetilde{X}} p_a\left(Z_Y \mid \left\langle \widetilde{X}\right\rangle\right)p_{[a]}\left(\widetilde{X}\right)\right\}.$$

В случае интервальных оценок в исходном фрагменте знаний и одном недетерминированном свидетельстве с неопределенностью решение первой задачи апостериорного вывода достигается с помощью задач линейного программирования вида:

$$p^{-}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{x}\right]\right\rangle \mid C\right)=\min_{p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{x}\right]}\left\{\mathbf{E}\hat{p}^{-}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\right\rangle \mid C\right)\right\};$$

$$p^{+}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{x}\right]\right\rangle \mid C\right)=\max_{p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{x}\right]}\left\{\mathbf{E}\hat{p}^{+}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\right\rangle \mid C\right)\right\};$$

$$p^{-}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{x}\right]\right\rangle \mid C\right)=\min_{p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{x}\right]}\left\{\sum_{\widetilde{x}} p^{-}\left(\left\langle \widetilde{x}\right\rangle \mid C\right)p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\right\};$$

$$p^{+}\left(\left\langle p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{x}\right]\right\rangle \mid C\right)=\max_{p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\in \mathrm{Pr}_{[a]}\left[\widetilde{x}\right]}\left\{\sum_{\widetilde{x}} p^{+}\left(\left\langle \widetilde{x}\right\rangle \mid C\right)p_{[a]}\left(\widetilde{x}\right)\right\},$$

а решение второй задачи — с помощью:

$$p_a^-\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]\right\rangle\right) = \min_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{\mathbf{E}\hat{p}_a^-\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]\right\rangle\right)\right\};$$

$$p_a^+\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]\right\rangle\right) = \max_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{\mathbf{E}\hat{p}_a^+\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]\right\rangle\right)\right\};$$

$$p_a^-\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]\right\rangle\right) = \min_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{\sum_{\tilde{x}} p_a^-\left(Z_Y \mid \langle\tilde{x}\rangle\right) p_{[a]}(\tilde{x})\right\};$$

$$p_a^+\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]\right\rangle\right) = \max_{p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]} \left\{\sum_{\tilde{x}} p_a^+\left(Z_Y \mid \langle\tilde{x}\rangle\right) p_{[a]}(\tilde{x})\right\}.$$

В случае интервальных оценок в исходном фрагменте знаний и кортеже недетерминированных свидетельств с неопределенностью решение первой задачи апостериорного вывода достигается с помощью задач линейного программирования вида:

$$p^-\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle \mid C\right) = \min_{p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]} \left\{\mathbf{E}\hat{p}^-\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle \mid C\right)\right\};$$

$$p^+\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle \mid C\right) = \max_{p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]} \left\{\mathbf{E}\hat{p}^+\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle \mid C\right)\right\};$$

$$p^-\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle \mid C\right) = \min_{p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]} \left\{\sum_{\tilde{X}} p^-\left(\langle\tilde{X}\rangle \mid C\right) p_{[a]}(\tilde{X})\right\};$$

$$p^+\left(\left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle \mid C\right) = \max_{p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]} \left\{\sum_{\tilde{X}} p^+\left(\langle\tilde{X}\rangle \mid C\right) p_{[a]}(\tilde{X})\right\},$$

а решение второй задачи — с помощью:

$$p_a^-\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle\right) = \min_{p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]} \left\{\mathbf{E}\hat{p}_a^-\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle\right)\right\};$$

$$p_a^+\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle\right) = \max_{p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]} \left\{\mathbf{E}\hat{p}_a^+\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle\right)\right\};$$

$$p_a^-\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle\right) = \min_{p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]} \left\{\sum_{\tilde{X}} p_a^-\left(Z_Y \mid \langle\tilde{X}\rangle\right) p_{[a]}(\tilde{X})\right\};$$

$$p_a^+\left(Z_Y \mid \left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle\right) = \max_{p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]} \left\{\sum_{\tilde{X}} p_a^+\left(Z_Y \mid \langle\tilde{X}\rangle\right) p_{[a]}(\tilde{X})\right\}.$$

12. Формализация апостериорного вывода над идеалом цепочек конъюнкций

Ключевым моментом апостериорного вывода во фрагменте знаний с интервальными оценками истинности его элементов является вычисление оценок вида $\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle \widetilde{X}_e \right\rangle\right)$, т.е. когда апостериорные оценки вычисляются при кортеже детерминированных свидетельств. Формулы предыдущего раздела в значительной степени опираются на этот этап вычислений. Частные случаи решения возникающих экстремальных задач были рассмотрены в разделе 8 настоящей работы; в настоящем же разделе мы приведём формальную запись множества ограничений $R^{\wedge,n}_{d<X_e>}$ в общем случае, используя аппарат индексации цепочек конъюнкций, описанный в начале работы. Отметим, что множество линейных ограничений $R^{\wedge,n}_{d<X_e>}$ строится для поиска минимума и максимума величин $d(Z_Y) = p\left(Z_Y \mid \left\langle \widetilde{X}_e \right\rangle\right)$; при этом

$$\mathbf{p}_a\left(Z_Y \mid \left\langle \widetilde{X}_e \right\rangle\right) = \left[\min_{R^{\wedge,n}_{d<X_e>}} \{d(Z_Y)\};\ \max_{R^{\wedge,n}_{d<X_e>}} \{d(Z_Y)\}\right].$$

Напомним, что в первую очередь элементы ФЗ переименовываются таким образом, что поступающий кортеж детерминированных свидетельств $\left\langle X_e \right\rangle$ содержит только цепочку конъюнкций положительно-означенных атомарных пропозициональных формул X_e.

Выберем индекс ς так, чтобы запись $\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[\varsigma:n]$ задавала бы именно цепочку конъюнкций X_e:

$$\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[\varsigma:n] \equiv X_e.$$

Используя обозначения предыдущих разделов, введём

$$\xi = \frac{1}{p(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[\varsigma:n])}$$

и напомним, что случай равенства знаменателя формулы нулю

$$p(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[\varsigma:n]) = 0$$

при вычислениях рассматривается особым образом. Далее мы предполагаем, что либо $p(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[\varsigma:n]) = p > 0$, либо эта величина имеет интервальную оценку. Указанная интервальная оценка может содержать 0 в качестве нижней границы.

Кроме того, следуя обозначениям предыдущих разделов, определим:

$$d(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[i:n]) = \xi \cdot p(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[i:n]),\quad i = \overline{(2^n-1)(-1)0}$$

и заметим, что

$$d(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[\varsigma:n]) = 1.$$

Множество $R^{\wedge,n}_{d<X_e>}$ будет состоять из четырёх частей, и первая из этих частей будет включать только один элемент:

$$\{\xi \geq 1\}.$$

Вторая часть $R^{\wedge,n}_{d<X_e>}$ будет включать в себя множество ограничений, возникших из исходных ограничений, задаваемых предметной областью (считается, что процесс поддержания непротиворечивости уже был выполнен):

$$\left\{\begin{array}{l}\xi \cdot p^{-}\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right) \leq d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right), \\ d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right) \leq \xi \cdot p^{+}\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right)\end{array}\right\}_{\substack{i=\overline{(2^n-1)(-1)0}, \\ i \neq \varsigma}}$$

Третья часть родственна второй; она вытекает из ограничений предметной области, наложенных на величину $p\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[\varsigma:n]\right)$:

$$\left\{\begin{array}{l}\xi \cdot p^{-}\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right) \leq 1, \\ 1 \leq \xi \cdot p^{+}\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right)\end{array}\right\}_{i=\varsigma}$$

или в более простой записи

$$\left\{\xi \cdot p^{-}\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[\varsigma:n]\right) \leq 1,\ 1 \leq \xi \cdot p^{+}\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[\varsigma:n]\right)\right\}.$$

В четвёртую часть войдут ограничения, получившиеся с помощью замены переменных из неравенств, задаваемых вероятностной аксиоматикой:

$$\bigcup_{j=\overline{(2^n-1)(-1)0}} \left\{ \sum_{\substack{i=\overline{(2^n-1)(-1)0}, \\ j=j \wedge\wedge i}} \left(\sim(i \oplus\oplus j) d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right)\right) \geq 0 \right\},$$

при этом надо учитывать, что исходя из построения множества ограничений (домножения на ξ):

$$d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[\varsigma:n]\right)=1;$$
$$d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[0:n]\right)=\xi.$$

В итоге, объединяя все полученные ограничения и учитывая оговорку выше значениях о $d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[\varsigma:n]\right)$ и $d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[0:n]\right)$, мы можем записать

$$\begin{array}{rll} R_{d<X_e>}^{\wedge,n} & = & \{\xi \geq 1\} \quad \cup \\ & \cup & \left\{\begin{array}{l}\xi \cdot p^{-}\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right) \leq d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right), \\ d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right) \leq \xi \cdot p^{+}\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right)\end{array}\right\}_{i=\overline{(2^n-1)(-1)0},} \quad \cup \\ & \cup & \left\{ \sum_{\substack{i=\overline{(2^n-1)(-1)0}, \\ j=j \wedge\wedge i}} \left(\sim(i \oplus\oplus j) d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[i:n]\right)\right) \geq 0 \right\}_{j=\overline{(2^n-1)(-1)0}} \end{array}$$

при соглашении о подстановке

$$d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[\varsigma:n]\right)=1;$$
$$d\left(\wedge\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)[0:n]\right)=\xi.$$

Отметим, что множество $R_{d<X_e>}^{\wedge,n}$ содержит только линейные ограничения, а получающиеся экстремальные задачи вида $\min\limits_{R_{d<X_e>}^{\wedge,n}} \{d(Z_Y)\}$ и $\max\limits_{R_{d<X_e>}^{\wedge,n}} \{d(Z_Y)\}$ являются задачами линейного программирования.

13. Апостериорный вывод в цепях ФЗ и ациклических АБС

В настоящем разделе мы опишем концепцию распространения влияния свидетельства или кортежа свидетельств в цепи фрагментов знаний и в ациклической байесовской сети, снабдив изложение графическими иллюстрациями.

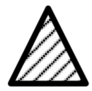
Идея такого распространения была предложена в [1, 3] для цепей фрагментов знаний с точечными оценками вероятностей их элементов; однако оказалось, что она работает лишь для цепей фрагментов знаний, которые попарно имеют не более одной атомарной пропозиции.

В [9] был предложен способ распространения влияния кортежа недетерминированных свидетельств в цепи фрагментов знаний с точечными оценками вероятностей истинности их элементов; этот же способ был обобщён на ациклическую алгебраическую байесовскую сеть, в которой также допускались только точечные оценки вероятностей истинности. Указанный способ опирается на гипотезу условной независимости.

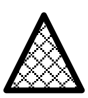
В настоящей работе мы приведём обобщение способа из [9], которое допускает недетерминированный кортеж свидетельств с неопределенностью и интервальные оценки в цепи фрагментов знаний и в ациклической алгебраической байесовской сети. Изложение будет опираться на графический материал, представленный в ряде рисунков.

Рассмотрим сначала цепь, состоящую из двух фрагментов знаний (рис. 1). На вход поступили свидетельства, представленные фрагментом знаний:

Отметим, что это может быть произвольный вид совокупности свидетельств: одно детерминированное, кортеж детерминированных, недетерминированное, кортеж недетерминированных свидетельств, недетерминированное с неопределённостью, кортеж недетерминированных свидетельств с неопределённостью. Мы можем разъять два рассматриваемых фрагмента знаний в области их пересечения, помня о том, что у них есть общий идеал цепочек конъюнкций (т.е. общий «подфрагмент» знаний), обозначаемый как

 (в ФЗ слева) и  (в ФЗ справа).

Выбрав формулы для решения второй задачи апостериорного вывода, подходящие для вида поступивших свидетельств и вида оценок вероятности истинности элементов ФЗ, рассчитаем апостериорные вероятности в первом фрагменте знаний. Оценки, полученные на общем идеале, передадим дальше — во второй фрагмент знаний — как совокупность свидетельств (подходящего вида); оценки передаются с помощью фрагмента знаний, построенного на указанном общем идеале:



Выбрав формулы для решения второй задачи апостериорного вывода, подходящие для вида поступивших свидетельств и вида оценок вероятности истинности элементов ФЗ, рассчитаем апостериорные вероятности во втором фрагменте знаний. Таким образом, влияние поступившей совокупности свидетельств распространено; оценки апостериорных вероятностей получены. Отметим, что во фрагмент знаний, являющийся «носителем» исходной совокупности свидетельств, могут входить атомарные пропозиции сразу из двух ФЗ, составляющих цепь. В этом случае на этапе вычислений, когда расчёты ведутся с детерминированными свидетельствами, сначала пропагируется часть детерминированного свидетельства в одном фрагменте знаний, а потом оставшаяся часть — в другом фрагменте знаний.

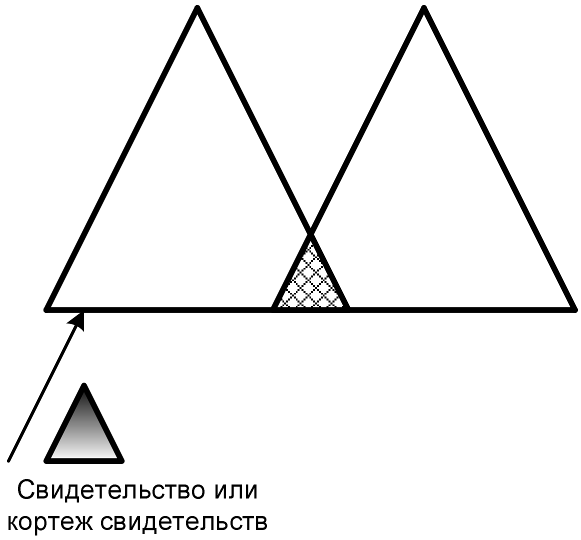


Рис. 1. Цепь, состоящая из двух фрагментов знаний.

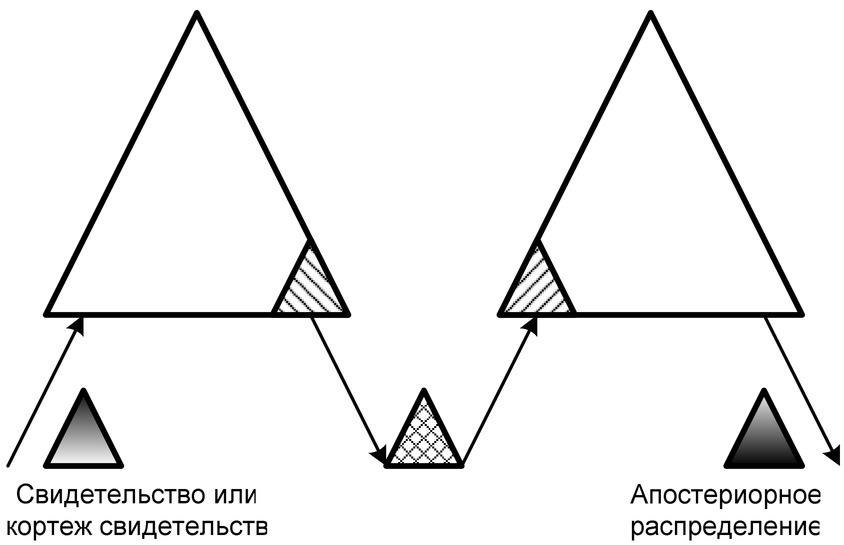


Рис. 2. Пропагация свидетельств в *разъятой* цепи из двух фрагментов знаний.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

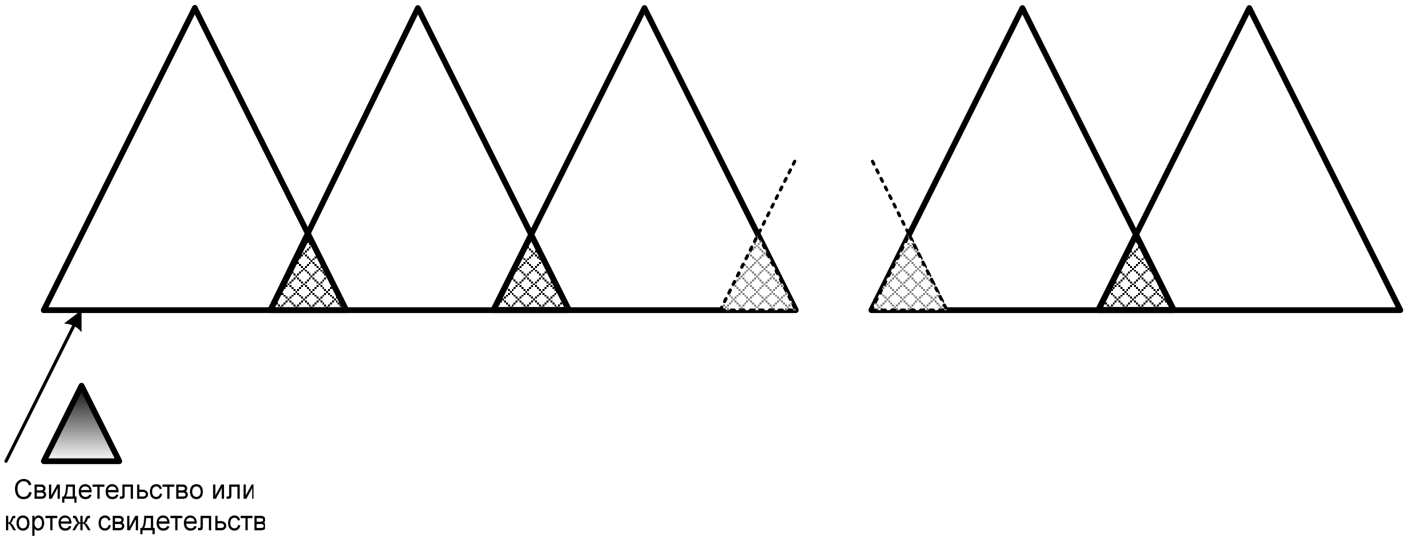


Рис. 3. Общий случай цепи фрагментов знаний.

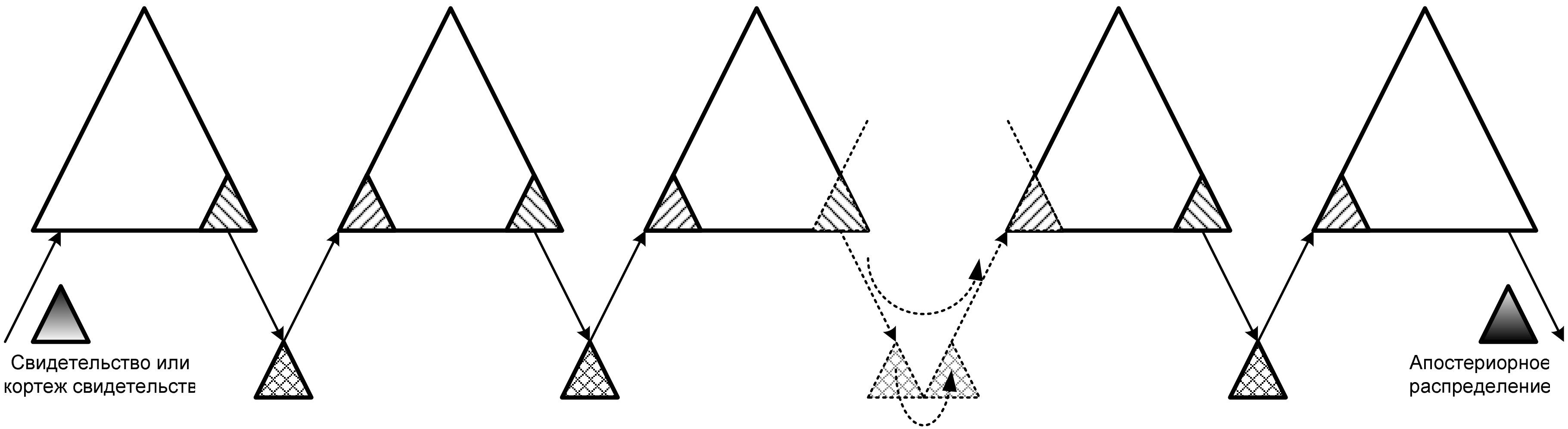


Рис. 4. Пропагация свидетельств в *разъятой* цепи фрагментов знаний (общий случай).

Заметим, что получившийся фрагмент знаний

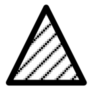
мог бы быть пропагирован дальше, если бы со вторым ФЗ пересекался бы третий; этот приём распространения влияния свидетельств как раз и применяется в цепи ФЗ общего случая, а также в ациклической алгебраической байесовской сети.

Сходным образом совокупность свидетельств пропагируется в цепи фрагментов знаний общего вида (рис. 3).

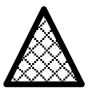
Пусть на вход поступила совокупность свидетельств, представленная фрагментом знаний:

Отметим, что это может быть произвольный вид совокупности свидетельств: одно детерминированное, кортеж детерминированных, недетерминированное, кортеж недетерминированных свидетельств, недетерминированное с неопределённостью, кортеж недетерминированных свидетельств с неопределённостью.

Если совокупность свидетельств построена над атомарными пропозициями, входящими только в первый слева фрагмент знаний, мы будет последовательно распространять их влияние от одного фрагмента знаний к другому слева направо в разъятой цепи (рис. 4): мы можем разъять цепь в областях пересечения двух соседствующих фрагментов знаний, помня о том, что у них есть общий идеал цепочек конъюнкций (т.е. общий «подфрагмент» знаний), обозначаемый как

 (в ФЗ слева) и  (в ФЗ справа).

Выбрав формулы для решения второй задачи апостериорного вывода, подходящие для вида поступивших и образующихся «промежуточных» свидетельств и вида оценок вероятности истинности элементов ФЗ, рассчитаем апостериорные вероятности по всей цепи. Оценки, получаемые на общем идеале, передаются внутри пар фрагментов знаний — от левого к правому — как совокупность свидетельств (подходящего вида); передача оценок осуществляется с помощью фрагмента знаний, построенного на общем идеале указанной пары фрагментов знаний:



Таким образом, влияние поступившей совокупности свидетельств распространено; оценки апостериорных вероятностей получены.

Если во фрагмент знаний, являющийся «носителем» исходной совокупности свидетельств, входят атомарные пропозиции сразу из нескольких ФЗ, составляющих цепь, то тогда, как и в случае двух фрагментов знаний, когда расчёты достигают этапа «обработки» детерминированных свидетельств, сначала пропагируется часть детерминированного свидетельства в одном фрагменте знаний. Затем пропагация осуществляется в другом ФЗ, и — так далее, пока в не исчерпается набор атомарных пропозиций, содержащихся в совокупности свидетельств, представленной фрагментом знаний

Ациклическая алгебраическая байесовская сеть может быть разъята на цепи фрагментов знаний, вдоль которых будет распространяться влияние полученных свидетельств. Разъятие сети на цепи возможно именно потому, что цепь является ациклической.

Отметим, что пропагация свидетельств — важная часть алгоритмического аппарата байесовских сетей доверия [16]. Ациклические байесовские сети доверия, построенные над пропозициональными формулами, вкладываются в ациклические алгебраические байесовские сети; результаты пропагации детерминированных свидетельств в обеих сетях совпадают; при пропагации свидетельств оба аппарата опираются на гипотезу условной независимости [9].

14. Заключение

Нам удалось предложить «естественную» индексацию (перенумерацию) формул из идеалов цепочек конъюнкций и квантов, построенных над теми же атомарными пропозициями, что и идеалы. Указанная индексация позволила записать формально множество ограничений, задаваемое аксиоматикой вероятностной логики, на вероятности истинности элементов идеалов. Полученная формальная запись позволяет, с одной стороны, алгоритмизировать генерацию указанного множества ограничений ($E^{\wedge,n}$), а, с другой стороны, более глубоко исследовать свойства этого множества.

С использованием введённых обозначений множество ограничений на элементы фрагмента знаний n-ного порядка, вытекающее из аксиоматики вероятностной логики, выглядит следующим образом:

$$E^{\wedge,n} = \bigcup_{j=(2^n-1)(-1)0} \left\{ \sum_{\substack{i=(2^n-1)(-1)0,\\ j=j\wedge\wedge i}} \left(\sim(i \oplus\oplus j)\, p(\wedge(x_1 x_2 \ldots x_n)[i:n])\right) \geq 0 \right\}.$$

Кроме того, нам удалось свести апостериорный вывод во фрагменте знаний

- как с точечными,
- так и с интервальными оценками вероятностей,

при любом виде поступающих свидетельств:

- детерминированное свидетельство,
- кортеж детерминированных свидетельств,
- недетерминированное свидетельство,
- кортеж недетерминированных свидетельств,
- недетерминированное свидетельство в неопределенностью,
- кортеж недетерминированных свидетельств с неопределённостью

к решению серии задач *линейного* программирования. Отметим при этом, что начальные постановки экстремальных задач апостериорного вывода относятся к классу задач *гиперболического* (*дробно-линейного*) программирования.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Ключевым шагом для преобразования задач гиперболического программирования в задачи линейного программирования, стала замена переменных вида:[5]

$$\xi = \frac{1}{p(X_e)};$$
$$\xi \ge 1;$$
$$d(f) = \xi \cdot p(f);$$
$$d(X_e) = 1,$$

впервые рассмотренная на частном примере фрагмента знаний второго порядка в [7].

На основе введённой индексации было формально записано множество линейных ограничений $R^{\wedge,n}_{d<X_e>}$ для получающихся задач апостериорного вывода при кортеже детерминированных свидетельств

$$\min_{R^{\wedge,n}_{d<X_e>}} \{d(Z_Y)\},$$
$$\max_{R^{\wedge,n}_{d<X_e>}} \{d(Z_Y)\}.$$

Само множество $R^{\wedge,n}_{d<X_e>}$ в явном виде записывается так:

$$\begin{aligned} R^{\wedge,n}_{d<X_e>} &= \{\xi \ge 1\} \cup \\ &\cup \left\{ \begin{matrix} \xi \cdot p^-(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[i:n]) \le d(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[i:n]), \\ d(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[i:n]) \le \xi \cdot p^+(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[i:n]) \end{matrix} \right\}_{i=\overline{(2^n-1)(-1)0,}} \cup \\ &\cup \left\{ \sum_{\substack{i=\overline{(2^n-1)(-1)0,} \\ j=j\wedge\wedge i}} (\sim(i \oplus\oplus j) d(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[i:n])) \ge 0 \right\}_{j=\overline{(2^n-1)(-1)0}} \end{aligned}$$

при соглашении о подстановке

$$d(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[\varsigma:n]) = 1;$$
$$d(\wedge(x_1x_2\ldots x_n)[0:n]) = \xi.$$

Приведённые выше экстремальные задачи — как задачи *линейного* программирования — решаются и для более сложных свидетельств и их кортежей: недетерминированных и недетерминированных с неопределенностью.

Следует принять во внимание, что получившееся множество ограничений $R^{\wedge,n}_{d<X_e>}$ представляет собой почву для дальнейших исследований относительно математических свойств и поведения величин вида $d(f)$. Часть из этих величин является апостериорными вероятностями соответствующих пропозициональных формул; интересным представлялся бы анализ того, как система ограничений на *априорные* вероятности индуцирует систему ограничений на *апостериорные* вероятности.

[5] Важно заметить, что случай с $p(X_e) = 0$ рассматривается отдельно.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Особенностью нашего подхода является также и то, что все виды свидетельств и их кортежей у нас также представляются в виде фрагментов знаний, построенных над атомарными пропозициями, участвующими в поступившем свидетельстве. Такой подход, в частности, позволяет учитывать широкий класс зависимостей между элементарными свидетельствами, вошедшими в кортеж.

Подход к пропагации свидетельств в цепях идеалов цепочек конъюнкций и ациклических алгебраических байесовских сетях, рассмотренный ранее в [1, 9], обобщён на случай интервальных оценок в цепях и сетях, а также на случай интервальных оценок вероятности в фрагменте знаний, представляющем совокупность свидетельств. В работе представлена графическая схема распространения свидетельств между фрагментами знаний; кроме того, в соответствующих разделах даны формулы для расчётов влияния свидетельств на вероятности элементов фрагментов знаний.

Отдельно рассмотрен особый случай, когда на вход в БФЗ поступает свидетельство (или их совокупность), вероятность которого над данной БФЗ равна нулю: $p(X_e) = 0$. В этом случае предполагается, что апостериорные вероятности элементов БФЗ становятся полностью неопределёнными, т.е. оцениваются интервалом [0;1]. Такая оценка находится в полном согласии с аксиоматикой вероятностной логики и строгим определением условной вероятности, даже может формально использоваться в последующих расчётах; но она не несёт никакой дополнительной информации об ограничениях на вероятность соответствующей формулы, кроме той, которую дают аксиомы.

Направлением дальнейших исследований является анализ свойств математических объектов, получающихся в процессе апостериорного вывода: оценок вероятностей, семейств распределений вероятностей, алгоритмов пропагации, а также их устойчивости к порядку учёта свидетельств и чувствительности к вариации исходных данных.

Кроме того, возможным направлением дальнейших прикладных научно-технологических разработок является программное кодирование разработанных алгоритмов с учётом (с использованием) доступных библиотек линейного программирования.

Литература

[1] *Городецкий В.И.* Байесовский вывод. Препринт №149. Л.: ЛИИАН, 1991. 38 с.

[2] *Городецкий В.И.* Адаптация в экспертных системах // Известия АН СССР. Серия «Техническая кибернетика». №5(1993). С. 101–110.

[3] *Городецкий В.И.* Алгебраические байесовские сети — новая парадигма экспертных систем. // Юбилейный сборник трудов институтов Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации РАН, т. 2. М., РАН, 1993. С. 120-141.

[4] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // РАН. Известия академии наук. Серия «Теория и системы управления». №5. 1997. С. 33–42.

[5] *Городецкий В.И.* Моделирование неопределенных знаний // SCM'98. Сборник докладов. Т.1. СПб., 1998. С. 98–102.

[6] *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость баз знаний с количественными мерами неопределенности // КИИ'98. Сборник научных трудов. Т. 1. Пущино, 1998. С. 100–106.

[7] *Никитин Д.А., Тулупьев А.Л.* Классификация экстремальных задач, возникающих при обработке моделей фрагментов знаний с вероятностной неопределённостью // Телекоммуникации, математика и информатика — исследования и инновации. Выпуск 6. Межвузовский сборник научных трудов. СПб.: ЛГОУ им. А.С. Пушкина, 2002. С. 100–103.

[8] *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: теоретические основы и непротиворе-

чивость. СПб., СПИИРАН, 1995. 76 с.
[9] *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный подход к моделированию баз знаний с неопределенностью. СПб., СПИИРАН, 2000. 282 с.
[10] *Тулупьев А.Л.* Метод построения и исследования баз фрагментов знаний с неопределенностью. // Труды СПИИРАН. Выпуск 1. Том 1. СПб., СПИИРАН, 2002. С. 258–271.
[11] *Fagin R., Halpern J.Y, Megiddo N.* A Logic for Reasoning about Probabilities // Report RJ 6190 (60900) 4/12/88. pp. 1–41.
[12] *Fagin R., Halpern J.Y.* Uncertainty, Belief, and Probability–2. // Proc. of the IEEE Symposium on Logic and Computer Science, vol. 7 (1991). pp. 160–173.
[13] *V.Gorodetski, V.Skormin, L.Popyack*. Data Mining Technology for Failure Prognostics of Avionics, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Volume 38, # 2, 2002 pp.388–403.
[14] *Nilsson N.J.* Probabilistic Logic // Artificial Intelligence. Vol. 47(1986). Elsevier Science Publishers B.V., North Holland. pp. 71–87.
[15] *Nilsson N.J.* Probabilistic Logic Revisited // Artificial Intelligence, vol. 59(1993). Elsevier Science Publishers B.V., North Holland. pp. 31–36.
[16] *Perl J*. Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. Morgan Kaufmann Publ., NY etc., 1994. pp. 552.