

# НЕЧЕТКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ: НОВЫЙ ПОДХОД К ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

И. В. Лысенко

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН  
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д.39  
<ivlysenko@iias.spb.su>

---

УДК 519.95

*И. В. Лысенко. Нечеткая оптимизация: новый подход к постановке и решению задач // Труды СПИИРАН. Вып. 2, т. 1.— СПб.: СПИИРАН, 2004.*

**Аннотация.** *На основе развиваемой теории нечетких чисел и нечетких функций предлагается новый подход к постановке и решению задач нечеткой оптимизации в экономическом анализе. Рассмотрен упрощенный пример постановки и решения задачи финансирования работ по созданию комплекса технических устройств. — Библ. 20 назв.*

UDC 519.95

*I. V. Lysenko. Fuzzy optimization: a new approach to task formulating and solving // SPIIRAS Proceedings. Issue 2, vol. 1. — SPb.: SPIIRAS, 2004.*

**Abstract.** *A new approach to optimization task formulating and solving for economical analysis is suggested and discussed. The task is formulated as a fuzzy optimization task in terms of developing theory of fuzzy numbers and fuzzy functions. A simple exsample of the fuzzy optimization task is presented. That is concerning to financial providing for a technical complex development. — Bibl. 20 items.*

---

## I. Введение

Бурное развитие исследований в области теории нечетких, или размытых множеств и ее приложений на протяжении почти полувека [1–3] привело к появлению нового класса задач — задач нечеткой оптимизации, или нечеткого математического программирования [4, 5].

Задача оптимизации должна быть перенесена из хорошо известного класса задач «четкой» оптимизации в класс задач нечеткой оптимизации, если хотя бы один ее элемент является случайным и при этом неопределенность знания о нем не может быть описана с помощью теории вероятностей или математической статистики. Таким «случайным элементом» может быть любой параметр<sup>1</sup> задачи оптимизации, например целевая или ограничивающая функция или такой параметр (обычно относимый к «исходным данным задачи»), который входит в выражение хотя бы одной из этих функций.

Как правило, последнее имеет место при формализации основных задач по планированию мероприятий, которые будут реализовываться существующим или создаваемым объектом в условиях неопределенности данных о среде его функционирования и/или о функционировании объекта.

Такая неопределенность возникает, например, при решении задач, направленных на обеспечение боевой готовности ВС РФ [6, 7], при обосновании объемов потребных ассигнований на разработку, производство и обеспечение эксплуатации отдельных образцов космической техники [8], при анализе и корректировке нормативов надежности коммерческих банков [9], при исследовании живучести сложных систем [10], при анализе риска [11].

---

<sup>1</sup> Параметр задачи оптимизации — это элемент задачи, который не является оптимизируемой переменной.

В этих задачах присутствуют параметры, которые являются случайными величинами, но возможные (в будущем) значения которых не могут быть охарактеризованы с помощью соответствующих функций распределения вероятностей. Причина заключается в следующем.

Важнейшим допущением, позволяющим использовать теоретико-вероятностные характеристики случайной величины для описания ее будущих значений, является утверждение: в будущем случайная величина будет «вести себя» так же, как она «вела себя» в прошлом (ведь все характеристики ее распределения получены *по прошлым* ее реализациям).

Но можно ли принять такое допущение о значении, например, коэффициента  $K_y^p$  удорожания (будущих) работ из-за будущих инфляционных процессов [7]? Видимо, нет. Таким образом, появляется необходимость отказаться от использования вероятностной меры и использовать «нечеткую» меру возможности будущих значений случайной величины — функцию принадлежности.

Случайная величина, охарактеризованная с помощью функции принадлежности, называется нечеткой, например нечеткое число или нечеткая функция.

Решение задачи нечеткой оптимизации требует, чтобы были заданы правила действий с нечеткими величинами, а также с нечеткими и с обычными «четкими» величинами: правила сложения, умножения и т. п. Наконец, должно быть задано правило выбора одного (лучшего) решения из двух решений, сравниваемых по показателю, являющемуся нечеткой величиной. То есть должно быть задано правило реализации бинарного отношения « $\leq$ » между нечеткими величинами.

Указанные правила и методы решения задач нечеткой оптимизации разработаны в теории нечетких чисел и нечетких функций, формирующейся в своих основах [12]. Они изложены ниже.

## II. Определения и основные идеи

Дадим определение нескольким важнейшим понятиям, которые должны использоваться при постановке и решении задач нечеткой оптимизации. К этим понятиям относятся следующие: нечеткое событие, нечеткий предикат, нечеткое число, нечеткая функция, алгебраические действия над нечеткими числами и над нечеткими функциями.

Нечеткое событие — это такое событие, возможность наступления которого зависит от значения одной или нескольких нечетких величин.

Нечеткое событие описывается (моделируется) на естественном языке — вербально или на искусственном (математическом) языке — формально.

Примеры вербального описания нечетких событий: 1) стоимость создаваемого нами ракетного двигателя (РД) будет равна 2 млн. руб.; 2) стоимость создаваемого нами РД будет не более 2 млн. руб.; 3) стоимость создаваемого нами РД будет не более чем стоимость аналогичного РД, создаваемого нашими конкурентами (противниками).

В этих описаниях нечеткими являются две величины: стоимость создаваемого нами РД и стоимость РД, создаваемого нашими конкурентами (противниками).

Математическим описанием (моделью) нечеткого события является нечеткий предикат.

Нечеткий предикат — это предикат<sup>2</sup>, определенный на множестве нечетких величин.

Пусть  $\tilde{a}_1$ <sup>3</sup> и  $\tilde{a}_2$  — стоимости «нашего» РД и РД наших конкурентов, соответственно. Тогда математическими моделями описанных выше нечетких событий будут следующие нечеткие предикаты, содержащие переменные  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{a}_2$ : 1)  $\tilde{a}_1 = 2$  млн. руб.; 2)  $\tilde{a}_1 \leq 2$  млн. руб.; 3)  $\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2$ . При этом первый и второй предикаты являются одноместными «единожды» неопределенными, а третий — двухместным дважды неопределенным: неопределенность (истинностного значения) предикатов вызвана неопределенностью будущих значений величин  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{a}_2$ .

Наиболее важными нечеткими величинами, используемыми в задачах нечеткой оптимизации, являются нечеткие числа (НЧ) и нечеткие функции (НФ).

Нечетким числом будем называть нечеткую величину, множество возможных значений которой — это числовое множество. Нечеткие числа могут образовывать нечеткие векторы.

Нечеткое число задается экспертом в форме «функции принадлежности нечеткого числа» к множеству его возможных значений.

Обозначим:  $\tilde{a}$  — нечеткое число,  $O_{\tilde{a}}$  — область возможных значений числа  $\tilde{a}$ ,  $\mu_{\tilde{a}}$  — функция принадлежности (ФП) числа  $\tilde{a}$ . Тогда

$$\forall a \in O_{\tilde{a}} \Rightarrow \mu_{\tilde{a}} : a \mapsto [0, 1], \mu_{\tilde{a}}(a) = \overset{d}{Poss}(\tilde{a} = a).$$

Значение  $\mu_{\tilde{a}}(a)$  — это субъективная<sup>4</sup> мера возможности того, что предикат  $\tilde{a} = a$  примет значение «истина».

Существуют различные способы задания и формы ФП [14], однако наиболее важными для постановки и решения задач нечеткой оптимизации являются гладкие унимодальные ФП, которые будут рассматриваться далее.

На рис. 1 показан график ФП  $\mu_{\tilde{a}}$  и обозначено:  $a'$ ,  $a''$  и  $a^*$  — минимально возможное, максимально возможное и модальное значения числа  $\tilde{a}$ . Заметим, что фактически  $a'$  и  $a''$  являются невозможными значениями числа  $\tilde{a}$ , так как  $\mu_{\tilde{a}}(a') = \mu_{\tilde{a}}(a'') = 0$ . Модальное значение  $a^*$  — это точка моды (максимума) функции  $\mu_{\tilde{a}}$ .

Для выполнения расчетов с НЧ необходимо задать алгебру нечетких чисел. Она задается так же, как и обычная алгебра действий с «четкими» числами, то есть указанием правил выполнения алгебраических действий. Отличие алгебры нечетких чисел заключается в том, что в ней нулем является «четкий» нуль, единицей — «четкая» единица, а противоположное число  $\tilde{b}$  и обратное число  $\tilde{c}$  по отношению к  $\tilde{a}$  вводятся следующим образом:

$$\tilde{b} : O_{\tilde{b}} = [b', b''], b' = -a'', b'' = -a', b^* = -a^*, \mu_{\tilde{b}}(b) = \mu_{\tilde{a}}(-b), \tilde{a} + \tilde{b} = 0;$$

$\tilde{b}$  обозначается « $-\tilde{a}$ »;

<sup>2</sup> Предикат — это высказывание, истинность которого зависит от значения одной или нескольких входящих в него «предметных переменных» [13], которые далее будем называть «переменными».

<sup>3</sup> Далее нечеткую величину будем обозначать сверху тильдой « $\sim$ ».

<sup>4</sup> Так как эта мера задается экспертом, ее называют «субъективной», в отличие от вероятности, считающейся «объективной» мерой возможности.

пусть  $a' > 0$ , тогда

$$\tilde{c} : O_{\tilde{c}} = [c', c''], c' = 1/a'', c'' = 1/a', c^* = 1/a^*, \mu_{\tilde{c}}(c) = \mu_{\tilde{a}}(1/c), \tilde{a} \cdot \tilde{c} = 1;$$

$\tilde{c}$  обозначается « $1/\tilde{a}$ » или « $\tilde{a}^{-1}$ ».

Алгебраические действия с нечеткими числами выполняются по единому алгоритму, позволяющему по функциям принадлежности операндов построить ФП результата. При этом используется ФП вспомогательного нечеткого векто-

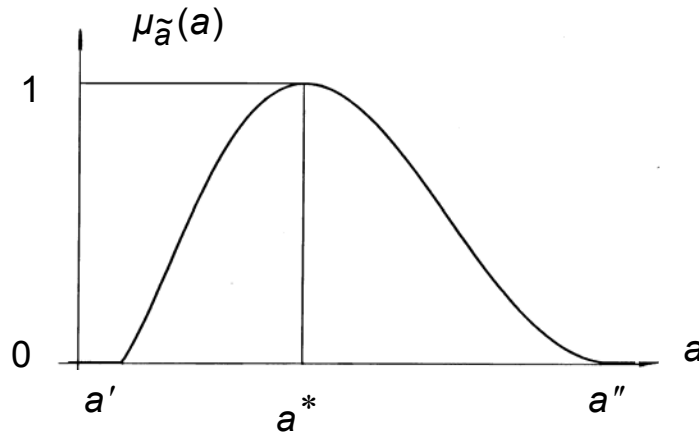


Рис. 1. График функции принадлежности  $\mu_{\tilde{a}}$

ра, компонентами которого являются операнды алгебраического действия. Проиллюстрируем алгоритм на примере сложения двух НЧ:  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{a}_2$ .

Пусть  $\tilde{b} = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2$ . Тогда

$$O_{\tilde{b}} = [b', b''], b' = a'_1 + a'_2, b'' = a''_1 + a''_2, b^* = a^*_1 + a^*_2,$$

$$\forall b \in O_{\tilde{b}} \Rightarrow \mu_{\tilde{b}}(b) = \max^d \{ \mu_{\tilde{a}_{<2>}}(a_{<2>}) : a_1 + a_2 = b \},$$

$$\mu_{\tilde{a}_{<2>}}(a_{<2>}) = \mu_{\tilde{a}_1}^{1/2}(a_1) \mu_{\tilde{a}_2}^{1/2}(a_2),$$

$$\tilde{a}_{<2>} = \langle \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \rangle, a_{<2>} = \langle a_1, a_2 \rangle, a_1 \in O_{\tilde{a}_1}, a_2 \in O_{\tilde{a}_2}.$$

Алгоритм построения  $\mu_{\tilde{b}}$  включает следующие действия:

1. Построение поверхности  $\mu_{\tilde{a}_{<2>}}$  — графика функции принадлежности нечеткого вектора  $\tilde{a}_{<2>}$  к множеству  $O_{\tilde{a}_{<2>}}$  его возможных значений:

$$O_{\tilde{a}_{<2>}} = O_{\tilde{a}_1} \times O_{\tilde{a}_2};$$

2. Сечение поверхности  $\mu_{\tilde{a}_{<2>}}$  соответствующими (алгебраическому действию) цилиндрическими поверхностями, образующая которых параллельна вертикальной оси  $O\mu_{\tilde{a}_{<2>}}$ ;

3. Проецирование сечений на соответствующую плоскость и построение графика  $\mu_{\tilde{b}}$  — функции принадлежности числа  $\tilde{b}$  — результата алгебраического действия.

На рис. 2–4 показаны геометрические иллюстрации к этому алгоритму. Заметим, что в данном случае цилиндрическая поверхность имеет уравнение

$a_1 + a_2 = b$ , то есть является плоскостью. На рис. 2 показано сечение поверхности  $\mu_{\tilde{a}_{\langle 2 \rangle}}$  плоскостью  $a_1 + a_2 = b_i$ .

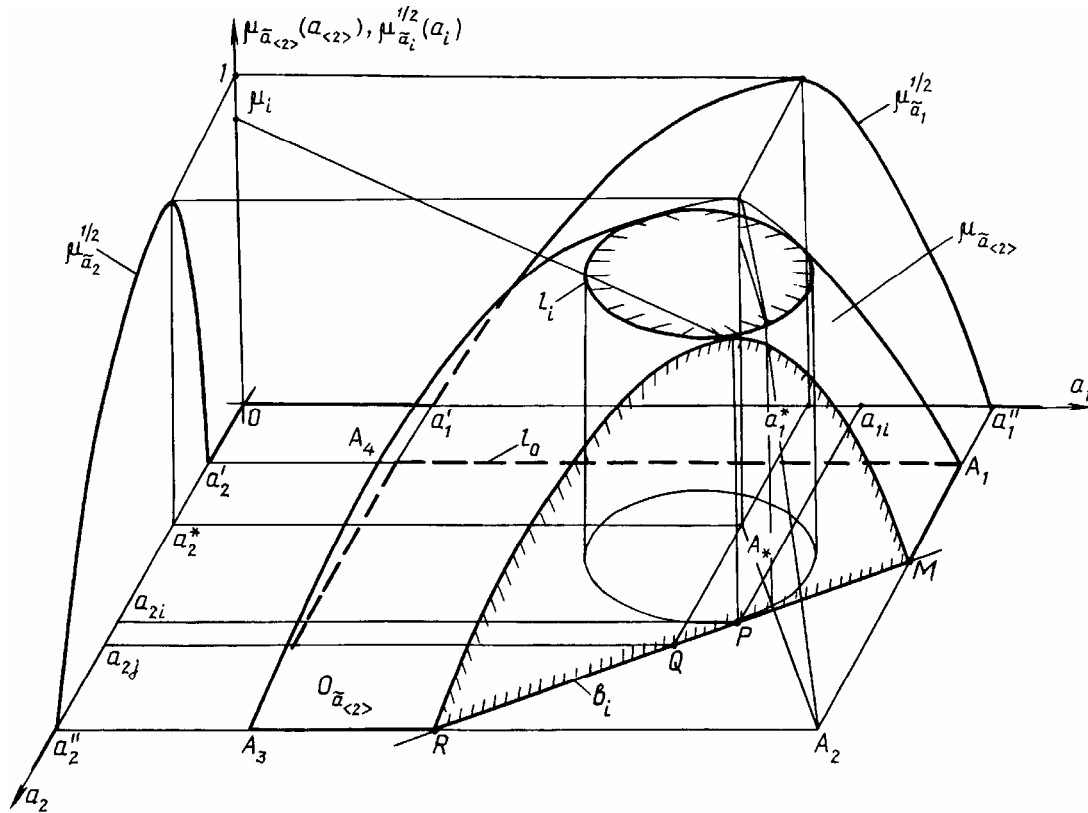


Рис. 2. График поверхности  $\mu_{\tilde{a}_{\langle 2 \rangle}}$  и ее сечений

Проецирование сечений выполняется на плоскость  $a_1 - a_2 = 0$ , проходящую через начало координат. Множество  $O_{\tilde{a}_{\langle 2 \rangle}}$  — это часть плоскости  $a_1 0 a_2$ , ограниченная прямоугольником, вершины которого помечены  $A_i, i = 1, \dots, 4$ . Он показан на рис. 3. На рис. 4а, 4б и 4в показаны графики ФП  $\mu_{\tilde{a}_1}, \mu_{\tilde{a}_2}$  и  $\mu_{\tilde{b}}$ , соответственно.

В алгебре НЧ определены бинарные операции, один операнд которых — нечеткое число, а другой — «четкое» число. Так, сложение — это операция сдвига ФП нечеткого числа по оси абсцисс. Умножение — это операция масштабирования ФП нечеткого числа и области ее определения. При этом  $\tilde{a} + 0 = \tilde{a}, \tilde{a} \cdot 0 = 0, \tilde{a} \cdot 1 = \tilde{a}$ .

Определенная выше ФП  $\mu_{\tilde{a}}$  числа  $\tilde{a}$  задает в каждой точке  $a$  меру истинности предиката  $\tilde{a} = a$  первого вида (в рассмотренном примере  $a = 2$  млн. руб.). Для решения задач нечеткой оптимизации необходимо задать меру истинности предиката  $\tilde{a} \leq a$  второго вида и предиката  $\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2$  третьего вида.

Меру истинности предиката  $\tilde{a} \leq a$  обозначим  $L_{\tilde{a}}(a)$  и определим следующим образом:

$$\forall a \in O_{\tilde{a}} \Rightarrow L_{\tilde{a}} : a \mapsto [0, 1], L_{\tilde{a}}(a) = \text{Poss}(\tilde{a} \leq a) = \int_{-\infty}^a \mu_{\tilde{a}}(u) du / \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{a}}(u) du.$$

Очевидно, что  $\text{Poss}(\tilde{a} \leq a) + \text{Poss}(\tilde{a} > a) = 1$ .

Нетрудно заключить, что для рассматриваемых ФП

$$L_{\tilde{a}}(a) = \int_{a'}^a \mu_{\tilde{a}}(u) du / \int_{a'}^{a''} \mu_{\tilde{a}}(u) du.$$

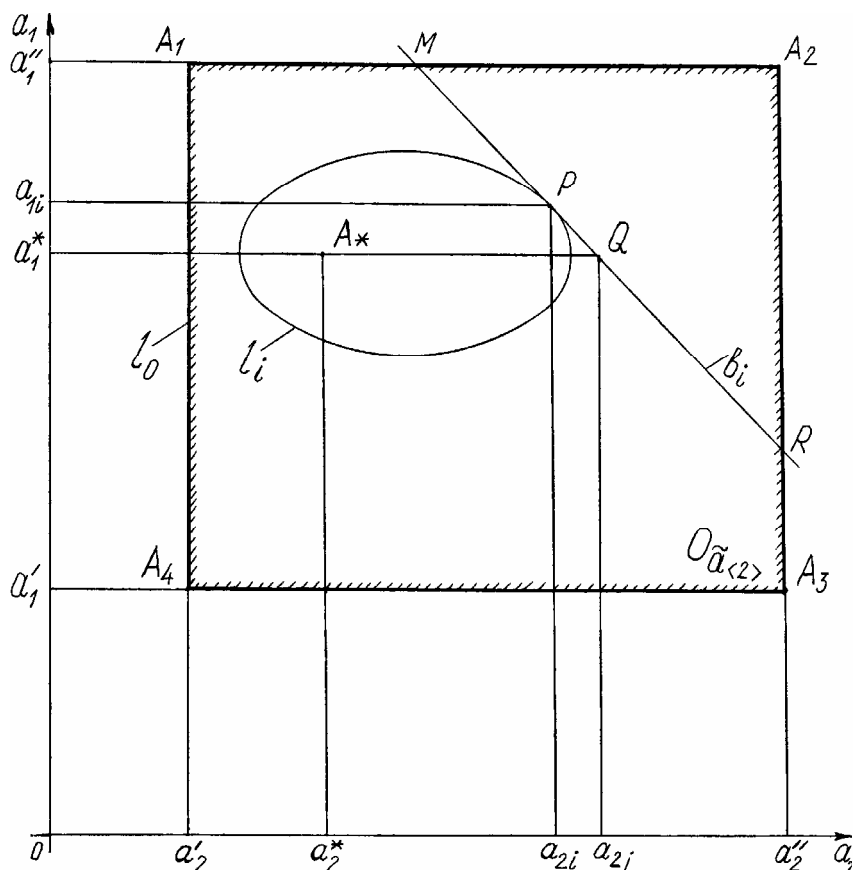


Рис. 3. График множества  $O_{\tilde{a}_{<2>}}$

На рис. 5 показаны график 1 функции  $\mu_{\tilde{b}}$  (он показан и на рис. 4в) и соответствующий ему график 2 функции  $L_{\tilde{b}}$ .

Заметим, что использование меры  $L_{\tilde{a}}(a)$  необходимо при проверке решения задачи нечеткой оптимизации на допустимость (по ограничениям, если они заданы нечеткими функциями) и в других случаях, которые будут обсуждаться ниже.

Предикат  $\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2$  третьего вида и мера его истинности используются, например, если необходимо выбрать лучшее из двух допустимых решений  $x_1$  и  $x_2$  задачи нечеткой оптимизации, первому из которых соответствует значение  $\tilde{a}_1$  целевой функции, а второму — значение  $\tilde{a}_2$ .

Меру истинности предиката  $\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2$  определим так:

$$Poss(\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2) = \frac{\iint_S \mu_{\tilde{a}_{\langle 2 \rangle}}(a_{\langle 2 \rangle}) da_1 da_2}{\iint_{O_{\tilde{a}_{\langle 2 \rangle}}} \mu_{\tilde{a}_{\langle 2 \rangle}}(a_{\langle 2 \rangle}) da_1 da_2}, \text{ где}$$

$$S = \{ \langle a_1, a_2 \rangle : a_1 \leq a_2 \}, S \subseteq O_{\tilde{a}_{\langle 2 \rangle}}.$$

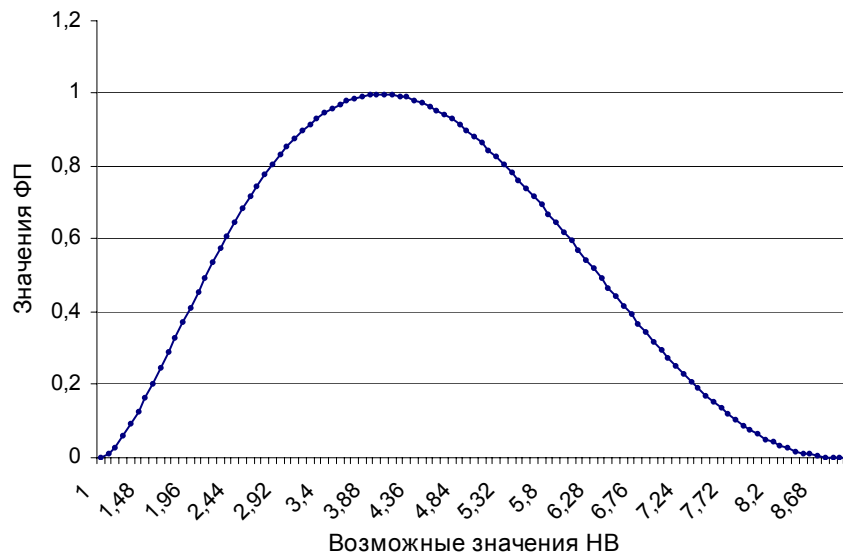


Рис. 4а. График ФП  $\mu_{\tilde{a}_1}$

Очевидно, что  $Poss(\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2) + Poss(\tilde{a}_1 > \tilde{a}_2) = 1$ .

Нетрудно показать, что

$$Poss(\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2) = \int_{a_2'}^{a_2''} L_{\tilde{a}_1}(a_2) dL_{\tilde{a}_2}(a_2).$$

Наконец, заметим, что формально из вышеуказанного следует:

$$Poss(\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2) = L_{\tilde{a}_1}(\tilde{a}_2).$$

Таким образом,  $L_{\tilde{a}_1}(\tilde{a}_2)$  является функцией нечеткого числа  $\tilde{a}_2$ . Это один из видов нечетких функций, используемых при решении задач нечеткой оптимизации.

Нечеткая функция — это такая функция четких и/или нечетких величин, значениями которой являются нечеткие числа.

Классификация нечетких функций показана на рис. 6. Как видно, существуют три вида (класса) нечетких функций, отличающихся по двум признакам: 1) по виду отображения и 2) по виду аргумента (переменной) отображения.

Если отображение является «четким» (явная форма отображения не содержит нечетких параметров), а аргумент является нечеткой величиной, то такая НФ — это «четкая» функция нечеткого аргумента. Например,  $L_{\tilde{a}_1}(\tilde{a}_2)$  — это «четкая» функция нечеткого числа  $\tilde{a}_2$ . Описанное выше действие сложения

двух нечетких чисел  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{a}_2$  — это «четкая» функция нечеткого вектора  $\tilde{a}_{\langle 2 \rangle}^d = \langle \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \rangle$ .

Если отображение является нечетким, а его аргумент — «четким», то такая

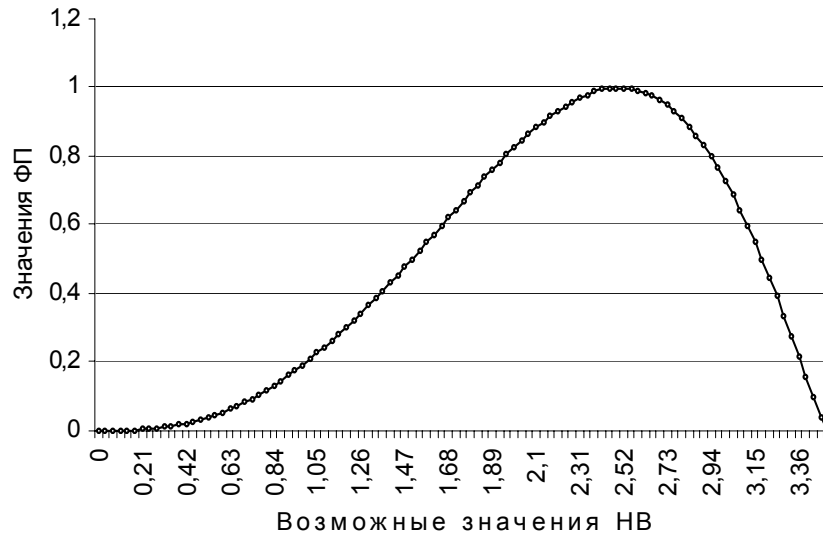


Рис. 4б. График ФП  $\mu_{\tilde{a}_2}$

НФ — это нечеткая функция «четкого» аргумента. Обычно в задачах нечеткой оптимизации к этому классу нечетких функций относятся ограничивающие функции, рассматриваемые как функции, аргументом которых является решение  $x$  задачи.

Если и отображение, и его аргумент являются нечеткими, то такая НФ — это нечеткая функция нечеткого аргумента.

Заметим, что НФ первого и третьего видов — это особые функции. Их аргументом является нечеткое число, то есть интервал (в рассматриваемом случае — отрезок) действительных чисел. Это не позволяет построить в целом график НФ в арифметическом пространстве  $R^n$  действительных чисел (хотя в отдельности взятое каждое ее значение — нечеткое число может быть изображено графически в  $R^2$ , см. рис. 4в).

Нечеткая функция второго вида не обладает такой особенностью. Ее график может быть построен в арифметическом пространстве, поэтому нечеткую функцию «четкого» аргумента будем называть арифметической нечеткой функцией (АНФ). Эта функция играет важную роль в задачах нечеткой оптимизации. Так, НФ первого вида после того, как ее нечеткий аргумент примет «четкое» значение, то есть апостериори, становится обычной функцией: такие функции образуют область значений АНФ. Нечеткая функция третьего вида апостериори преобразуется в АНФ.

Определим понятие АНФ. Для этого введем обозначения и определения.

Пусть

$F$  — множество «четких» функций:

$$F = \{f_i : i = 1, \dots, N_1\};$$

$\mu$  — функция, которая определена на  $F$  и отображает его на отрезок  $[0, 1]$ :



$$\mu : F \rightarrow [0, 1];$$

$$F_\alpha = \{f_i : f_i \in F, \mu(f_i) = \alpha\};$$

$$\mu_{\tilde{f}} = \{(F_\alpha, \alpha) : \alpha \in [0, 1]\};$$

$\tilde{f}$  — функция, которая может принять какую-либо форму  $f_i$  из  $F$ , и мера этой возможности для любой  $f_i$  из  $F_\alpha$  равна  $\alpha$ :

$$Poss(\tilde{f} = f_i) = \alpha.$$

Тогда  $\tilde{f}$  — это арифметическая нечеткая функция.

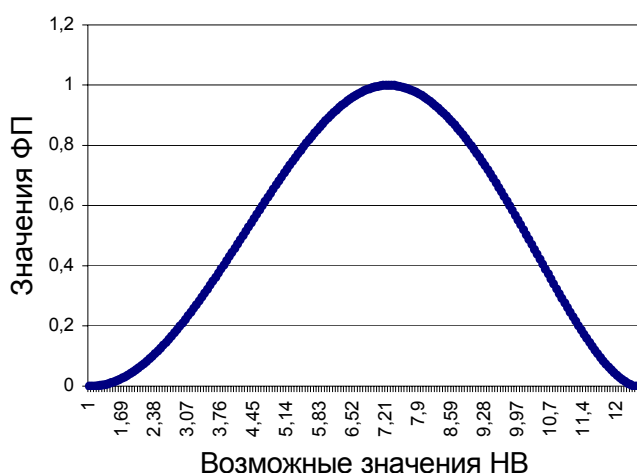


Рис. 4в. График ФП  $\mu_{\tilde{b}}$

Обозначим:

$$\mu_{\tilde{f}}(f_i) = Poss(\tilde{f} = f_i).$$

Функцию  $\mu_{\tilde{f}}$  будем называть функцией принадлежности АНФ  $\tilde{f}$  (к множеству  $F$  ее возможных «четких» форм).

В качестве примера на рис. 7 приведен график области значений линейной АНФ:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2,$$

где  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$  — нечеткие параметры, ФП которых те же, что на рис. 2.

На рис. 7 показана область  $G$  — часть плоскости  $fOx$ , ограниченная графиками 1–4 функций  $f_i(x)$ , соответствующих точкам  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , — вершинам декартова квадрата  $O_{\tilde{a}_{<2>}}$  (см. рис. 3). Область  $G$  вместе с ее границами содержит графики всех функций из множества  $F$ , соответствующего  $\tilde{f}$ . На  $G$  показан помеченный «\*» график функции  $f_*$ , соответствующей точке  $A_*$ .

На рис. 7 обозначено:  $\alpha_*, \alpha_1, \alpha_2$  — углы наклона графиков функций  $f_*, f_1, \dots, f_4$ ; при этом

$$\operatorname{tga}_* = a_1^*, \operatorname{tga}_1 = a_1', \operatorname{tga}_2 = a_1'';$$

$$f_*(x) = a_1^*x + a_2^*, f_1(x) = a_1'x + a_2', f_2(x) = a_1''x + a_2'', f_3(x) = a_1'x + a_2'', f_4(x) = a_1'x + a_2';$$

$$x_1 = -a_2' / a_1', x_2 = 0, x_3 = 1.$$

Из рис. 2 очевидно:

$$\mu_{\tilde{f}}(f_*) = 1, \mu_{\tilde{f}}(f_i) = 0, i = 1, \dots, 4.$$

Заметим, что  $f_*$  — единственная функция в  $F$ , для которой  $\mu_{\tilde{f}}$  равна 1.

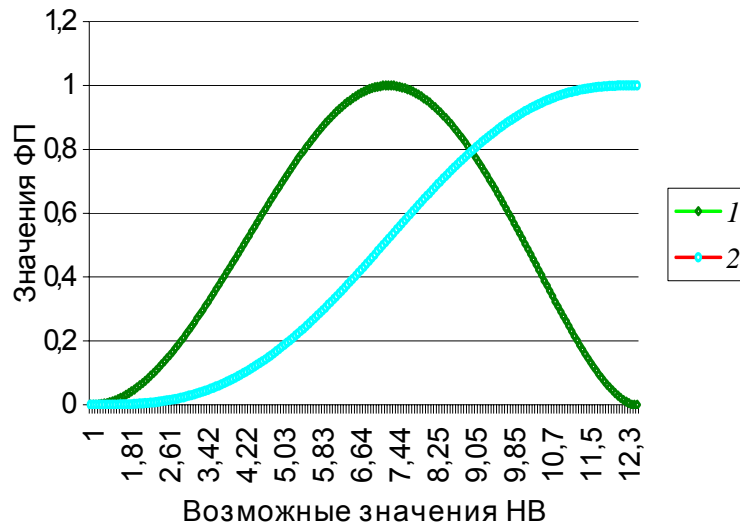


Рис. 5. Графики функций  $\mu_{\tilde{b}}$  и  $L_{\tilde{b}}$

Функция  $f_*$  — модальное значение функции  $\tilde{f}$ .

На рис. 8 показана поверхность  $\mu_{\tilde{f}}$ . Она дает полное описание нечеткости АНФ  $\tilde{f}$ . Поверхность имеет вид двускатной палатки, «натянутой» на графики функций принадлежности  $\mu_{\tilde{b}_i}$  нечетких чисел  $\tilde{b}_i = \tilde{a}_1x_i + \tilde{a}_2$  (на рисунке показаны графики для трех НЧ, соответствующих  $x_1, x_2$  и  $x_3$ : эти графики — линии пересечения поверхности  $\mu_{\tilde{f}}$  плоскостями  $x = x_i, i = 1, 2, 3$ ) и на границы области  $G$  как на основание палатки.

На  $G$  нанесена линия  $f(x) = b$  и видно, что мера возможности того, что  $\tilde{f}$  примет значение  $b$ , в зависимости от  $x_i$  изменяется следующим образом:

$$\mu_1 < \mu_3 < \mu_2, \text{ где } \mu_i = \mu_{\tilde{b}_i}^d(b), i = 1, 2, 3.$$

Однако возможность того, что  $\tilde{f}$  примет значение не меньшее, чем  $b$ , изменяется иначе. Представление об этом дают графики функций  $M_{\tilde{b}_i}^d$ :

$$M_{\tilde{b}_i}^d(b) = \operatorname{Poss}(\tilde{b}_i \geq b) = 1 - L_{\tilde{b}_i}^d(b).$$

Графики  $M_{\tilde{b}_i}^d, i = 1, 2, 3$ , показаны на рис. 9. На рисунке обозначено:

1, 2, 3 — графики функций  $M_{\tilde{b}_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

$$M_i = M_{\tilde{b}_i}(b), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$f_1 = a_2', \quad f_2 = a_1' + a_2', \quad f_3 = a_2^* - a_2' a_1^* / a_1'', \quad f_4 = a_2^*,$$

$$f_5 = a_2'' - a_2' a_1' / a_1'', \quad f_6 = a_2'', \quad f_7 = a_1^* + a_2^*, \quad f_8 = a_1'' + a_2''.$$

Как видно,  $M_3 > M_2 > M_1$ .

Отметим важное свойство  $M_i$ :  $M_i$  — это уровень гарантии того, что при  $x_j$  АНФ  $\tilde{f}$  примет значение не меньшее, чем  $b$ .

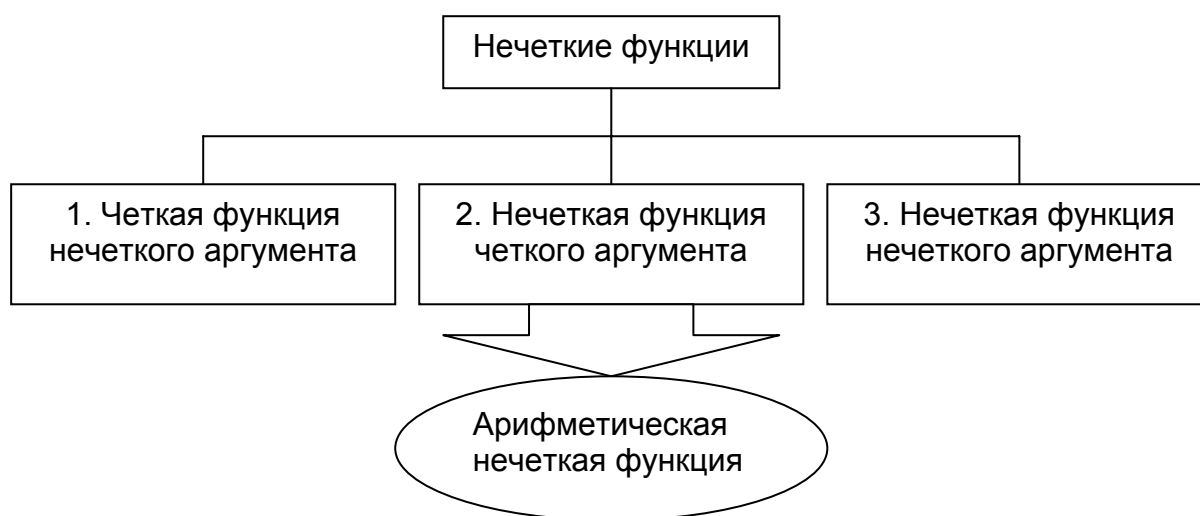


Рис. 6. Схема классификации нечетких функций

Эти графики позволяют ответить и на другой важный вопрос: менее какой величины не может быть значение  $\tilde{f}$  с уровнем гарантии  $M$  при  $x_j$ ,  $i = 1, 2, 3$ ? Как видно из графиков, гарантированно с уровнем  $M$  функция  $\tilde{f}$  при  $x_j$  будет не менее, чем  $b_j$ :  $b_3 > b_2 > b_1$ .

Указанные особенности  $\tilde{f}$  используются при постановке и решении задач нечеткой оптимизации.

Прежде, чем перейти к рассмотрению специфики задач нечеткой оптимизации и методов их решения, отметим ряд фактов, которые сдерживают интерес прикладников к задачам нечеткой оптимизации и тормозят развитие теории нечеткого математического программирования и ее приложений. Их, по крайней мере, два.

Первым следует назвать неразвитость теории нечетких функций. В многочисленных публикациях по теории нечетких множеств авторы ограничиваются теоретико-множественной трактовкой функций над нечеткими множествами и нечеткими числами, не пытаясь развивать конструктивную теорию нечетких функций в таких ее аспектах, которые, например, разработаны для обычных функций в [15]. Отсутствие понятия «элементарная нечеткая функция», аналогичного элементарной «четкой» функции, и, более того, дифференциального и

интегрального исчисления нечетких функций — все это не позволяет успешно разрабатывать методы нечеткого математического программирования, используя, например, те идеи, которые лежат в основе методов «четкого» математического программирования.

Вторым фактом следует назвать отсутствие ясного для прикладника геометрического или механического смысла тех понятий, которые введены и развиваются в теории нечетких множеств (например, «нечеткая первообразная (интеграл)» или «нечеткая производная» [16]).

В разрабатываемой теории нечетких чисел и нечетких функций сделана попытка ликвидировать указанный пробел в теории нечетких множеств и в ее

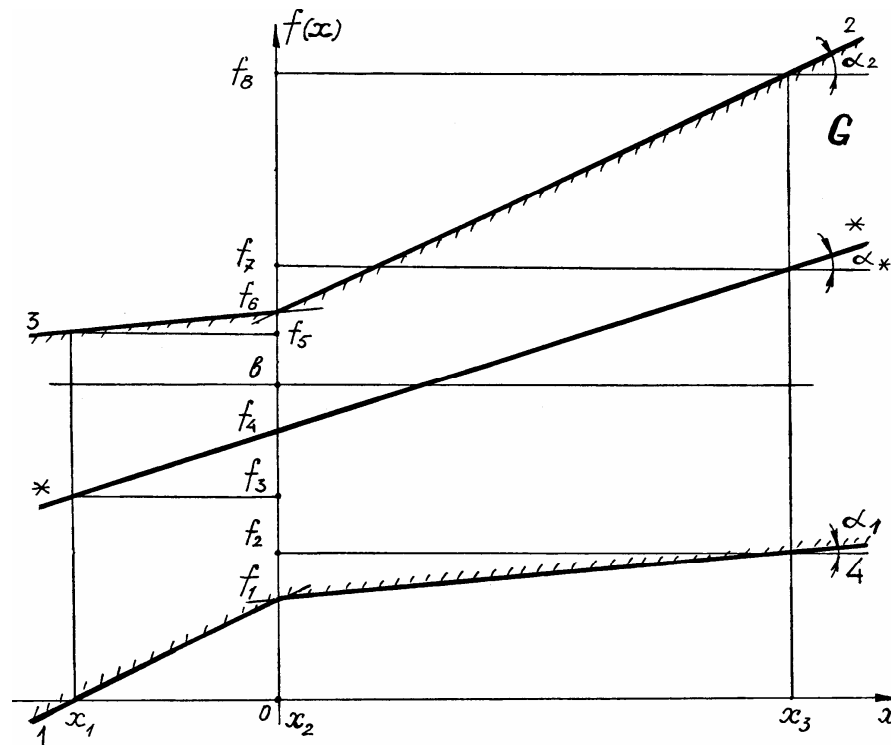


Рис. 7. График области значений АНФ  $\tilde{f}$

приложениях. Не вдаваясь в детали, отметим, что доказан ряд утверждений, позволяющих определить элементарные функции нечеткого числа. Это дает возможность выполнять тождественные преобразования, используя символьную запись с помощью «четких» чисел.

Так, например, пусть  $m, n$  — натуральные числа,  $\tilde{a}$  — число, заданное экспертом,  $\tilde{b} = \underbrace{\tilde{a} + \tilde{a} + \dots + \tilde{a}}_m$  и  $\tilde{c} = \underbrace{\tilde{a} \cdot \tilde{a} \cdot \dots \cdot \tilde{a}}_n$ . Тогда

$$\tilde{b}^d = m\tilde{a} \text{ и } b' = ma', b'' = ma'', b^* = ma^*, \forall b \in O_{\tilde{b}} \Rightarrow m\mu_{\tilde{b}}(b) = \mu_{\tilde{a}}(b/m);$$

$$\tilde{c}^d = \tilde{a}^n \text{ и } c' = (a')^n, c'' = (a'')^n, c^* = (a^*)^n, \forall c \in O_{\tilde{c}} \Rightarrow n\mu_{\tilde{c}}(c) = \mu_{\tilde{a}}(c^{1/n}).$$

В приведенных выражениях символ  $n\mu_{\tilde{c}}$  обозначает ФП числа  $\tilde{c}$ , имеющего «характеристику преобразования», равную  $n$ . Если число  $\tilde{a}$  задано экс-

пертом, то его характеристика преобразования равна 1:  ${}_1\mu_{\tilde{a}} = \mu_{\tilde{a}}^d$ . Если число  $\tilde{a}$  — результат алгебраических действий с другими нечеткими числами, то его характеристика преобразования определяется правилами выполнения алгебраических действий.

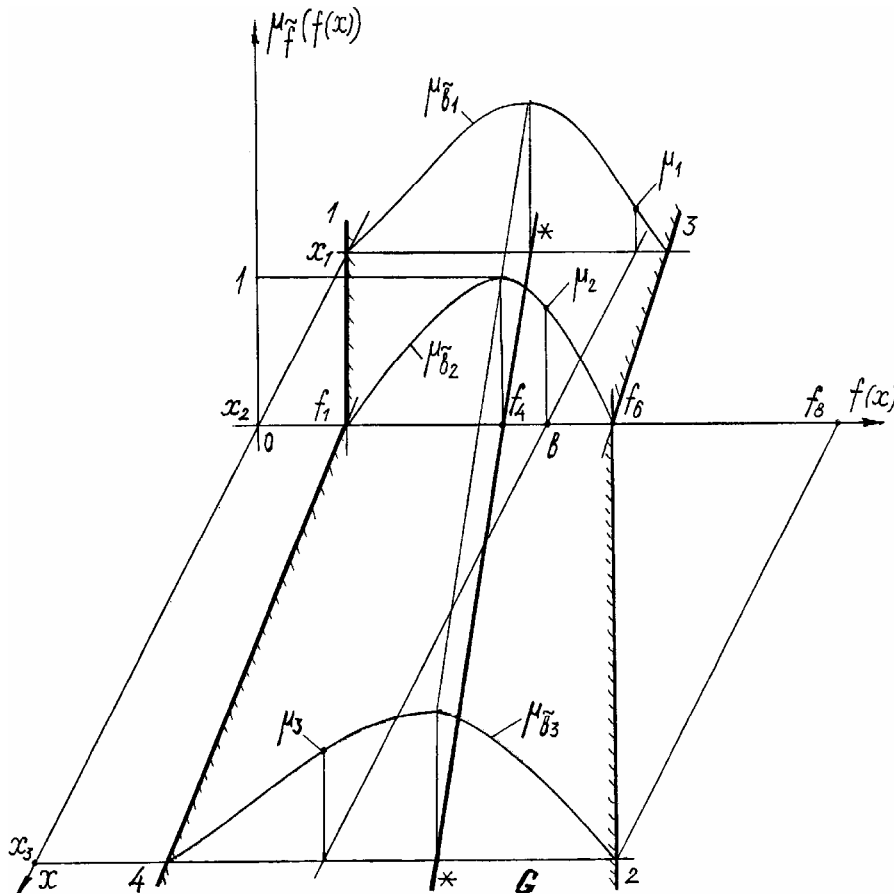


Рис. 8. График поверхности  $\mu_{\tilde{f}}$

Например, пусть  $\tilde{c} = f(\tilde{a}, \tilde{b})$ , где  $f$  — операция сложения или умножения  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$ , числам  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  соответствуют их ФП  ${}_i\mu_{\tilde{a}}$  и  ${}_j\mu_{\tilde{b}}$ . Тогда число  $\tilde{c}$  имеет характеристику преобразования  $k = i + j$  и функцию принадлежности  ${}_k\mu_{\tilde{c}}$ , которая соответствует паре функций  $({}_i\mu_{\tilde{a}})^{i/k}$  и  $({}_j\mu_{\tilde{b}})^{j/k}$ .

Пусть  $c, d$  — положительные действительные числа,  $\tilde{a}$  — число, заданное экспертом, и  $\tilde{b} = c\tilde{a}^d$ . Тогда:

$$b' = c(a')^d, b'' = c(a'')^d, b^* = c(a^*)^d, e = |cd|,$$

$$\forall b \in O_{\tilde{b}} \Rightarrow {}_e\mu_{\tilde{b}}(b) = {}_1\mu_{\tilde{a}}((b/c)^{1/d}).$$

Определены операции дифференцирования и интегрирования АНФ как символьные их преобразования. Все эти действия с нечеткими функциями имеют ясный физический смысл и позволяют разработать методы решения за-

дач нечеткой оптимизации, используя идеи методов «четкого» математического программирования.

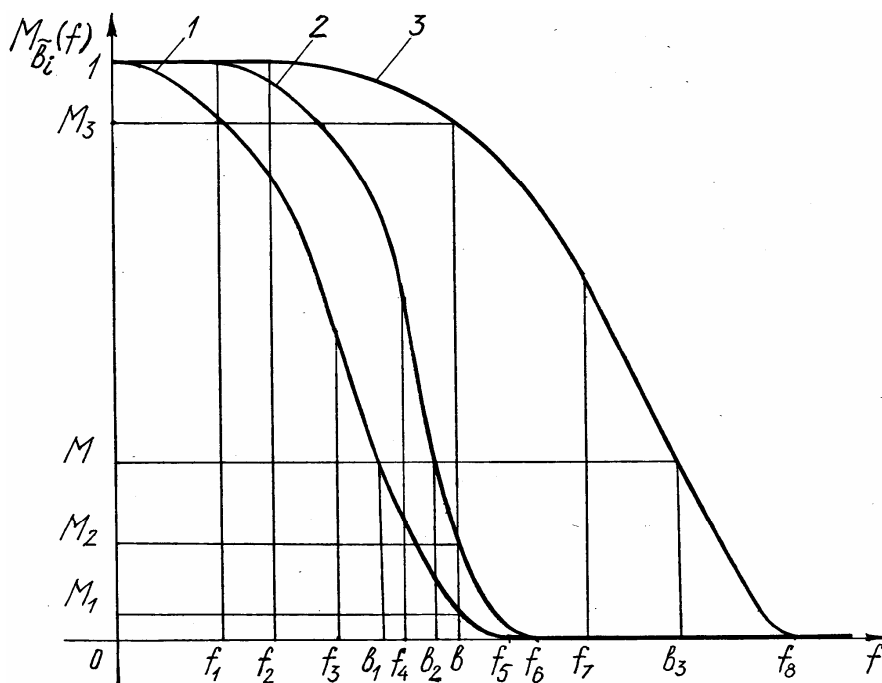


Рис. 9. Графики функций  $M_{b_i}^{~}$

### III. Структура задач нечеткой оптимизации и методы их решения

Прежде чем перейти к обсуждению методов решения задач нечеткой оптимизации, рассмотрим их структуру.

Под структурой задачи нечеткой оптимизации (ЗНО) будем понимать совокупность элементов концептуальной модели ЗНО, элементов математической модели ЗНО и отношений между элементами концептуальной модели и элементами математической модели ЗНО.

На рис. 10 показана совокупность отношений. Их два вида:

быть оптимизируемой переменной ЗНО;

быть параметром ЗНО.

В свою очередь последнее отношение имеет три вида:

быть целевой функцией ЗНО;

быть ограничивающей функцией ЗНО;

быть константой ЗНО.

Целевая функция, ограничивающая функция и константа — это элементы математической модели ЗНО. Их может быть несколько. Ограничивающая функция и константа образуют «ограничение» на выбор «возможных» значений оптимизируемых переменных в качестве «допустимых» решений ЗНО.

Совокупность элементов концептуальной модели ЗНО показана на рис. 11. Как видно из рисунка, совокупность включает три группы элементов:

элементы, описывающие возможные решения ЗНО;

элементы, описывающие эффекты (их возможные значения), получаемые от реализации принятого решения ЗНО;

элементы, описывающие возможность получить эффекты не хуже, чем их директивные значения.

Кратко поясним их смысл. Так, элементы первой группы — это те, которые описывают действия в планируемой операции. Примеры действий: к концу года увеличить огневую мощь группировки сил на  $x$  процентов; выделить из бюджета в первом квартале предстоящего финансового года  $x$  денежных единиц на создание образца вооружения. Элементы этой группы позволяют сформиро-

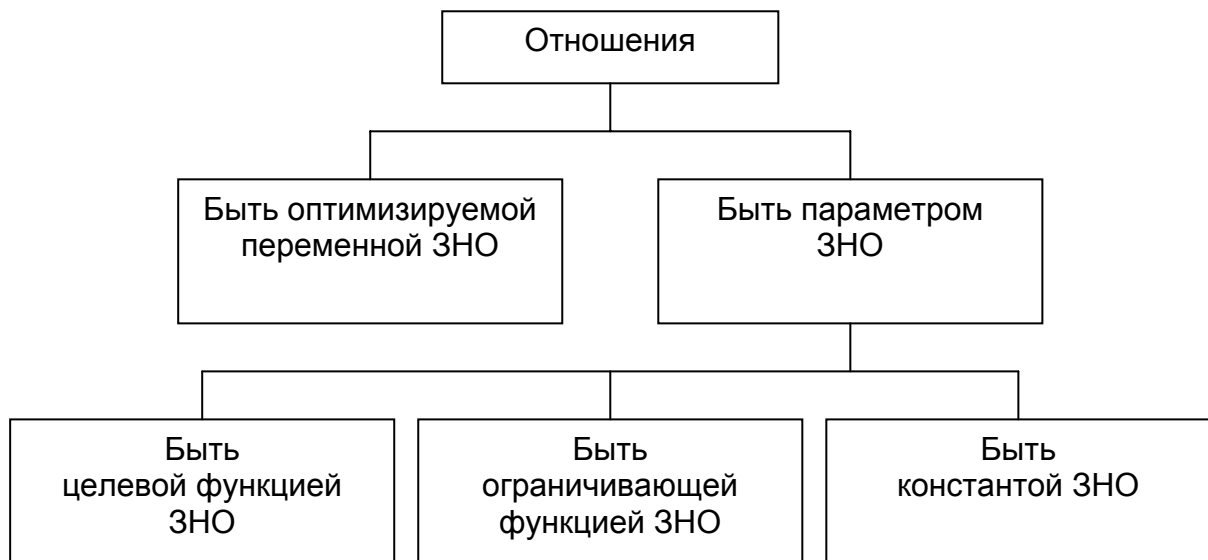


Рис. 10. Схема классификации отношений

вать оптимизируемые переменные ЗНО, которые всегда являются «четкими» величинами.

Элементы второй группы описывают эффекты, получаемые от реализации принятого решения ЗНО. В теории эффективности целенаправленных процессов [17] выделяют эффекты двух видов: целевые эффекты и обеспечивающие эффекты (они «обеспечивают» получение целевых эффектов). Примеры целевых эффектов: значение показателя огневой мощи ударной группировки сил; значение показателя живучести воинского формирования; значение показателя надежности создаваемого образца вооружения. Примеры обеспечивающих эффектов: затраты материальных (вещественных и энергетических) ресурсов на реализацию действий в планируемой операции (затраты денег, живой силы, снарядов, горюче-смазочных материалов и т. п.); затраты времени на реализацию действий в планируемой операции.

Элементы третьей группы — это особые элементы ЗНО. Они описывают (измеряют) возможность того, что целевые и/или обеспечивающие эффекты при том или ином решении ЗНО будут иметь значения не хуже тех, которые требуется получить в результате операции.

Примеры: если требуется, чтобы целевой эффект  $\tilde{f}$  (например, характеристика скорострельности создаваемого танка) был не меньше директивной величины  $f^0$ , то возможность этого соответствует значению функции  $M_{\tilde{f}}$  в точке  $f^0$ ; если требуется, чтобы обеспечивающий эффект  $\tilde{c}$  (например, затраты

денег на создание воинского формирования) был не больше директивной величины  $c^d$ , то возможность этого соответствует значению функции  $L_{\tilde{c}}$  в точке  $c^d$ . Таким образом, элементами третьей группы являются функции  $M$  и/или  $L$  (в данных примерах —  $M_{\tilde{f}}$  и  $L_{\tilde{c}}$ ) и директивные значения эффектов (в данных примерах —  $f^d$  и  $c^d$ ).

Как следует из изложенного, элементы второй и третьей групп формируют

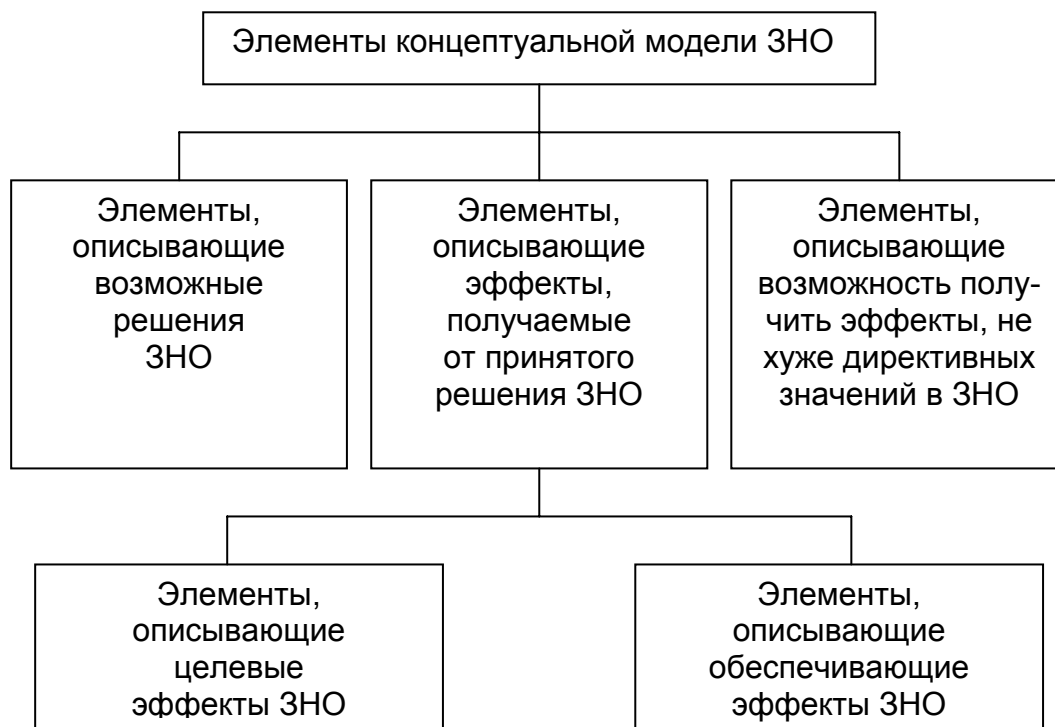


Рис. 11. Схема классификации элементов концептуальной модели

параметры ЗНО: они являются либо константами (как  $f^d$  и  $c^d$ ), либо функциями оптимизируемых переменных, изменяющими свое значение лишь в связи с изменением значений оптимизируемых переменных. Любая из этих функций может быть или целевой или ограничивающей функцией ЗНО или участвовать в их формировании.

От особенностей функций второй и третьей групп и их роли в математической модели ЗНО зависит класс, к которому должна быть отнесена задача, и метод ее решения. Классификация ЗНО показана на рис. 12.

Выделяются два класса ЗНО:

- ЗНО, требующие корректировки;
- ЗНО, не требующие корректировки.

К первому классу относится такая ЗНО, в математической модели которой либо целевая, либо ограничивающая функция (либо и та, и другая) является нечеткой. По значению нечеткой величины, в общем, нельзя выбрать ни допустимое, ни лучшее решение ЗНО. Корректировка требуется, чтобы и целевая, и ограничивающая функции стали четкими. К первому классу должна быть отне-



сена и такая ЗНО, в математической модели которой либо целевой, либо ограничивающей функцией (либо и той, и другой) является функция принадлежности НВ. Функция принадлежности, хоть и является четкой, фиксирует возможность лишь того, что соответствующая нечеткая величина попадет в некоторую точку заданного интервала. Она не фиксирует возможность и, соответственно, не позволяет, в общем, гарантировать, что НВ не попадет в какую-либо другую (нежелательную) точку этого интервала. Тогда как, например, в задачах военно-экономического анализа и экспертизы (ВЭАиЭ), формулируемых, как правило, в

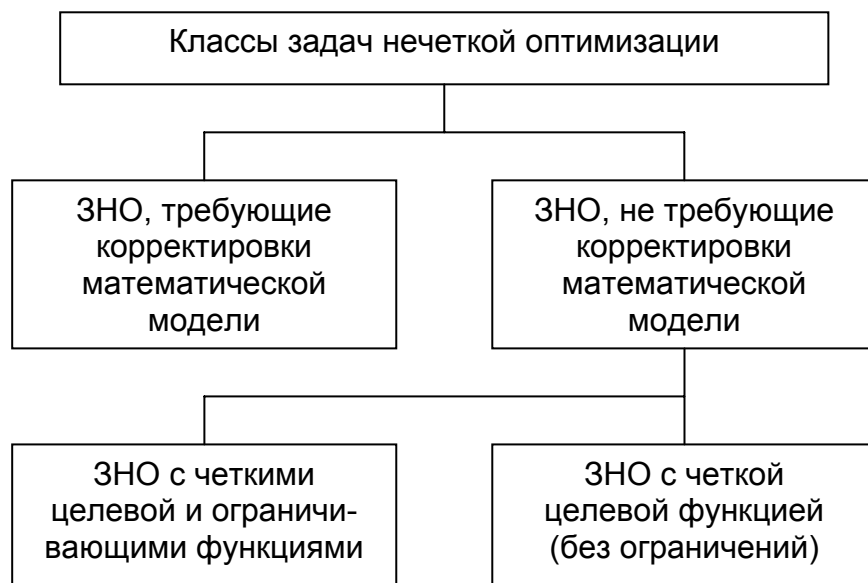


Рис. 12. Схема классификации задач нечеткой оптимизации

соответствии с «принципом оправданного пессимизма» [18], требуется гарантировать такую возможность. Корректировка заключается в переходе к четким функциям  $M$  и/или  $L$ . Классификация методов решения ЗНО показана на рис. 13.

Как видно из рисунка, методы разделяются на две группы: методы, трансформирующие исходную задачу; методы, не трансформирующие исходную задачу.

К методам первой группы относят, так называемые, прямые и непрямые методы решения ЗНО [19]. Особенность прямых методов состоит в том, что в них используются «совместные» ФП нечетких величин, входящих в выражения нечетких ограничивающих функций. Правила получения этих функций отсутствуют, в связи с чем эти «совместные» ФП должны задаваться лицом, принимающим решение (ЛПР). Не требует доказательства, что трудность задания «совместной» ФП нечетких величин не меньше, чем трудность задания (или экспериментального определения) законов распределения вероятностей случайных векторов, включающих зависимые компоненты [20]. Вызывает сомнение, что ЛПР сможет решить эту задачу.

Особенность непрямых методов решения ЗНО состоит в том, что исходная ЗНО заменяется «эквивалентной четкой задачей», однако постулирующаяся «эквивалентность» таковой не является, так как не доказывается совпадение

решения исходной ЗНО и решения заменяющей ее «эквивалентной четкой задачи». При этом использование, например, замены нечетких величин ЗНО их модами (что соответствует усреднению параметров задачи при принятии решений в условиях риска [18]) заведомо приводит к получению приближенного решения, которое может существенно отличаться от решения исходной ЗНО.

Таким образом, методы решения ЗНО, трансформирующие исходную за-

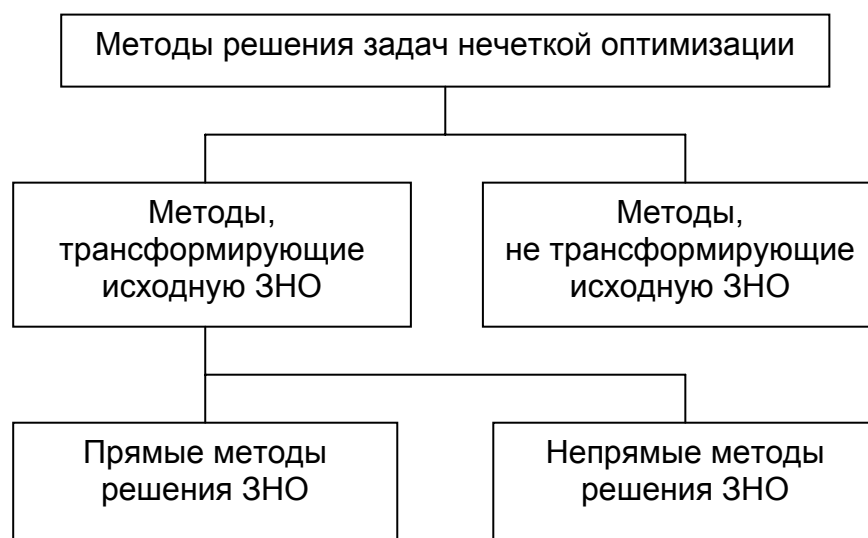


Рис. 13. Схема классификации методов решения ЗНО

дачу, могут дать лишь приближенное ее решение, но не позволяют оценить его погрешность. Следует отметить, что постановки «эквивалентных четких задач», к которым переходят, вводя «построчные ограничения по нечеткости» [19], обладают следующей особенностью. Они позволяют получить решение трансформированной задачи, при котором либо максимизируется, либо ограничивается мера возможности того, что НВ целевой и/или ограничивающей функций примет заданное значение. Но при этом никак не оценивается и не учитывается возможность того, что эта НВ примет другое значение из области определения ФП. Не вызывает сомнения, что такое решение ЗНО может на практике привести к недопустимым ошибкам, особенно в области ВЭАиЭ.

Предлагаемый подход к постановке задач нечеткой оптимизации и методы их решения позволяют преодолеть перечисленные выше семантические некорректности: не требуется трансформировать исходную ЗНО; дается правило, определяющее ФП нечеткой арифметической функции в рамках разработанной алгебры; используются апробированные методы «четкой» оптимизации для поиска решения.

Для того чтобы проиллюстрировать особенности предлагаемого подхода к постановке и решению ЗНО, рассмотрим упрощенный пример.

#### IV. Пример постановки и решения задачи нечеткой оптимизации

Задача заключается в следующем. Предполагается создать два технических устройства (ТУ), которые должны функционировать совместно (в комплек-

се) в нагруженном (НР) и в ненагруженном, «ослабленном» (ОР), режимах функционирования. Характеристиками  $i$ -го ТУ,  $i = 1, 2$ , являются его характеристики  $u_{Hi}$  — в НР и  $u_{Oi}$  — в ОР при совместном функционировании с другим ТУ (из комплекса).

Для  $i$ -го ТУ эти характеристики прямо пропорциональны количеству  $x_i$  финансовых средств, выделенных на его создание. Причем зависимости для функционирования в НР и для функционирования в ОР различны и задаются нечеткими арифметическими функциями следующего вида:

$$\tilde{u}_{Hi} = \tilde{a}_{Hi}x_i - \tilde{b}_{Hi}, \quad \tilde{u}_{Oi} = \tilde{a}_{Oi}x_i - \tilde{b}_{Oi}.$$

В них  $\tilde{a}_{Hi}$ ,  $\tilde{b}_{Hi}$ ,  $\tilde{a}_{Oi}$  и  $\tilde{b}_{Oi}$  — нечеткие числа с заданными ФП  $\mu_{\tilde{a}_{Hi}}$ ,  $\mu_{\tilde{b}_{Hi}}$ ,  $\mu_{\tilde{a}_{Oi}}$  и  $\mu_{\tilde{b}_{Oi}}$ ,  $i = 1, 2$ .

Характеристики комплекса ТУ (КТУ):  $\tilde{u}_H$  — в НР и  $\tilde{u}_O$  — в ОР — задаются следующим образом:

$$\tilde{u}_H = \tilde{u}_{H1} + \tilde{u}_{H2}, \quad \tilde{u}_O = \tilde{u}_{O1} + \tilde{u}_{O2}.$$

Для финансирования обоих проектов (создание 1-го ТУ и создание 2-го ТУ) выделены финансовые средства в количестве  $c$  единиц.

Требуется так распределить выделенные финансовые средства  $c$  между двумя проектами, чтобы с уровнем гарантии  $\gamma_H$  достигалась максимально возможная характеристика КТУ в НР и при этом с уровнем гарантии  $\gamma_O$  обеспечивалась бы характеристика КТУ в ОР не менее  $u_{OГ}$  единиц.

Как видно,  $\tilde{u}_H$  и  $\tilde{u}_O$  — функции «четкого» вектора  $x_{<2>}^d = \langle x_1, x_2 \rangle$  — решения ЗНО. В нем  $x_1$  — количество финансовых средств, выделенных на создание 1-го ТУ, а  $x_2$  — количество финансовых средств, выделенных на создание 2-го ТУ. Понятно, что  $0 \leq x_1, x_2 \leq c$ . Обозначим:  $u_{HГ}$  — гарантируемая характеристика КТУ в НР;  $x_{<2>}^*$  — оптимальное значение вектора  $x_{<2>}$ ;

$$C(x_{<2>}^d) = x_1 + x_2.$$

Приведем формальную постановку ЗНО.

$$\text{Дано: } \mu_{\tilde{a}_{H1}}, \mu_{\tilde{b}_{H1}}, \mu_{\tilde{a}_{O1}}, \mu_{\tilde{b}_{O1}}, \mu_{\tilde{a}_{H2}}, \mu_{\tilde{b}_{H2}}, \mu_{\tilde{a}_{O2}}, \mu_{\tilde{b}_{O2}}, c, \gamma_H, \gamma_O, u_{OГ}. \quad (1)$$

Найти  $x_{<2>}^*$ :

$$u_{HГ}(x_{<2>}^*) = \max_{x_{<2>_j \geq 0} \left\{ u_{HГ}(x_{<2>_j} \right\}, \quad (2)$$

$$M_{\tilde{u}_H}(u_{HГ}(x_{<2>_j})) \geq \gamma_H, \quad (3)$$

$$M_{\tilde{u}_{Hi}}(0) = 1, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$M_{\tilde{u}_O}(u_{OГ}) \geq \gamma_O, \quad (5)$$

$$M_{\tilde{u}_{Oi}}(0) = 1, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$C(x_{<2>_j}) \leq c. \quad (7)$$

В этой постановке равенства (4) и (6) задают естественные ограничения на значения  $\tilde{u}_{Hi}$  и  $\tilde{u}_{Oi}$ : они не должны быть отрицательными.

Для того чтобы разработать метод решения задачи (1)–(7), необходимо от формальной постановки ЗНО перейти к ее математической модели. Переход выполняется добавлением к системе (1)–(7) тех соотношений, которые позволяют рассчитать значения целевой функции (2) и ограничивающих функций (3)–(7) задачи при любом  $j$ -м фиксированном значении  $x_{<2>j}$  ее возможного решения. Эти соотношения имеют следующий вид:

$$\tilde{u}_H(x_{<2>j}) = \sum_{i=1,2} \tilde{u}_{Hi}(x_{<2>j}); \quad (8)$$

$$\tilde{u}_{Hi}(x_{<2>j}) = \tilde{a}_{Hi}x_i - \tilde{b}_{Hi}, x_i \in x_{<2>j}, i = 1, 2; \quad (9)$$

$$\tilde{u}_O(x_{<2>j}) = \sum_{i=1,2} \tilde{u}_{Oi}(x_{<2>j}); \quad (10)$$

$$\tilde{u}_{Oi}(x_{<2>j}) = \tilde{a}_{Oi}x_i - \tilde{b}_{Oi}, x_i \in x_{<2>j}, i = 1, 2. \quad (11)$$

Совокупность выражений (1)–(11) образует математическую модель ЗНО. Как видно, ЦФ  $u_{HG}(x_{<2>j})$  является возможной формой АНФ  $\tilde{u}_H(x_{<2>j})$  и зависит линейно от вектора  $x_{<2>j}$  оптимизируемых переменных. Кроме того, АНФ  $\tilde{u}_O(x_{<2>j})$  тоже является линейной функцией  $x_{<2>j}$ . Свойство линейности  $\tilde{u}_H$ ,  $u_{HG}$  и  $\tilde{u}_O$  как функций  $x_{<2>}$  будет использоваться при решении задачи.

Ограничивающие функции  $M_{\tilde{u}_H}$ ,  $M_{\tilde{u}_O}$ ,  $M_{\tilde{u}_{Hi}}$  и  $M_{\tilde{u}_{Oi}}$ ,  $i = 1, 2$ , не линейно зависят от  $x_{<2>}$ , но монотонны на множестве  $X_{<2>e}^d = [0, c] \times [0, c]$  возможных решений ЗНО. С учетом того, что функция  $C(x_{<2>j})$ , ограничивающая затраты на оба проекта создания ТУ, зависит линейно от  $x_{<2>j}$ , можно заключить, что особенности ограничивающих и целевой функций позволяют использовать для решения задачи идеи линейного программирования.

В рассматриваемом примере используется графический метод решения задачи. Для его применения необходимо уяснить, как изменяются ограничивающие функции в области  $X_{<2>e}$  и как изменяется целевая функция в области  $X_{<2>o}$  допустимых (по ограничениям) значений  $x_{<2>}$ :  $X_{<2>o} \subseteq X_{<2>e}$ .

Положим, что функции принадлежности нечетких величин  $\tilde{a}_{Hi}$ ,  $\tilde{b}_{Hi}$ ,  $\tilde{a}_{Oi}$  и  $\tilde{b}_{Oi}$ ,  $i = 1, 2$ , заданы в следующем виде:

$$\mu_{\tilde{a}}(a) = \left[ \frac{a - a'}{a^* - a'} \right]^{4(a^* - a')/(a'' - a')} \left[ \frac{a'' - a}{a'' - a^*} \right]^{4(a'' - a^*)/(a'' - a')}, \text{ если } a \in O_{\tilde{a}};$$

$$\mu_{\tilde{a}}(a) = 0, \text{ если } a \notin O_{\tilde{a}}.$$

Значения параметров функций принадлежности  $\mu_{\tilde{a}_{Hi}}$ ,  $\mu_{\tilde{b}_{Hi}}$ ,  $\mu_{\tilde{a}_{Oi}}$  и  $\mu_{\tilde{b}_{Oi}}$ ,  $i = 1, 2$ , приведены в табл. 1.

Размерность НВ  $\tilde{a}_{Hi}$  и  $\tilde{a}_{Oi}$  — единица характеристики/ единица финансовых средств (е.х./ е.ф.с.), размерность НВ  $\tilde{b}_{Hi}$  и  $\tilde{b}_{Oi}$  — е.х. На рис. 14 показаны графики 1–4 соответственно ФП  $\mu_{\tilde{a}_{H1}}$ ,  $\mu_{\tilde{b}_{H1}}$ ,  $\mu_{\tilde{a}_{O1}}$  и  $\mu_{\tilde{b}_{O1}}$ . Остальные исходные данные задачи имеют следующие значения:

$c=20$  е.ф.с.,  $\gamma_H=0,995$ ,  $\gamma_O=0,99$ ,  $u_{OГ}=30$  е.х.

График АНФ  $\tilde{u}_{H1}(x)$  показан на рис. 15. На нем показаны лишь три особых графика из континуального множества графиков функций, являющихся возможными значениями АНФ  $\tilde{u}_{H1}(x)$ . Это графики «граничных» функций  $u'_H(x)$ ,  $u''_H(x)$

Таблица 1. Значения параметров нечетких величин

Наименование параметра НВ	Обозначение нечеткой величины							
	$\tilde{a}_{H1}$	$\tilde{b}_{H1}$	$\tilde{a}_{H2}$	$\tilde{b}_{H2}$	$\tilde{a}_{O1}$	$\tilde{b}_{O1}$	$\tilde{a}_{O2}$	$\tilde{b}_{O2}$
Минимальное значение НВ	4	7,0	1,25	5,5	1,25	5,5	4	7,0
Модальное значение НВ	6	10,0	3,00	8,0	3,00	8,0	6	10,0
Максимальное значение НВ	10	11,2	20,0	8,8	20,0	8,8	10	11,2

и график функции  $u_H^*(x)$  — модального значения функции  $\tilde{u}_{H1}(x)$ . Они обозначены, соответственно, знаками «/», «//» и «\*» в кружках.

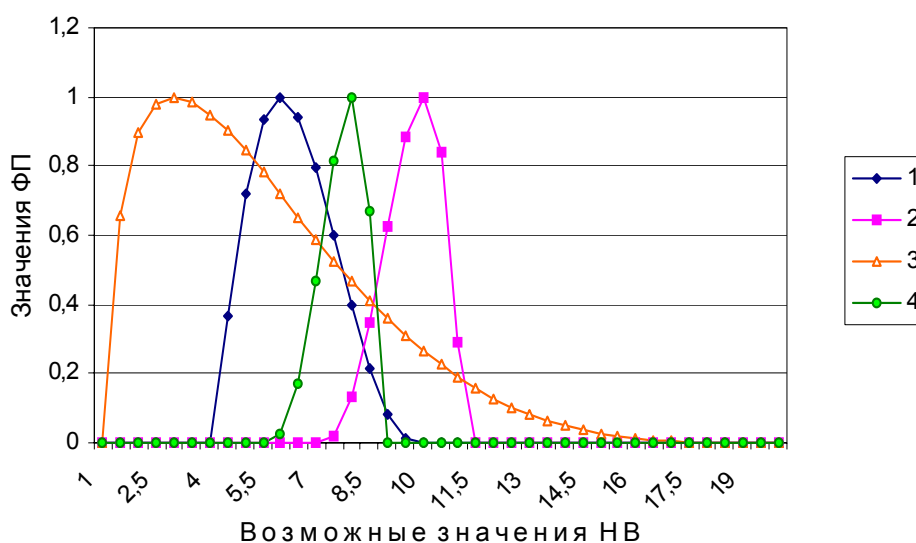


Рис. 14. Графики функций  $\mu_{\tilde{a}_{H1}}$ ,  $\mu_{\tilde{b}_{H1}}$ ,  $\mu_{\tilde{a}_{O1}}$  и  $\mu_{\tilde{b}_{O1}}$

На рис. 15 показаны значения ФП  $\mu_{\tilde{u}_{H1}}(u_{H1})$  АНФ  $\tilde{u}_{H1}(x)$  при некоторых значениях  $x$  (ось  $0\mu_{\tilde{u}_{H1}}$  совпадает с осью  $0x$ ). Как видно из графика, если зафиксировать  $\tilde{u}_{H1}(x)$ , например  $\tilde{u}_{H1}(x) = u_1$ , то с увеличением  $x$  значение  $M_{\tilde{u}_{H1}}(u_1)$  тоже увеличится: от 0, при  $x = x_1$ , до 1, при  $x = x_4$ .

Обозначим  $M_{\tilde{u}_{H1}}(u_1; x_j)$  — значение  $M_{\tilde{u}_{H1}}(u_1)$  при  $x = x_j$ ,  $M_j = M_{\tilde{u}_{H1}}(u_1; x_j)$ .

Тогда  $0 = M_1 < M_2 < M_3 < M_4 = 1$ . Иначе:

$$\frac{\partial M_{\tilde{u}_{H1}}(u_1; x)}{\partial x} > 0, \text{ если } x \in (x_1, x_4);$$

$$\frac{\partial M_{\tilde{u}_{H1}}(u_1; x)}{\partial x} = 0, \text{ если } x \notin (x_1, x_4).$$

Зафиксируем  $x$ , например  $x = x_3$ . Тогда с увеличением  $\tilde{u}_{H1}$ , например от

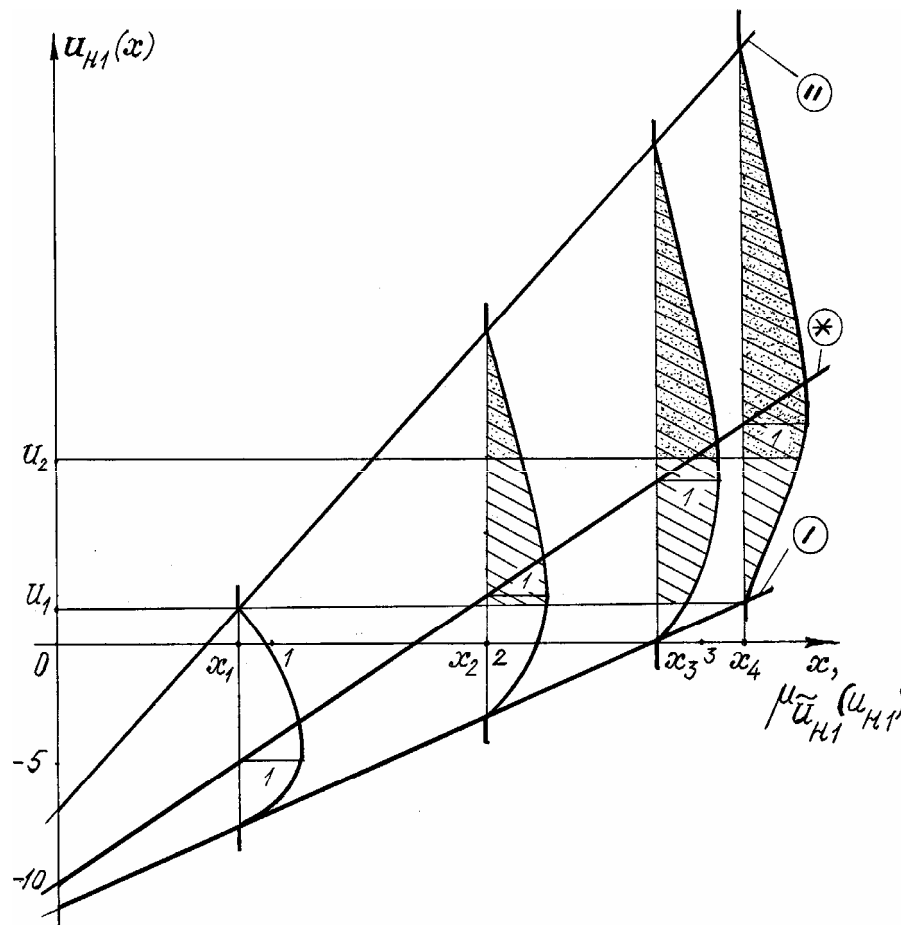


Рис. 15. Графики функций  $\tilde{u}_{H1}(x)$  и  $\mu_{\tilde{u}_{H1}}(u_{H1})$

$u_1$  до  $u_2$ , значение  $M_{\tilde{u}_{H1}}(u; x_3)$  уменьшится:

$$\frac{\partial M_{\tilde{u}_{H1}}(u; x_3)}{\partial u} < 0, \text{ если } u \in (u'_{H1}(x_3), u''_{H1}(x_3));$$

$$\frac{\partial M_{\tilde{u}_{H1}}(u; x_3)}{\partial u} = 0, \text{ если } u \notin (u'_{H1}(x_3), u''_{H1}(x_3)).$$

Подобно этому изменяются графики АНФ  $\tilde{u}_{H2}$ ,  $\tilde{u}_{O1}$ ,  $\tilde{u}_{O2}$  и соответствующие производные функций  $M_{\tilde{u}_{H2}}(u_1)$ ,  $M_{\tilde{u}_{O1}}(u_1)$  и  $M_{\tilde{u}_{O2}}(u_1)$ .

График функции  $\tilde{u}_H(x_{<2>})$  показан на рис. 16. На нем нанесены только три характерные плоскости из области  $G_{\tilde{u}_H}$  возможных графиков  $u_H(x_{<2>})$  функции  $\tilde{u}_H(x_{<2>})$ : границы  $u'_H(x_{<2>})$  и  $u''_H(x_{<2>})$  области  $G_{\tilde{u}_H}$  в двух квадрантах и мода  $u^*_H(x_{<2>})$ .

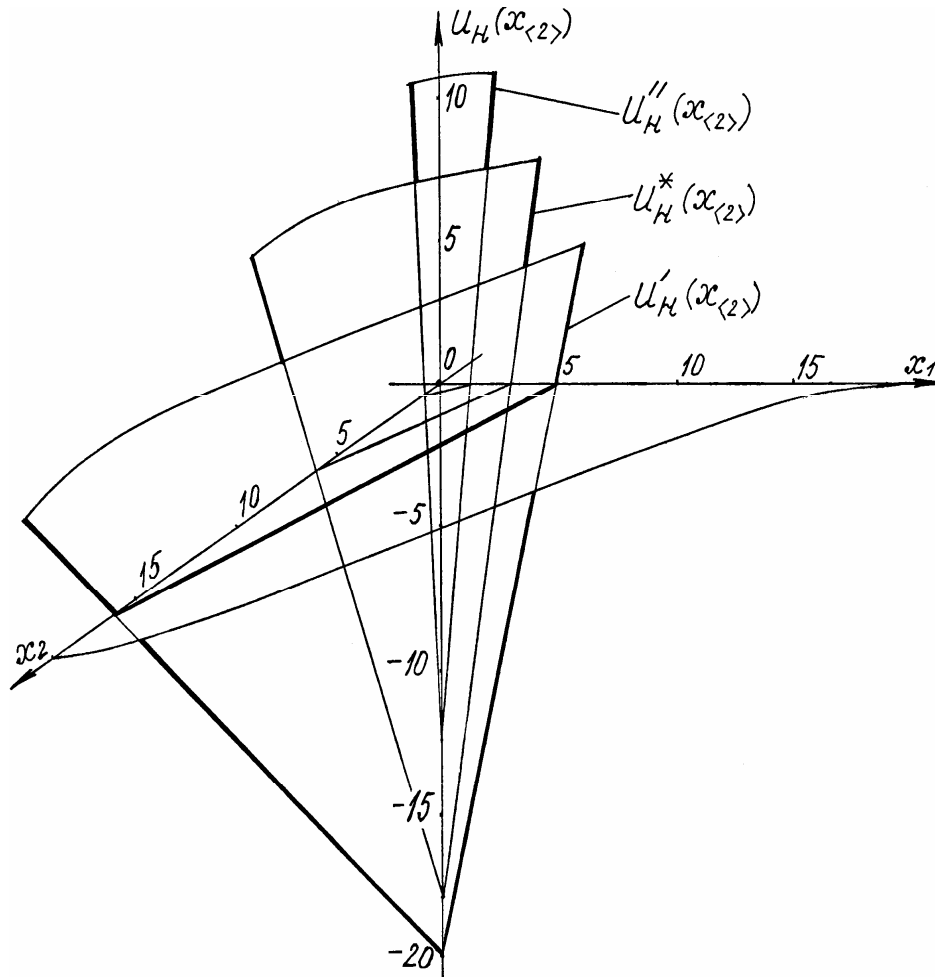


Рис. 16. График функции  $\tilde{u}_H(x_{<2>})$

Область  $G_{\tilde{u}_H}$  включает континуальное множество плоскостей, пересекающих ось  $0u$  и расходящихся веером между плоскостями  $u'_H(x_{<2>})$  и  $u''_H(x_{<2>})$ . График функции  $\tilde{u}_o(x_{<2>})$  имеет подобный вид.

На рис. 17 показаны линии 1, 2 и 3 пересечения плоскостей  $u''_H(x_{<2>})$ ,  $u^*_H(x_{<2>})$  и  $u'_H(x_{<2>})$  с плоскостью  $x_1 0 x_2$ , уравнение которой  $u(x_{<2>}) = 0$ . Кроме того, нанесены линии 4, 5 и 6 пересечения плоскостей  $u''_o(x_{<2>})$ ,  $u^*_o(x_{<2>})$  и  $u'_o(x_{<2>})$  графика функции  $\tilde{u}_o(x_{<2>})$  с плоскостью  $x_1 0 x_2$ .

Отметим три свойства функции  $\tilde{u}_H(x_{<2>})$  и соответствующей функции  $M_{\tilde{u}_H}(u)$ .

Доказательство этих свойств почти тривиально и следует из описанных особенностей функций  $\tilde{u}_{Hi}(x_{<2>})$  и  $M_{\tilde{u}_{Hi}}(u)$ .

**Свойство 1.** В области определения функции  $\tilde{u}_H(x_{<2>})$  существуют два направления, изменение  $x_{<2>}$  по которым не ведет к изменению  $M_{\tilde{u}_H}(u)$  для любого фиксированного  $u$ .

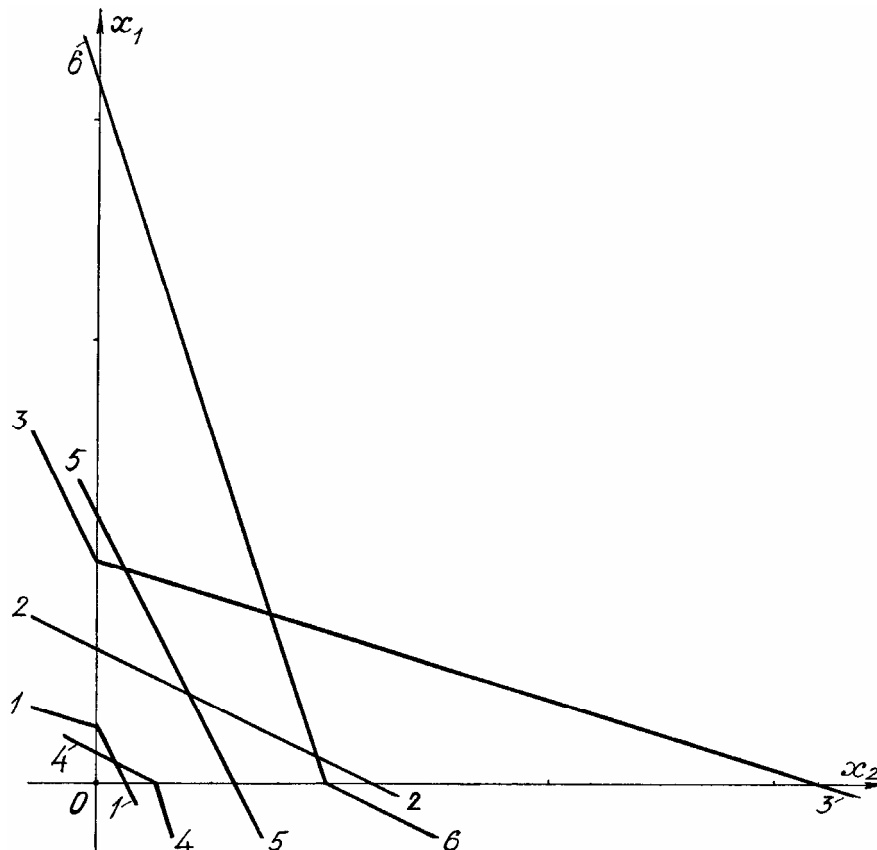


Рис. 17. Графики сечений функций  $\tilde{u}_H(x_{<2>})$  и  $\tilde{u}_O(x_{<2>})$

Линию, задающую такое направление, будем называть *изоэмой*. При каждом фиксированном  $u$  изоэмы — это проекции на плоскость  $x_1Ox_2$  линий пересечения плоскостей  $u'_H(x_{<2>})$  и  $u''_H(x_{<2>})$  с плоскостью  $u_H(x_{<2>}) = u$ . Проекцию линии пересечения плоскости  $u'_H(x_{<2>})$  с плоскостью  $u_H(x_{<2>}) = u$  будем называть *первой изоэмой*. Проекцию линии пересечения плоскости  $u''_H(x_{<2>})$  с плоскостью  $u_H(x_{<2>}) = u$  будем называть *второй изоэмой*.

**Свойство 2.** Перемещение от второй изоэмы к первой изоэме ведет к возрастанию  $M_{\tilde{u}_H}(u)$  от 0 до 1.

**Свойство 3.** Увеличение  $u$  на  $\Delta u$  приводит к эквидистантному перемещению первой и второй изоэм вдоль координатных осей, соответственно, на  $\Delta' x_{<2>} = (\Delta u/a'_1, \Delta u/a'_2)$  и на  $\Delta'' x_{<2>} = (\Delta u/a''_1, \Delta u/a''_2)$ .

На рис. 18 показаны первые (линии 5 и 6) и соответствующие им вторые (линии 2 и 3) изоэмы при значениях  $u_H(x_{<2>}) = 35,0$  и  $u_H(x_{<2>}) = 40,48$ . Приращению  $\Delta u = 5,48$  соответствуют приращения:



$$\Delta'x_{<2>} = (1,37; 4,384), \Delta''x_{<2>} = (0,548; 0,274).$$

Таковыми же свойствами обладают функции  $\tilde{u}_0(x_{<2>})$  и  $M_{\tilde{u}_0}$ .

С учетом вышеизложенного кратко опишем алгоритм решения задачи (1)–(11). Он включает три шага, выполняемых в плоскости  $x_1Ox_2$  и проиллюстриро-

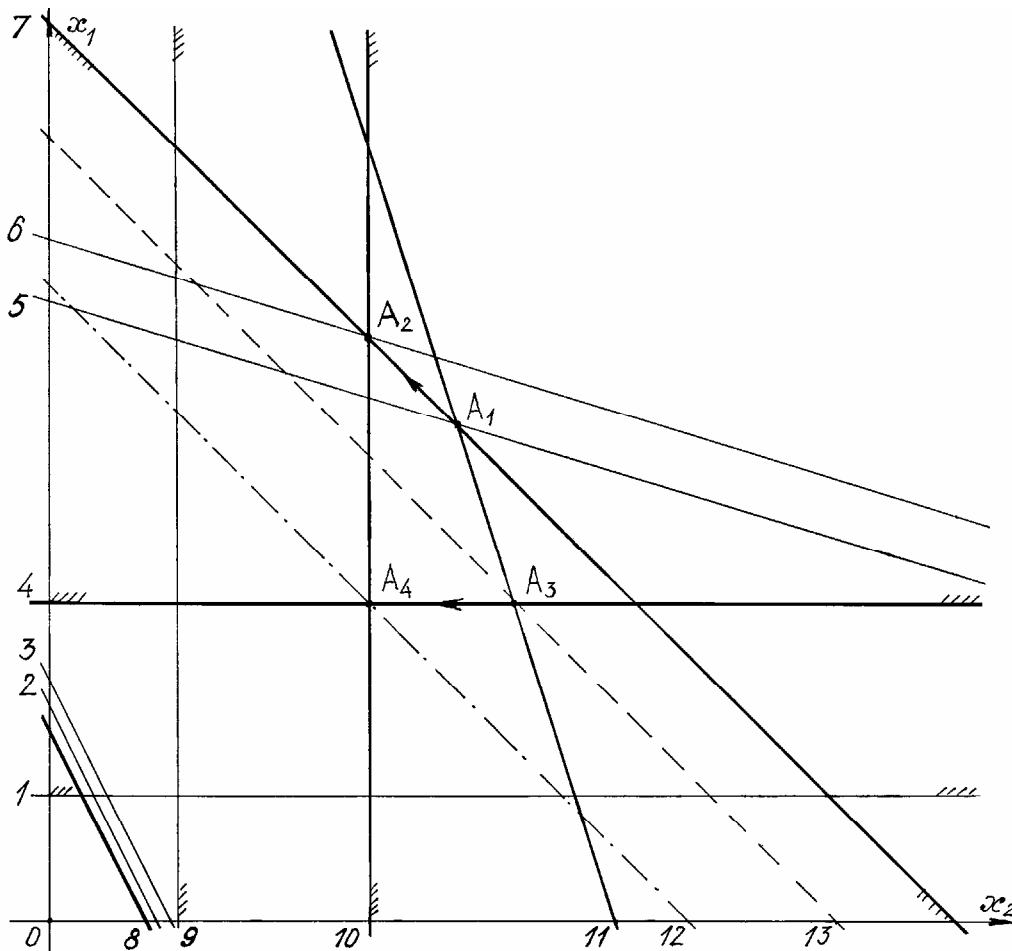


Рис. 18. График множеств возможных и допустимых значений  $X_{<2>}$

ванных на рис. 18:

1. Нанесение границ множества допустимых решений;
2. Указание (нанесение) точки начального приближения к решению;
3. Переход в точку оптимума.

Рассмотрим эти шаги.

Шаг 1. Множество допустимых решений — это все те неотрицательные  $x_{<2>}$ , которые удовлетворяют ограничениям (3)–(7) задачи. Кроме того, понятно, что  $u_{НГ}(x_{<2>}) \geq 0$ .

Нанесение границ для отделения неотрицательных  $x_{<2>}$  и тех  $x_{<2>}$ , которые удовлетворяют неравенству (7), не представляет труда. На рис. 18 ими являются оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  и прямая 7, уравнение которой соответствует неравенству (7):  $x_1 + x_2 = 20$ .

Для нанесения границ, соответствующих равенствам (4) и (6), достаточно воспользоваться свойством 2. Согласно ему, границей, задаваемой равенством

(4), является первая изоэма функции  $\tilde{u}_{hi}(x_{<2>})$ , удовлетворяющая равенству  $u'_{hi}(x_{<2>}) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Границей, задаваемой равенством (6), является первая изоэма функции  $\tilde{u}_{oi}(x_{<2>})$ , удовлетворяющая равенству  $u'_{oi}(x_{<2>}) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . На рис. 18 указанными границами являются, соответственно, прямые 1, 10, 4 и 9.

Несколько труднее нанести границу, соответствующую неравенству (5). Из свойств функций  $\tilde{u}_o(x_{<2>})$  и  $M_{\tilde{u}_o}$  следует, что эта линия лежит между прямыми 8 и 11. Их уравнения, соответственно,  $u''_o(x_{<2>}) = 30$  и  $u'_o(x_{<2>}) = 30$ . Для указания точек, лежащих на искомой границе, достаточно решить уравнение  $M_{\tilde{u}_o}(30) = 0,99$ . В рассматриваемом случае оно имеет бесчисленное множество решений. Для отыскания хоть одного допустимого решения следует воспользоваться тем, что  $M_{\tilde{u}_o}(30)$  монотонно убывает при движении из какой-нибудь точки на изоэме  $u''_o(x_{<2>}) = 30$  в направлении к изоэме  $u'_o(x_{<2>}) = 30$ . В каждой точке  $x_{<2>}$ , лежащей на искомой границе, величина  $M_{\tilde{u}_o}(30)$  рассчитывается по следующим формулам:

$$M_{\tilde{u}_o}(30) = \int_{30}^{u''_o} \mu_{\tilde{u}_o}(u) du / \int_{u'_o}^{u''_o} \mu_{\tilde{u}_o}(u) du, \quad (12)$$

$$\mu_{\tilde{u}_o}(u) = \max_{v \in [u'_{o1}, u''_{o1}]} \left\{ [\mu_{\tilde{u}_{o1}}(v)]^{l_1/m} [\mu_{\tilde{u}_{o2}}(u-v)]^{l_2/m} \right\}, \quad (13)$$

$$m = l_1 + l_2; \quad (14)$$

далее — для  $i = 1, 2$  и  $x_i \neq 0$ :

$$l_i = k_i + 1, \quad (15)$$

$$k_i = |x_i|, \quad (16)$$

$$u'_{oi} = a'_{oi+2} - b''_{oi}, \quad (17)$$

$$u''_{oi} = a''_{oi+2} - b'_{oi}, \quad (18)$$

$$u^*_{oi} = a^*_{oi+2} - b^*_{oi}, \quad (19)$$

$$\mu_{\tilde{u}_{oi}}(u) = \max_{v \in [a'_{oi+2}, a''_{oi+2}]} \left\{ [\mu_{\tilde{a}_{oi+2}}(v)]^{k_i/l_i} [\mu_{\tilde{b}_{oi}}(v-u)]^{1/l_i} \right\}, \quad (20)$$

$$a'_{oi+2} = a'_{oi} x_i, \quad (21)$$

$$a''_{oi+2} = a''_{oi} x_i, \quad (22)$$

$$\mu_{\tilde{a}_{oi+2}}(u) = \mu_{\tilde{a}_{oi}}(u/x_i). \quad (23)$$

При расчетах по формулам (13) и (20) использовалось следующее утверждение, доказательство которого тривиально.

*Утверждение.*

Пусть

$$\tilde{c} = \tilde{a} + \tilde{b},$$

$$\forall \tilde{e} \in \{\tilde{a}, \tilde{b}\} \Rightarrow \mu_{\tilde{e}}(e) = \left[ (e - e') / (e^* - e') \right]^{4(e^* - e') / (e'' - e')} \left[ (e'' - e) / (e'' - e^*) \right]^{4(e'' - e^*) / (e'' - e')},$$

если  $e \in O_{\tilde{e}} = [e', e'']$ ;

$\mu_{\tilde{e}}(e) = 0$ , если  $e \notin O_{\tilde{e}}$ .

$$\mu_{\tilde{c}}(c) = \max_{a \in O_{\tilde{a}}}^d \left\{ [\mu_{\tilde{a}}(a)]^{k_{\tilde{a}}/k_{\tilde{c}}} [\mu_{\tilde{b}}(c-a)]^{k_{\tilde{b}}/k_{\tilde{c}}} \right\}, \text{ где}$$

$$c \in O_{\tilde{c}} = [c', c''], c' = a' + b', c'' = a'' + b'', c^* = a^* + b^*, \\ k_{\tilde{c}} = k_{\tilde{a}} + k_{\tilde{b}}.$$

Тогда  
если  $c \in (c', c'')$ , то

$$\mu_{\tilde{c}}(c) = [\mu_{\tilde{a}}(a^\circ)]^{k_{\tilde{a}}/k_{\tilde{c}}} [\mu_{\tilde{b}}(c-a^\circ)]^{k_{\tilde{b}}/k_{\tilde{c}}}, \text{ где}$$

$$a^\circ = (c^* - c)k_{\tilde{a}}/k_{\tilde{c}} + c - b^*;$$

если  $c \notin (c', c'')$ , то

$$\mu_{\tilde{c}}(c) = 0.$$

Для нанесения границы, соответствующей неравенству (3), необходимо преодолеть трудности большие, чем те, что указаны для неравенства (5), так как не задано значение  $u_{НГ}$ . Более того, требуется найти  $x_{<2>}$ , при котором величина  $u_{НГ}$  была бы максимально возможной. Однако при каждом  $u_{НГ}$  положение границы может быть указано. Так, при  $u_{НГ} = 35,0$  граница лежит между прямыми 5 и 2, а все допустимые решения — между нею и прямой 5. При  $u_{НГ} = 40,48$  граница лежит между прямыми 6 и 3, а все допустимые решения — между нею и прямой 6. В каждой точке  $x_{<2>}$ , лежащей на искомой границе, величина  $M_{\tilde{u}_n}(u_{НГ})$  рассчитывается по формулам (12)–(23), в которых число 30 заменяется на значение  $u_{НГ}$ , а буква  $o$  — на  $n$ .

Шаг 2. Для указания начального приближения  $x_{<2>0}$  к решению достаточно воспользоваться вышеприведенными свойствами 2 и 3. В соответствии с ними  $x_{<2>0}$  — вектор координат точки  $A_1: x_{<2>0} = (10,91; 9,09)$ .

Шаг 3. В соответствии с указанными свойствами 1–3 точка оптимума  $x_{<2>}^*$  лежит на линии 7 между точкой  $A_1$  и точкой  $A_2(12,96; 7,04)$ . В точке  $x_{<2>}^*$  должно выполняться равенство  $M_{\tilde{u}_o}(30) = 0,99$ . Направление движения — от  $A_1$  к  $A_2$ .

При реализации 3 шага использован метод дихотомии. Для отыскания  $x_{<2>}^*$  потребовалось рассчитать  $M_{\tilde{u}_o}(30)$  лишь в 1 точке —  $A_2$  (точки левее  $A_2$  недопустимы). В ней  $x_{<2>}^* = (12,96; 7,04)$  е.ф.с.,  $M_{\tilde{u}_o}(30) = 0,9939$ . При этом  $u_{НГ}(x_{<2>}^*) = 40,48$  е.х. Таким образом, из 20 е.ф.с. должно быть выделено 12,96 е.ф.с. на создание первого ТУ и 7,04 е.ф.с. — на создание второго ТУ. Такой КТУ будет в ОР обеспечивать характеристику не менее 30 е.х. с уровнем гарантии 0,9939, а в НР — характеристику не менее 40,48 е.х. с уровнем гарантии 1.

Интерес представляет исследование того, как влияет изменение величины  $c$  на характеристики КТУ и на распределение финансовых средств между проектами. Из рис. 18 можно заключить, что уменьшение  $c$ , например до 17,34 е.ф.с., что соответствует точке  $A_3(7,04; 10,3)$  и прямой 13, ведет к уменьшению  $u_{НГ}(x_{<2>}^*)$  до 31,65 е.х. при уровне гарантии 0,995. При этом  $x_{<2>}^* = (9,28; 8,06)$

е.ф.с.,  $M_{\tilde{u}_0}(30) = 0,9902$ . Уменьшение  $c$  до 14,08 е.ф.с. (это соответствует единственной допустимой по ограничениям (4) и (6) точке  $A_4(7,04; 7,04)$  и прямой 12) ведет к снижению уровня гарантии  $M_{\tilde{u}_0}(30)$  до 0,9425, что меньше 0,99. Таким образом, точка  $x_{<2>} = (7,04; 7,04)$  е.ф.с. является недопустимым по ограничению (5) решением и уменьшение  $c$  до 14,08 е.ф.с. тоже недопустимо.

Чтобы рассчитать минимально возможное количество  $c$  для создания КТУ, удовлетворяющего ограничениям задачи, необходимо двигаться от точки  $A_3$  к точке  $A_4$  по прямой 4. Выполнив расчеты  $M_{\tilde{u}_0}(30)$  с точностью 0,001 в 6 точках (результаты приведены в табл. 2), получим минимально возможное количество  $c = 15,96$  е.ф.с.

Табл. 2. Результаты расчетов по методу дихотомии

№ точки	Значение $x_1$ , е.ф.с.	Значение $x_2$ , е.ф.с.	Значение $M_{\tilde{u}_0}(30)$
1	7,04	8,67	0,987
2	7,04	9,49	0,997
3	7,04	9,08	0,993
4	7,04	8,87	0,989
5	7,04	8,98	0,991
6	7,04	8,92	0,990

При этом  $x_{<2>}^* = (7,04; 8,92)$  е.ф.с.,  $M_{\tilde{u}_0}(30) = 0,990$ ,  $u_{HG}(x_{<2>}^*) = 23,48$  е.х. и  $M_{\tilde{u}_H}(u_{HG}(x_{<2>}^*)) = 0,995$ .

## V. Заключение

Изложенные идеи, основные понятия и математические средства нового подхода к постановке и решению задач нечеткой оптимизации требуют развития как в теории, так и в приложениях. Ограниченность финансовых и других ресурсов, которые могли бы быть привлечены для создания новых технических устройств и элементов систем разного назначения, несомненно, обостряет существующую научно-прикладную проблему в экономическом анализе. Проблема проявляется в невозможности удовлетворить требования, которые предъявляют практики (разработчики, управленцы и аналитики) к концептуальному и методологическому фундаментам своих работ, с помощью ставших традиционными средств анализа и синтеза, которые им предлагаются в рамках теоретико-вероятностной и математико-статистической парадигм. Один из путей решения этой проблемы — применение изложенного подхода к постановке и решению задач экономического анализа как задач нечеткой оптимизации.

## Литература

- [1] Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. № 8. С. 338–353.
- [2] Орловский С. А. Исчисление свойств и нечеткие множества // Нечеткие множества в информатике. 1988. Вып. 21. С. 5–13.

- [3] Fuzzy Sets: Where do We Stand? Where do We Go? // Fuzzy Sets and Systems: Special Issue. / Eds.: H.-J. Zimmermann (Ed. in Chief), D. Dubois and A. Sandri (Guest Eds.), 1997. V. 90. № 2. 160 с.
- [4] Язенин А. В. Нечеткое математическое программирование. Калинин: Изд-во Калининского гос. ун-та, 1986. 59 с.
- [5] Fuzzy approach to reasoning and decision-making. Pragma: Academia, 1992. 220 с.
- [6] Сторонин В. В., Муравник В. Б., Нехорошкин Н. И., Шкурко Ю. М. Методические основы программно-целевого бюджетного планирования в Министерстве обороны Российской Федерации. В кн.: Военный бюджет государства. Методы обоснования и анализа. М.: Военное изд-во, 2000. С. 135–145.
- [7] Методы военно-экономических исследований перспектив развития космических средств / Под ред. Е. В. Рыжова. М.: Машиностроение, 1998. 152 с.
- [8] С. В. Тимашов, М. А. Кузьмин, Ю. Н. Чилин. Оптимизация энергетических систем орбитальных пилотируемых станций: Математическое моделирование и выбор рациональных структур. М.: Машиностроение, 1986. 232 с.
- [9] И. В. Вишняков, Н. В. Хованов. Система нормативов надежности коммерческих банков: Опыт статистического анализа. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1999. 228 с.
- [10] Крапивин В. Ф. О теории живучести сложных систем. М.: Наука, 1978. 248 с.
- [11] Shi-Jay Chen, Shyi-Ming Chen. Fuzzy risk analysis based on similarity measures of generalized fuzzy numbers // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2003. V. 11. № 1. С. 45–56.
- [12] Лысенко И. В. Основы теории нечетких математических структур и ее применение. СПб.: Б. и., 1995. 162 с.
- [13] Шаханович Ю. А. Введение в современную математику. М.: Наука, 1965. 376 с.
- [14] Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 312 с. (Проблемы искусственного интеллекта).
- [15] Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 688 с.
- [16] Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А. Н. Борисов и др. М.: Радио и связь, 1989. 304 с.
- [17] Петухов Г. Б. Основы теории эффективности целенаправленных процессов. Ч. 1. Методология, методы, модели. Л.: Б. и., 1989. 660 с.
- [18] Юдин Д. Б. Задачи и методы стохастического программирования. М.: Сов. радио, 1979. 392 с.
- [19] Нечеткие системы: моделирование структуры и оптимизация. Калинин: Изд-во Калининского гос. ун-та, 1987. 131 с.
- [20] Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.