

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

В. И. Миронов, Ю. В. Миронов

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
Лаборатория нейроинформатики и интеллектуального управления
199178, Санкт-Петербург, 14 линия В.О., д.39

УДК 629.191

В. И. Миронов, Ю. В. Миронов. **Вариационный метод максимального правдоподобия** // Труды СПИИРАН. Вып. 1, т. 3. — СПб: СПИИРАН, 2003.

Аннотация. Предлагается вариационный подход для решения задач статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем по критерию максимального правдоподобия. Дается математическое обоснование метода, проводится его сопоставление с традиционным (прямым) подходом по получаемым оценкам, их точностным характеристикам и по вычислительной эффективности. Определяется конструктивный базис для разработки экономичных алгоритмов нелинейного статистического оценивания. Приводятся численные примеры определения параметров движения космических аппаратов по результатам измерений. — Библ. 20 назв.

V. I. Mironov, Y. V. Mironov. **A variational method of maximum verisimilitude** // SPIIRAS Proceedings. Issue 1, v. 3. — SPb: SPIIRAS, 2003.

Abstract. The variational method of maximum verisimilitude for problem solving of non-linear dynamic systems statistical parameter evaluation is offered. A mathematical substantiation of a method is given and exactitude performance and computing efficiency of its estimations are compared to those of the conventional approach. The design basis for development of economic algorithms of non-linear statistical estimation is determined. Numerical examples of the determination of space craft motion parameters based on the measurement's results are given. — Bibl. 20 items.

Задачи оценивания параметров состояния и характеристик динамических систем по результатам измерений имеют широкое распространение на практике. Особенно важное место они занимают на всех этапах экспериментальной отработки и эксплуатации объектов ракетно-космической техники. Наиболее сложные задачи оценивания приходится, в частности, решать при навигационно-баллистическом обеспечении полетов космических аппаратов (КА), при разработке систем автономной навигации, в ходе летных испытаний и др.

Существующие методы статистического оценивания параметров движения нелинейных динамических объектов при нелинейных моделях измерений по полной выборке достигли высокого совершенства. Они широко освещены в литературе [1,2,3,5,7,11,12,15,18,20 и др.] и позволяют, в принципе, решать широкий круг важных и сложных прикладных задач. Однако вопросы улучшения их точностных и вычислительных характеристик продолжают оставаться актуальными.

Созданная методология в основном базируется на применении метода максимального правдоподобия (и метода наименьших квадратов), который, как показывает практика, является одним из самых эффективных методов определения параметров движения. Как известно, метод максимального правдоподобия (ММП) изначально был разработан Р.Фишером применительно к модели объекта статического типа. Процедура его применения предусматривает составление функции правдоподобия и получение оптимальной оценки путем решения системы нормальных уравнений, выражающей условие максимума

этой функции. По смыслу нормальная система представляет необходимое условие оптимальности, характерное для прямых методов оптимизации.

При решении динамических задач оценивания в указанных выше методах применяются те же прямые условия оптимальности оценок, однако, теперь они рассматриваются как заданные неявно на процедурах интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений, описывающей движение объекта. Обычно оценке подлежит вектор начального состояния системы \bar{x}_0 на заданный момент t_0 .

Вместе с тем, необходимо отметить, что, в частности, для неуправляемого детерминированного объекта оптимальное значение вектора \bar{x}_0 однозначно порождает и оптимальную траекторию движения $\bar{x}(\bar{x}_0, t)$. Поэтому в данной ситуации могут быть получены необходимые условия оптимального оценивания вариационного типа. Эти условия создают новую базу для построения вычислительных алгоритмов решения данного класса задач. Настоящая работа посвящена обоснованию указанного вариационного варианта метода максимального правдоподобия. При этом предполагается рассмотрение широкого круга вопросов, связанных с

- получением и конкретизацией необходимых условий оптимальности вариационного типа для основных классов задач статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем и критерия максимального правдоподобия;
- сопоставлением прямого и вариационного подходов с позиций адекватности получаемых решений и выявления относительных вычислительных преимуществ;
- обоснованием способов приближенного определения точностных характеристик получаемых оценок при реализации вариационного варианта ММП;
- анализом конструктивных путей синтеза быстродействующих алгоритмов решения соответствующих краевых задач оптимального оценивания.

1. Постановка задачи

Традиционная задача оценивания параметров движения динамического объекта заключается в наилучшем в некотором смысле определении n -мерного вектора его исходного состояния \bar{x}_0 на заданный начальный момент времени $t = t_0$ по результатам измерений, проводимых в N точках t_i , заданных на мерном интервале $\tau = T - t_0$. В более широкой постановке одновременно требуется также оценить некоторый l -мерный вектор \bar{c} параметров модели движения.

В качестве базовой рассмотрим следующую нелинейную задачу оптимального оценивания.

Задача 1. Пусть динамика объекта описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \in [t_0, T]. \quad (1)$$

Измерениям подвергается m -мерный вектор

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}[\bar{x}(t)].$$

Измеренное значение вектора \bar{y} в момент t_i обозначим, как $\bar{y}(t_i) = \bar{y}_i$ и представим модель измерений в виде

$$\bar{y}(t_i) = \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)] + \bar{\delta}_i, \quad i = I(I)N; \quad t_i \in [t_0, T]. \quad (2)$$

Здесь $\bar{\delta}_i$ - m -мерный вектор случайных ошибок измерений, стохастическое изменение которого зададим некоторым многомерным непрерывным дифференцируемым распределением $f(\bar{\delta}_i, \bar{\alpha}_i)$ с параметрами $\bar{\alpha}_i$, отличающемся в общем случае от нормального распределения.

Требуется найти такие оценки векторов \bar{x}_0 и \bar{c} , которые обеспечивают минимальное значение функционала:

$$I = \sum_{i=1}^N \rho_i \{ \bar{y}(t_i), \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)], \bar{\alpha}_i \}, \quad (3)$$

где

$$\rho_i = \ln f_i \{ \bar{y}(t_i) - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{\alpha}_i] \}; \quad i = I(I)N. \quad (4)$$

Функции $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t)$ и $\bar{\psi}[\bar{x}(t_i)]$ будем считать однозначными, ограниченными, непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам во всей области их определения.

Нетрудно видеть, что функционал (3) есть не что иное, как логарифмическая функция правдоподобия.

Предполагается выполнение известных условий наблюдаемости [3].

2. Вариационные условия оптимальности оценок

Для решения поставленной задачи представим функционал (3) в эквивалентной интегральной форме. Для этого введем функцию

$$\rho \{ \bar{y}(t), \bar{\psi}[\bar{z}(t)], \bar{\alpha}(t) \} = \ln f \{ \bar{y}(t) - \bar{\psi}[\bar{x}(t)], \bar{\alpha}(t) \}, \quad (5)$$

где $\bar{y}(t)$ и $\bar{\alpha}(t)$ - произвольные непрерывные дифференцируемые вектор-функции, принимающие в моменты t_i , соответственно, значения \bar{y}_i и $\bar{\alpha}_i$ (например, полиномы Лагранжа).

Тогда для функционала (3) получим выражение

$$I = \int_{t_0}^T \rho \{ \bar{y}(t), \bar{\psi}[\bar{x}(t)] \} \sum_{i=1}^N \delta(t - t_i) dt, \quad (6)$$

где $\delta(t - t_i)$ - импульсная δ -функция.

Далее расширим пространство состояний путем введения дополнительного вектора $\bar{x}_l(t) = \bar{c}$ и системы

$$\dot{\bar{x}}_l(t) = \bar{\varphi}_{x_l}(\bar{x}_l, t) \equiv 0; \quad \bar{x}_l(t_0) = \bar{c}. \quad (7)$$

Тогда задача 1 преобразуется в задачу 2 для расширенного k -мерного вектора состояний $\bar{z}(t) = [\bar{x}(t), \bar{x}_l(t)]^T$, $k = n + l$.

Задача 2. Дано

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= \bar{\varphi}_z(\bar{z}, t); \quad \bar{\varphi}_z = [\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_{x_l}]^T; \\ \bar{y}(t_i) &= \bar{\psi}_i[\bar{z}(t_i)] + \bar{\delta}_i; \\ I &= \int_{t_0}^T \rho \{ \bar{y}(t), \bar{\psi}[\bar{z}(t)] \} \sum_{i=1}^N \delta(t - t_i) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Требуется найти оптимальную оценку вектора \bar{z}_0 .

Получим необходимые условия оптимальности \bar{z}_0 . Поскольку оптимальному значению \bar{z}_0 соответствует и оптимальная траектория $\bar{z}(\bar{z}_0, t)$, то и условия оптимальности этой траектории можно рассматривать в качестве условий оптимальности \bar{z}_0 . Для определения таких условий, следуя известной процедуре вариационного исчисления, введем функцию

$$H(\bar{z}, \bar{\lambda}, t) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \varphi_{z_j}(\bar{z}, t) + \rho [\bar{y}(t), \bar{\psi}(\bar{z}, t)] \sum_{i=1}^N \delta(t - t_i), \quad (9)$$

и составим расширенный функционал

$$I^* = \int_{t_0}^T \left[- \sum_{j=1}^k \lambda_j(t) \frac{\partial z_j}{\partial t} + H \right] dt. \quad (10)$$

Рассмотрим, далее первую вариацию этого функционала

$$\delta I^* = \int_{t_0}^T \left[- \sum_{j=1}^k \lambda_j(t) \delta \left(\frac{\partial z_j}{\partial t} \right) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial H}{\partial z_j} \delta z_j \right] dt. \quad (11)$$

После интегрирования по частям это выражение принимает следующий вид

$$\delta I^* = \sum_{j=1}^k \lambda_j(t_0) \delta z_j(t_0) + \sum_{j=1}^k \lambda_j(T) \delta z_j(T) + \int_{t_0}^T - \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z_j} \right) \delta z_j dt. \quad (12)$$

Необходимые условия оптимальности оценки вектора \bar{z}_0 определяются из условия равенства нулю первой вариации функционала

$$\delta I^* = 0. \quad (13)$$

Поэтому из (12) и (13) получаем следующие необходимые условия оптимальности траектории $\bar{z}(\bar{z}_0, t)$ в виде известных уравнений Эйлера

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial z_j}; \quad j = I(I)k, \quad (14)$$

и граничных условий

$$\lambda_j(t_0) = 0; \quad \lambda_j(T) = 0; \quad j = I(I)k. \quad (15)$$

Эти условия вместе с уравнениями движения (1) образуют систему уравнений, решение которой относительно неизвестного значения \bar{z}_0 и определяет как оптимальную оценку \bar{z}_0 , так и порождаемую ей траекторию $\bar{z}(\bar{z}_0, t)$.

Сформулируем данный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Оптимальная оценка вектора \bar{z}_0 в задаче 2 и порождаемая ей оптимальная траектория $\bar{z}(\bar{z}_0, t)$ доставляют решение двухточечной краевой задачи для канонической системы

$$\dot{\bar{z}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_z}; \quad \dot{\bar{\lambda}}_z = - \frac{\partial H}{\partial \bar{z}}, \quad (16)$$

при граничных условиях

$$\bar{\lambda}_z(t_0) = 0; \quad \bar{\lambda}_z(T) = 0. \quad (17)$$

Здесь $\bar{\lambda}_z$ — k -мерная вектор-функция.

Заметим, что к решению краевых задач аналогичного типа сводятся и задачи оптимального управления [17]. Это обстоятельство характеризует единст-

во математической природы задач оптимального оценивания и управления, а также свидетельствует о возможности их численного решения с помощью однотипных методов [1,9,17 и др.].

Конкретизируем условия теоремы 1 в обозначениях исходной задачи 1 применительно к некоторым типовым задачам оценивания параметров состояния по результатам измерений.

Следствие 1. Оптимальная оценка вектора \bar{x}_0 (при заданном \bar{c}) доставляет решение краевой задачи для сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t); \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial \bar{\varphi}^T}{\partial \bar{x}} \bar{\lambda} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}}[\bar{y}, \bar{\psi}(\bar{x}), t] \sum_{i=1}^N \delta(t-t_i); \\ \bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

где $\bar{\lambda}$ - n -мерная вектор-функция.

Следствие 2. Оптимальные значения векторов \bar{x}_0 и \bar{c} при их совместном оценивании выражают решение краевой задачи

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t); \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial \bar{\varphi}^T}{\partial \bar{x}} \bar{\lambda} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}}[\bar{y}, \bar{\psi}(\bar{x}), t] \sum_{i=1}^n \delta(t-t_i); \\ \dot{\bar{\mu}} = -\frac{\partial \bar{\varphi}^T}{\partial \bar{c}}(\bar{x}, \bar{c}, t) \bar{\lambda}; \\ \bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0; \quad \bar{\mu}(t_0) = \bar{\mu}(T) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

где $\bar{\mu}$ - l -мерная вектор-функция.

Следствие 3. Если критериальная функция зависит от вектора p -мерного вектора параметров \bar{c}_1 , т.е.

$$\rho(t) = \rho[\bar{y}, \bar{\psi}(\bar{x}), \bar{c}_1, t], \quad (20)$$

то оптимальные значения векторов \bar{x}_0 и \bar{c}_1 при их совместном оценивании удовлетворяют краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}_1, t); \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial \bar{\varphi}^T}{\partial \bar{x}} \bar{\lambda} + \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}}[\bar{y}, \bar{\psi}(\bar{x}), \bar{c}_1, t] \sum_{i=1}^n \delta(t-t_i); \\ \dot{\bar{\mu}} = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{c}_1}[\bar{y}, \bar{\psi}(\bar{x}), \bar{c}_1, t] \sum_{i=1}^n \delta(t-t_i); \\ \bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0; \quad \bar{\mu}(t_0) = \bar{\mu}(T) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

где $\bar{\mu}$ — p -мерная вектор-функция.

Краевые задачи (16)–(21) выражают необходимые условия оптимальности вариационного типа метода максимального правдоподобия.

Отметим особенность интегрирования сопряженной системы, которая определяется наличием в правых частях дифференциальных уравнений импульсных дельта-функций. Это вызывает в моменты t_i скачкообразное изменение соответствующих сопряженных переменных на величину производной от

критериальной функции ρ по вектору текущего состояния динамического процесса

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \Delta\bar{\lambda}(t_i); \quad (22)$$

$$\Delta\bar{\lambda}(t_i) = \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}} \{\bar{y}_i, \bar{\psi}[\bar{z}(t_i)]\}; \quad i = I(I)N. \quad (23)$$

С учетом этого обстоятельства, вводя гамильтониан

$$\tilde{H} = \bar{\lambda}^T \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t), \quad (24)$$

краевые задачи (18)-(21) можно представить в эквивалентной канонической форме. Так при оценке вектора \bar{x}_0 (следствие 1) задача (18) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\bar{\lambda}}; & \dot{\bar{\lambda}} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\bar{x}}; \\ \bar{\lambda}(t_i^+) &= \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial\rho}{\partial\bar{x}} [\bar{y}_i, \bar{\psi}(\bar{x}_i), t_i]; \\ \bar{\lambda}(t_0) &= 0; & \bar{\lambda}(T) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, рассматриваемую задачу можно интерпретировать как двухточечную краевую задачу с промежуточными ограничениями на сопряженный вектор $\bar{\lambda}(t)$.

Заметим, что аналогичные промежуточные условия возникают и в задачах оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты [17].

Приведенные выше условия оптимального оценивания нетрудно конкретизировать применительно к заданному виду распределения вектора случайных ошибок измерений [10].

Так, если для вектора $\bar{\delta}_i$ принимается нормальное распределение $N(0, K_{\delta_i})$ с нулевым вектором математического ожидания и корреляционной матрицей K_{δ_i} , что, как правило, имеет место на практике, решение задачи оптимального оценивания сводится согласно следствию 1 и представления (22) к решению краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t); & \dot{\bar{\lambda}} &= -\frac{\partial\bar{\varphi}^T}{\partial\bar{x}} \bar{\lambda}; \\ \bar{\lambda}(t_0) &= 0; & \bar{\lambda}(T) &= 0; \\ \bar{\lambda}(t_i^+) &= \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial\bar{\psi}^T}{\partial\bar{x}} K_{\delta_i}^{-1} \{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)]\}; & i &= 1(I)N. \end{aligned} \quad (26)$$

При совместной оценке векторов \bar{x}_0 и \bar{c} из условий следствия 2 и (22) приходим к следующей краевой задаче

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{c}, t); & \dot{\bar{\lambda}} &= -\frac{\partial\bar{\varphi}^T}{\partial\bar{x}} \bar{\lambda}; \\ & & \dot{\bar{\mu}} &= -\frac{\partial\bar{\varphi}^T}{\partial\bar{c}} \bar{\mu}; \\ \bar{\lambda}(t_0) &= \bar{\lambda}(T) = 0; & \bar{\mu}(t_0) &= \bar{\mu}(T) = 0; \\ \bar{\lambda}(t_i^+) &= \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial\bar{\psi}^T}{\partial\bar{x}} K_{\delta_i}^{-1} \{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)]\}; & i &= I(I)N. \end{aligned} \quad (27)$$

Полагая в (26) и (27) корреляционные матрицы равными соответствующим единичным матрицам, из (26) и (27) получаем условия, соответствующие вариационному методу наименьших квадратов.

3. Учет априорной информации

Обобщим полученные результаты на случай использования априорной информации о возможных значениях неизвестного вектора \bar{x}_0 . Будем считать, что эта информация задается априорной дифференцируемой плотностью распределения $\bar{f}(\bar{x}_0, \bar{\alpha}_0)$, где $\bar{\alpha}_0$ - вектор параметров распределения, а критерием оценивания является критерий максимума апостериорной вероятности [3]. В общем случае значение условной апостериорной плотности вероятности, согласно правилу Байеса, определяется выражением

$$f(\bar{x}_0 / \bar{y}) = \frac{f(\bar{x}_0)W(\bar{y} / \bar{x}_0)}{f(\bar{y})}, \quad (28)$$

где $f(\bar{y})$ — плотность вероятности случайного вектора измерений;

$W(\bar{y} / \bar{x}_0)$ — функция максимального правдоподобия.

В качестве оптимальной оценки примем такое значение \bar{x}_0 , которое максимизирует апостериорную плотность вероятности (28).

Если учесть, что плотность вероятности $f(\bar{y})$ не зависит от оцениваемых параметров, то в качестве критерия можно принять условие максимума показателя

$$I = f(\bar{x}_0)W(\bar{y} / \bar{x}_0), \quad (29)$$

или же условие максимума его логарифма

$$I_1 = \ln f(\bar{x}_0) + \ln W(\bar{y} / \bar{x}_0). \quad (30)$$

В рамках рассмотренной выше задачи 1 принятый показатель качества оценок (3) имеет смысл логарифмической функции правдоподобия. Поэтому выражение (30) можно записать как

$$I_1 = \ln f(\bar{x}_0) + I(x_0), \quad (31)$$

или же в виде, аналогичном (3), т.е.

$$I = \sum_{i=0}^N \rho_i \{ \bar{y}(t_i), \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)] \}, \quad (32)$$

где

$$\rho_0 = \ln f(\bar{x}_0). \quad (33)$$

а значения ρ_i при $i = I(1)N$ определяются, как и ранее, соотношениями (4).

Нетрудно видеть, что если для функционала I_1 повторить все выкладки и рассуждения, проведенные выше по отношению к показателю I при выводе необходимых условий оптимальности оценок, то в результате придем к утверждениям, аналогичным теореме 1. Сформулируем соответствующий результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Оптимальная апостериорная оценка вектора \bar{x}_0 в задаче 1 (при заданном \bar{c}) и порождаемая ей оптимальная апостериорная траектория $\bar{x}(\bar{x}_0, t)$ доставляют решение двухточечной краевой задаче для канонической системы

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \bar{\lambda}}; \quad \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \bar{x}}, \quad (34)$$

при граничных условиях (22), (23) и

$$\bar{\lambda}(t_0) = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_0} \ln f(\bar{x}_0); \quad \bar{\lambda}(T) = 0. \quad (35)$$

В частном случае, когда в качестве априорного принимается многомерное нормальное распределение

$$f(\bar{x}_0) = (2\pi)^{-1/2} |K_{\bar{x}_0}|^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}(\bar{x}_0 - \tilde{\bar{x}}_0)K_{\bar{x}_0}^{-1}(\bar{x}_0 - \tilde{\bar{x}}_0)], \quad (36)$$

для определения начального значения сопряженного вектора $\bar{\lambda}(t_0)$ в условиях (35) теоремы 2 получаем выражение

$$\bar{\lambda}(t_0) = K_{\bar{x}_0}^{-1}(\bar{x}_0 - \tilde{\bar{x}}_0). \quad (37)$$

Аналогичные теореме 2 утверждения несложно получить и для других типовых задач оптимального апостериорного оценивания при различных видах априорного распределения и распределений ошибок измерений.

4. Регуляризация оценок

Как известно, многие задачи статистического оценивания могут быть отнесены к некорректным обратным задачам. Мощным средством решения таких задач является метод регуляризации, созданный А.Н.Тихоновым, и развитый во многих работах.

В случае некорректности (плохой обусловленности) исходной задачи 1 в соответствии с методом регуляризации [15] в качестве ее приближенного решения следует принять такое значение вектора \bar{x}_0^* , на котором сглаживающий функционал

$$I_\alpha = I(x_0) + \alpha F(\bar{x}_0), \quad (38)$$

достигает своей верхней границы.

Выбор стабилизирующего функционала (стабилизатора) $F(\bar{x}_0)$ определяется характером решаемой задачи и обычно основан на априорной информации об искомых параметрах \bar{x}_0 . Параметр регуляризации α , ($\alpha > 0$) также должен быть определенным образом согласован как с априорными данными о \bar{x}_0 , так и с характеристиками ошибок измерений.

Очевидно, что необходимые условия оптимальности оценок вариационного типа применительно к функционалу I_α (38) могут быть получены по аналогии с предыдущим. Соответствующий результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Регуляризованная оценка вектора \bar{x}_0 в задаче 1 (при заданном \bar{c}) и порождаемая ей регуляризованная траектория $\bar{x}(\bar{x}_0, t)$ доставляют решение двухточечной краевой задаче для канонической системы

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \bar{\lambda}}; \quad \dot{\bar{\lambda}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \bar{x}}, \quad (39)$$

при граничных условиях (22), (23) и

$$\bar{\lambda}(t_0) = \alpha \frac{\partial F(\bar{x}_0)}{\partial \bar{x}_0}; \quad \bar{\lambda}(T) = 0. \quad (40)$$

При решении задач навигационного оценивания обычно для стабилизирующего функционала принимается выражение вида

$$F(\bar{x}_0) = (\bar{x}_{on} - \bar{x}_0)^T C (\bar{x}_{on} - \bar{x}_0). \quad (41)$$

где \bar{x}_{on} - заданный опорный вектор, близкий к истинному значению \bar{x}_0 ,

C - некоторая симметричная положительно определенная матрица.

В этом случае для определения начального значения сопряженного вектора $\bar{\lambda}(t_0)$ в условиях (40) теоремы 3 получаем расчетное соотношение

$$\bar{\lambda}(t_0) = \alpha C (\bar{x}_{on} - \bar{x}_0). \quad (42)$$

Утверждения, аналогичные приведенным в теореме 3, можно получить и для других типовых задач, связанных с определением регуляризованных оценок при различных структурах стабилизатора $F(\bar{x}_0)$ и различных видах распределений ошибок измерений.

5. Сопоставление прямого и вариационного подходов к оцениванию

1. Рассмотрим вопрос об адекватности решений, получаемых с использованием вариационных условий оптимальности, и оптимальных оценок параметров состояния нелинейной динамической системы, определяемых на основе традиционного прямого применения метода максимального правдоподобия, связанного с составлением системы нормальных уравнений и их решением.

Пусть динамика объекта описывается уравнением

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\varphi}(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \quad (43)$$

В моменты t_i , $i = 1(I)N$ на интервале $t \in [t_0, T]$ проводятся измерения параметров движения. Математическая модель связи измеряемых \bar{y}_i и оцениваемых параметров \bar{x}_0 задается, как и ранее, выражением

$$\bar{y}_i = \bar{\psi}(\bar{x}_i) + \bar{\delta}_i; \quad \bar{\delta}_i \rightarrow N(0, K_{\delta_i}). \quad (44)$$

Требуется найти оценку вектора начального состояния \bar{x}_0 по критерию минимума квадратического функционала

$$I = \sum_{i=1}^N [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i)]^T K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i)]. \quad (45)$$

Традиционные необходимые условия оптимальности оценки представляются в виде прямых условий экстремума по \bar{x}_0

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{x}_0} = 0. \quad (46)$$

Эту систему уравнений принято называть нормальной. Для функционала (45) она принимает следующий конкретный вид

$$\bar{f}(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^N U^T(t_i, t_0) \frac{\partial \psi^T}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i)], \quad (47)$$

где $U(t, \tau)$ — нормированная фундаментальная матрица решений линейного уравнения

$$\dot{\bar{\xi}} = \frac{\partial \bar{\varphi}(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \bar{\xi}, \quad (48)$$

получаемого линеаризацией исходной системы (43).

Вариационные условия оптимальности решения задачи (43)–(45) характеризуются двухточечной краевой задачей (26). В силу линейности сопряженной системы данная краевая задача сводится к решению уравнения

$$\bar{\lambda}(T, \bar{x}_0) = \sum_{i=1}^N V(T, t_i) \frac{\partial \psi^T}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i)] = 0, \quad (49)$$

где $V(t, \tau)$ — нормированная фундаментальная матрица решений однородной сопряженной системы

$$\dot{\bar{\lambda}} = - \frac{\partial \bar{\varphi}^T(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \bar{\lambda}. \quad (50)$$

Уравнения (47) и (49) заданы неявно на траекториях системы (43).

Краевое уравнение (49) является вариационным аналогом нормальных уравнений метода максимального правдоподобия.

Покажем, что оптимальные оценки, получаемые на основе решения нормальной системы (47) и краевого уравнения (49), совпадают.

С этой целью, используя известное свойство фундаментальных матриц, представим

$$V(T, t_0) = V(T, t_i) V(t_i, t_0). \quad (51)$$

Отсюда находим

$$V(T, t_i) = V(T, t_0) V^{-1}(t_i, t_0). \quad (52)$$

Заметим, что нормированные фундаментальные матрицы решений однородных линейных сопряженных систем U и V удовлетворяют известному равенству

$$U^T(t, \tau) V(t, \tau) = E, \quad (53)$$

где E — единичная матрица.

На основании (53) выражение (52) для $V(T, t_i)$ можно представить как

$$V(T, t_i) = V(T, t_0) U^T(t_i, t_0). \quad (54)$$

С учетом полученного выражения вариационное условие оптимальности оценок преобразуется к следующему виду

$$V(T, t_0) \sum_{i=1}^N U^T(t_i, t_0) \frac{\partial \psi^T}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i)] = 0. \quad (55)$$

Решение этого уравнения не изменится при умножении его на постоянную матрицу. Поэтому, умножая слева на матрицу $V^{-1}(T, t_0)$, приходим от вариационных условий оптимальности (49) к традиционной системе нормальных уравнений (47). Следовательно, и оценки, получаемые при использовании каждой из двух рассматриваемых форм условий оптимальности, будут совпадать.

2. Для решения краевых задач оптимального оценивания могут привлекаться различные численные методы. Проанализируем основные особенности вычислительных процессов, связанных с получением оценок параметров состояния динамической системы на основе использования прямых и вариационных условий оптимальности, в рамках применения метода Ньютона для решения соответствующих нелинейных систем уравнений.

При использовании прямого подхода для получения оптимальных оценок необходимо решить уравнение (47), заданное неявно на процедурах интегрирования нелинейной системы дифференциальных уравнений (43), т.е. уравнение

$$\bar{f}(\bar{q}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{x}_i^T}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{\psi}^T}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i)] = 0, \quad (56)$$

где обозначено $\bar{q} = \bar{x}_0$;

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{q}} = U(t_i, t_0). \quad (57)$$

Применение метода Ньютона дает следующий вычислительный процесс

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k - \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} \right]_k^{-1} \bar{f}(\bar{q}_k). \quad (58)$$

Полагаем $\det \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} \right]_k \neq 0$.

На практике применяются различные варианты приближенной алгоритмической реализации этого процесса, отличающиеся способами вычисления вектор - функции $\bar{f}(\bar{q}_k)$, матрицы $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}}$ и ее обращения. Однако с принципиальных позиций необходимо отметить следующее. Во всех случаях необходимо для расчета $\bar{f}(\bar{q}_k)$ определять систему матриц частных производных $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{q}}$ от

текущих по неизвестным начальным параметрам движения. Именно необходимость вычисления этих матриц определяет во многих случаях высокую трудоемкость общего вычислительного процесса оптимального оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем. С математической точки зрения эта задача сводится к интегрированию линеаризованной системы (48).

В ряде важных прикладных задач удается получить приближенные аналитические зависимости для элементов матрицы $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{q}}$. Однако в более общей

ситуации для ее определения необходимо привлекать численные методы, основанные на применении метода конечных разностей для системы (43) или же на численном интегрировании линейных дифференциальных уравнений в вариациях (48) [5].

В первом случае на каждом шаге итерационного процесса метода Ньютона необходимо дополнительно, как минимум, n раз проводить численное интегрирование исходной нелинейной системы (43), имеющую порядок n при возмущаемых начальных условиях.

Во втором случае необходимо либо n раз совместно интегрировать расширенную систему, составленную из основного уравнения (43) и уравнения в вариациях (48), и имеющую порядок $2n$, либо совместно интегрировать систему порядка $(n^2 + 1)$ -го порядка, составленную из основной (43) и n одинаковых систем уравнений в вариациях, но имеющие различные начальные условия, соответствующие столбцам единичной матрицы размерности $n \times n$.

В первом варианте более компактна программа вычислений, что имеет существенное значение, например, для построения систем автономной навига-

ции подвижных объектов. Во втором же варианте реализации этого подхода объем программы значительно возрастает, однако существенно повышается оперативность вычислений.

При определении матрицы $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}}$ вычислительного процесса (58) используются два основных подхода [1,2,5,6,8,12,15,18,19]. Первый из них является приближенным. Он основан на том, что при дифференцировании функции $\bar{f}(\bar{q})$ в (56) опускается зависимость матриц $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{q}}$ и $\frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{x}_i}$ от неизвестного значения $\bar{q} = \bar{x}_0$, так что во внимание принимается только зависимость $\bar{\psi}_i$ от \bar{q} . В этом случае

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} = \sum_{i=1}^N H_i^T K_{\delta_i}^{-1} H_i, \quad (59)$$

где

$$H_i = \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{x}_i} \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial \bar{q}}. \quad (60)$$

С учетом (56) и (59) процесс оптимального оценивания (58) принимает вид

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k - \left[\sum_{i=1}^N H_i^T K_{\delta_i}^{-1} H_i \right]^{-1} \sum_{i=1}^N H_i^T K_{\delta_i}^{-1} \Delta \bar{y}_i(\bar{q}_k), \quad (61)$$

где

$$\Delta \bar{y}_i(\bar{q}_k) = \bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i, \bar{q}_k)]. \quad (62)$$

Использование указанного упрощения при расчете матрицы $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}}$ обеспечивает значительно более простое решение практических задач. Однако по сравнению с вариантом строгой реализации метода Ньютона это неизбежно приводит к некоторому ухудшению таких характеристик, как область и скорость сходимости.

В ряде работ [6,8,19] отмечается, что в некоторых случаях даже при обработке измерительной информации полного объема матрица

$$R = \sum_{i=1}^N H_i^T K_{\delta_i}^{-1} H_i, \quad (63)$$

все же оказывается близкой к особенной. Причиной этого является отсутствие отклика (плохой или слабый отклик) навигационной функции на изменение некоторых из уточняемых параметров.

Степень влияния данного фактора в различных условиях оценивания может изменяться в некоторых пределах — от незначительной до существенной. Чтобы ослабить эти недостатки необходимо в ходе реализации метода Ньютона точнее определить матрицу $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}}$, т.е. учесть при дифференцировании выражения (56) зависимость матрицы H_i от \bar{q} (60).

В этом случае

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} = R + B, \quad (64)$$

где

$$B = \sum_{i=1}^N G_i . \quad (65)$$

Элементы матрицы $G_i = [g_{jr}^i]$ размерности $n \times n$ вычисляются по формуле [6,8,19]

$$g_{jr}^i = \sum_p^N \sum_s^N (d_{ps}^i)^{-1} \frac{\partial^2 \psi_s^i(\bar{q}_k)}{\partial q_j \partial q_r} \Delta y_s^i , \quad (66)$$

где ψ_s^i и Δy_s^i - элементы векторов $\bar{\psi}_s$ и $\Delta \bar{y}_s$;

$(d_{ps}^i)^{-1}$ - элементы обратной корреляционной матрицы $K_{\delta_i}^{-1}$.

С учетом (64) и (56) процесс оптимального оценивания (58) принимает вид

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k - (R + B)_k^{-1} \sum_{i=1}^N H_i^T K_{\delta_i}^{-1} \Delta \bar{y}_i(\bar{q}_k) . \quad (67)$$

Более точный расчет матрицы $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}}$ способствует увеличению области и

скорости сходимости вычислительного процесса. Кроме того, вычислительная схема (67) в сравнении с (61) имеет особенность, которая заключается в наличии дополнительной матрицы B , элементы которой включают вторые производные от измеряемых по оцениваемым параметрам и векторы $\Delta \bar{y}_i$. Наличие матрицы B предопределяет то обстоятельство, что в случае плохой обусловленности матрицы R матрица $(R+B)$ будет иметь лучшую обусловленность.

Оценки (61) и (62) реализуют широко известный в нелинейной нормальной регрессии метод Гаусса–Ньютона и Ньютона–Рафсона, соответственно [4,6,19]. Они находят достаточно широкое применение.

Однако для получения оценки (67), соответствующей строгому прямому применению ММП, необходимо помимо расчета первых производных вычислять и вторые производные от измеряемых по оцениваемым параметрам, что на порядок увеличивает сложность и трудоемкость решения задачи оценивания.

Рассмотрим теперь особенности применения метода Ньютона для решения задачи оценки параметров состояния нелинейной динамической системы на основе вариационных условий оптимальности.

В данном случае решение соответствующей краевой задачи сводится к поиску корней краевого уравнения

$$\bar{\lambda}(\bar{q}, T) = 0 , \quad (68)$$

заданного неявно на процедурах интегрирования системы (43).

Здесь $\bar{\lambda}(\bar{q}, T)$ — есть значение сопряженного вектора, определенное для конечного момента времени $t = T$ мерного интервала и имеющее аналитическое представление (49).

Вычислительная схема метода Ньютона для решения уравнения (68) имеет вид

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k - \left[\frac{\partial \bar{\lambda}(\bar{q}, T)}{\partial \bar{q}} \right]_k^{-1} \bar{\lambda}(\bar{q}_k, T) , \quad (69)$$

Полагаем $\det \left[\frac{\partial \bar{\lambda}(\bar{q}, T)}{\partial \bar{q}} \right]_k \neq 0$.

Для реализации этого процесса необходимо на каждой итерации вычислять значение $\bar{\lambda}(\bar{q}, T)$ и матрицу первых производных $\frac{\partial \bar{\lambda}(\bar{q}, T)}{\partial \bar{q}}$. Величина

$\bar{\lambda}(\bar{q}, T)$ определяется путем однократного прямого интегрирования сопряженной системы (18) порядка $2n$. Матрица частных производных может быть определена методом конечных разностей на основе n -кратного численного интегрирования той же системы (18) при последовательно возмущаемых начальных условиях.

Сопоставим далее вычислительные процессы (58) и (69) и убедимся в том, что оптимальные оценки, получаемые на основе вариационных условий оптимальности и требующие для своего определения только расчета первых частных производных от конечного значения сопряженного вектора по начальным условиям, строго соответствуют оценкам, получаемым на основе прямого применения ММП с вычислением вторых производных от вектора измеряемых по начальным параметрам движения.

Действительно, из составления выражений (47), (49) и (55) следует, что вектор-функции $\bar{\lambda}(\bar{q}, T)$ и $\bar{f}(\bar{q}, T)$ связаны соотношением

$$\bar{\lambda}(\bar{q}, T) = V(T, t_0) \bar{f}(\bar{q}, T). \quad (70)$$

Отсюда вытекает, что равенство

$$\frac{\partial \bar{\lambda}(\bar{q}, T)}{\partial \bar{q}} = V(T, t_0) \frac{\partial \bar{f}(\bar{q}, T)}{\partial \bar{q}}. \quad (71)$$

Подставив выражения (70) и (71) в (69), получим

$$\begin{aligned} \bar{q}_{k+1} &= \bar{q}_k - \left[\frac{\partial \bar{\lambda}(\bar{q}, T)}{\partial \bar{q}} \right]_{\bar{q}=\bar{q}_k}^{-1} \bar{\lambda}(\bar{q}_k, T) = \\ &= \bar{q}_k - \left[V(T, t_0) \frac{\partial \bar{f}(\bar{q}, T)}{\partial \bar{q}} \right]_{\bar{q}=\bar{q}_k}^{-1} V(T, t_0) \bar{f}(\bar{q}_k, T) = \bar{q}_k - \left[\frac{\partial \bar{f}(\bar{q}, T)}{\partial \bar{q}} \right]_{\bar{q}=\bar{q}_k}^{-1} \bar{f}(\bar{q}_k, T). \end{aligned}$$

что и доказывает приведенное выше утверждение.

Вычислительные преимущества вариационного ММП проявляются в еще большей мере в задачах совместного оценивания вектора $\bar{q} = \bar{x}_0$ и вектора параметров модели движения $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_l)^T$.

При решении такой задачи в рамках прямого подхода нормальная система уравнений (56) дополняется системой из l уравнений

$$f_{c_j}(\bar{q}_0, \bar{c}) = \frac{\partial I}{\partial c_j} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{x}_i^T}{\partial c_j} \frac{\partial \bar{\psi}_i^T}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1} [\bar{y}_i - \bar{\psi}(\bar{x}_i, t_i)] = 0, \quad j = 1(l)l. \quad (72)$$

Следовательно, появляется необходимость в определении на каждой итерации метода Ньютона матриц частных производных $\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{c}}$, которые могут быть определены, например, методом конечных разностей. Для этого, однако, понадобится l раз интегрировать систему уравнений движения (43) при последовательно возмущаемых значениях элементов вектора \bar{c} . Другой способ их

вычисления состоит в интегрировании l систем n -го порядка линейных неоднородных дифференциальных уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{x}}{\partial c_j} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial c_j} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial c_j}; \quad j = I(I)l,$$

при нулевых начальных условиях.

При использовании же вариационных условий оптимальности, согласно (19), необходимости в расчете таких производных нет. Совместное оценивание векторов $\bar{q} = \bar{x}_0$ и \bar{c} приводит лишь к расширению сопряженной системы уравнений путем добавления к ней всего l уравнений вида

$$\frac{d\mu_j}{dt} = \bar{\lambda}^T \frac{\partial \bar{f}}{\partial c_j}, \quad j = I(I)l.$$

Следует также отметить, что при решении системы (72) совместно с (56) методом Ньютона вновь возникает выше рассмотренная ситуация, связанная с необходимостью расчета вторых производных, но уже по элементам вектора \bar{c} , что существенно увеличивает общий объем вычислений.

Изложенное выше свидетельствует о наличии определенных вычислительных преимуществ применения вариационных условий оптимальности по сравнению с традиционным прямым применением метода максимального правдоподобия для получения оценок вектора \bar{q} .

6. Определение характеристик точности оптимальных оценок

Независимо от того, какой вариант условий оптимальности принят для решения задачи оценивания, получаемая оценка в общем случае оказывается нелинейной функцией выборочных значений измерений.

$$\bar{q} = \bar{q}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_N). \quad (73)$$

Поэтому при достаточно строгом рассмотрении для оценки характеристик точности получаемых оценок, и в частности, корреляционной матрицы $K_{\bar{q}}$ необходимо привлекать известные методы нелинейного статистического анализа, такие как метод статистического моделирования, метод эквивалентных возмущений, интерполяционный метод и др.

В рамках приближенного подхода при достаточно высокой точности измерений для оценки матрицы $K_{\bar{q}}$ вполне допустимо применение метода линеаризации.

Применяя метод линеаризации к уравнению (73) и используя допущения о независимости ошибок измерений, полученных в различные моменты времени приходим к традиционной оценке корреляционной матрицы

$$K_{\bar{q}} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{y}_i} K_{\delta_i} \frac{\partial \bar{q}^T}{\partial \bar{y}_i}. \quad (74)$$

Для ее расчета необходимо вычисление матриц частных производных $\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{y}_i}$.

Заметим далее, что при использовании вариационного метода максимального правдоподобия оценка (73) является решением краевого уравнения

$$\bar{\lambda}(\bar{q}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_N / T) = 0. \quad (75)$$

Варьируя это уравнение, получаем равенство

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}} \Delta \bar{q} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{y}_i} \Delta \bar{y}_i = 0, \quad (76)$$

с помощью которого находим следующую оценку $K_{\bar{q}}$

$$K_{\bar{q}} = \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{y}_i} K_{\delta_i} \frac{\partial \bar{\lambda}^T}{\partial \bar{y}_i} \right) \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}} \right)^{-1T}. \quad (77)$$

Из сопоставления (74) и (77) устанавливается следующая связь между производными от оценки \bar{q} и от левых частей \bar{f} уравнения правдоподобия (56)

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{y}_i} = \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}} \right)^{-1} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{y}_i}. \quad (78)$$

Это позволяет при оценке матрицы $K_{\bar{q}}$ не проводить непосредственно дифференцирования зависимости (73) и ограничиться лишь дифференцированием левой части уравнения (56). Однако, несмотря на это, объем вычислительной работы остается достаточно большим особенно при обработке больших объемов измерений, поскольку в общем случае для определения $\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{y}_i}$ не-

обходимо привлекать метод конечных разностей, и, следовательно, многократно интегрировать дифференциальные уравнения краевой задачи.

Значительно более простой и эффективный метод оценки корреляционной матрицы $K_{\bar{q}}$ может быть получен на основе использования неравенства Рао-Крамера [13].

Известно, что если для данной выборки \bar{y} существует такая нелинейная оценка \tilde{q} вектора параметров \bar{q} , для которой в неравенстве Рао-Крамера

$$K(\tilde{q}) \geq \left\{ M \left[- \frac{\partial^2}{\partial \bar{q} \partial \bar{q}^T} \ln W(\bar{y} / \bar{q}) \right] \right\}^{-1} = K_{\bar{q}_{\min}}, \quad (79)$$

достигается знак равенства, то этой оценкой является оценка метода максимального правдоподобия (такая оценка называется эффективной). В этом выражении W — есть функция правдоподобия. Матричное неравенство (79) понимается в том смысле, что разность $K(\tilde{q}) - K_{\bar{q}_{\min}}$ является неотрицательно определенной матрицей.

Эффективная оценка на выборке конечного объема, и особенно в нелинейных задачах, существует далеко не всегда. Однако во многих практических приложениях, например, в области навигации космических аппаратов, это не является принципиальным ограничением, поскольку применение метода максимального правдоподобия обеспечивает точность, достаточно близкую к уровню максимальной точности оценивания. Поэтому для приближенной характеристики точности оценок и анализа их соответствия заданным требованиям вполне допустимо использование матрицы $K_{\bar{q}_{\min}}$ [14] при $\bar{q} = \tilde{q}$.

На этом основании приближенно можно положить

$$K_{\bar{q}} = \Phi^{-1}(\bar{y} / \tilde{q}), \quad (80)$$

где

$$\Phi = -\frac{\partial^2}{\partial \bar{q} \partial \bar{q}^T} \ln W(\bar{y} / \bar{q}) = -\frac{\partial}{\partial \bar{q}} \bar{f}(\bar{y} / \bar{q}), \quad (81)$$

— приближенное значение информационной матрицы Фишера.

Формулу (80) можно непосредственно применять для определения характеристик точности оценок, получаемых на основе решения систем нормальных уравнений (56) метода максимального правдоподобия. Однако здесь вновь возникает необходимость расчета производных $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}}$. Появляющиеся при этом трудности были проанализированы выше.

При приближенном расчете этих производных по формуле (59) из (80) следует известное представление корреляционной матрицы $K_{\bar{q}}$

$$K_{\bar{q}} = \left[\sum_{i=1}^N U_i^T \frac{\partial \bar{\psi}^T}{\partial \bar{x}_i} K_{\delta_i}^{-1} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}_i} U_i \right], \quad (82)$$

соответствующее применению метода линеаризации.

Получение более точных оценок сопряжено с необходимостью вычисления вторых производных от измеряемых по оцениваемым параметрам, что существенно увеличивает трудоемкость расчетов.

Следует также отметить, что проведение расчетов матрицы $K_{\bar{q}}$ по приближенной формуле (82) требует также выполнения достаточно большого объема вычислительной работы, связанной с необходимостью умножения и суммирования соответствующих матриц, который возрастает с увеличением измерительной выборки.

Рассмотрим далее особенности применения формулы (80) для определения характеристик точности оценок применительно к условиям вариационного метода максимального правдоподобия.

Ранее было показано, что функции $\bar{\lambda}(T, \bar{q})$ и $\bar{f}(\bar{q})$ связаны соотношением (70). Поэтому после дифференцирования этого равенства по \bar{q} получим следующее выражение, устанавливающее связь их производных.

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}} = V(T, t_0) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}}. \quad (83)$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}} = V^{-1}(T, t_0) \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}}. \quad (84)$$

Подставляя это значение производной в выражение (81), из (80) получаем следующее соотношение для определения корреляционной матрицы $K_{\bar{q}}$

$$K_{\bar{q}} = -\left[V^{-1}(T, t_0) \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}} \right]^{-1} = -\left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}} \right)^{-1} V(T, t_0). \quad (85)$$

Принимая далее во внимание равенство (53), устанавливающее связь нормированных фундаментальных матриц $U(T, \tau)$ и $V(T, \tau)$ сопряженных систем линейных дифференциальных уравнений, из (85) находим выражение

$$K_{\bar{q}} = -\left[U^T(T, t_0) \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}} \right]^{-1}. \quad (86)$$

Применение этой формулы значительно сокращает объем вычислений при расчете корреляционной матрицы $K_{\bar{q}}$ по сравнению с рассмотренными выше способами (74) и (77), поскольку в данном случае не требуется вычислять матрицы частных производных $\frac{\partial \bar{q}}{\partial y_i}$ и $\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial y_i}$. Матрица $\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}}$, входящая в (86), вычисляется при получении оптимальных оценок вектора \bar{q} , а матрица $U(T, t_0)$ легко определяется попутно методом конечных разностей по результатам численного интегрирования уравнений динамики объекта, проводимых для расчета $\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{q}}$.

Важно отметить, что в алгоритме (86) не вводится никаких дополнительных упрощений методического характера.

По методической точности вычислений оценка (86) соответствует оценке, получаемой на базе прямого применения условий метода максимального правдоподобия и предусматривающей вычисление вторых производных от измеряемых по оцениваемым параметрам.

Таким образом, рассматриваемый вариационный вариант метода максимального правдоподобия оказывается принципиально более эффективным в вычислительном отношении не только с точки зрения получения оценок параметров состояния нелинейного динамического объекта, но и с точки зрения определения их точностных характеристик.

7. Конструктивные методы синтеза быстродействующих алгоритмов оценивания

При решении достаточно сложных динамических задач оптимального оценивания приходится применять специальные меры для повышения быстродействия применяемых алгоритмов.

Значительный вычислительный эффект может быть, в частности, достигнут на основе применения:

- приближенных методов интегрирования уравнений движения и сопряженной системы;
- преобразования и декомпозиции процесса оценивания на основе группирования измерений и перехода к информационно-эквивалентным прямым измерениям полного вектора состояния или некоторых его компонент;
- специальных конструктивных методов решения краевых задач оптимального оценивания.

1. В зависимости от особенностей конкретной постановки задачи и продолжительности мерного интервала в целях повышения быстродействия алгоритмов оценивания могут привлекаться различные формальные и неформальные способы упрощения дифференциальных уравнений краевой задачи. Важное значение здесь имеет выбор системы переменных состояния, в которых описывается динамика объекта. Их рациональное определение позволяет, с одной стороны, сократить объем вычислений при переходе от измеряемых к оцениваемым параметрам, а с другой — обеспечить свойство гладкости правых частей дифференциальных уравнений, что в свою очередь позволит эффек-

тивно применить известные аналитические, численные и численно-аналитические методы их интегрирования с достаточно большим шагом. В ряде случаев может быть упрощена и сопряженная система за счет исключения при ее составлении влияния малых факторов, присутствующих в уравнениях динамики объекта.

В ряде важных практических задач оценивания измерения оказываются достаточно плотно сгруппированными на всем мерном интервале или же на отдельных его участках. При обработке таких измерений оказывается трудно реализовать вычислительные преимущества эффективных методов интегрирования с большим шагом, т.к. необходимо обеспечить выход на каждую из близко расположенных измерительных точек. В этой ситуации разумно использовать рекомендации метода узловых точек [12], согласно которому на каждой итерации уравнения динамики интегрируются с большим шагом, а значения переменных состояния в промежуточных точках определяются на основе построения интерполяционных полиномов.

Интегрирование же сопряженной системы на участках между близко расположенными измерительными точками часто можно проводить с помощью наиболее простого варианта метода Эйлера

$$\bar{\lambda}(t_{i+1}) = \left[E - \tau_i \frac{\partial \bar{\varphi}^T(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \right]_{\bar{x}=\bar{x}(t_i)} \cdot \bar{\lambda}(t_i); \quad \tau_i = t_{i+1} - t_i. \quad (87)$$

Следует также отметить, что при итерационном решении краевой задачи оптимального оценивания на ранних итерациях, когда текущий результат еще существенно отличается от окончательного, нет необходимости и в точном интегрировании уравнений краевой задачи. Это обстоятельство создает дополнительные резервы для повышения оперативности расчетов.

2. При декомпозиции процесса оценивания на основе группирования весь массив измерений можно разбить (с учетом требований наблюдаемости) на последовательные группы и в результате специальной предварительной обработки сформировать последовательность оценок полного вектора состояния $\tilde{\bar{x}}_j$ и их корреляционных матриц $K_{\tilde{\bar{x}}_j}$ в заданные моменты t_j .

Алгоритм такого преобразования представим как

$$\tilde{\bar{x}}_j = \bar{x}_j[\bar{y}_{1j}, \bar{y}_{2j}, \dots, \bar{y}_{N_j}]; \quad t_j \in [t_{1j}, t_{N_j}]; \quad j = 1, 2, \dots, N_I < N, \quad (88)$$

где N_j — число измерительных точек, входящих в j -ю группу.

N_I — количество сформированных групп измерений.

Значения корреляционных матриц $K_{\tilde{\bar{x}}_j}$ можно получить методом линеаризации на основе (88).

Указанные преобразования ставят в соответствие исходному массиву фактических измерений объема N информационно-эквивалентный массив искусственных прямых измерений объема $N_I < N$. В этом случае задача оптимального оценивания вектора исходного состояния объекта $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ будет решаться для модели прямых измерений вида

$$\tilde{\bar{x}}_j = \bar{x}(t_j) + \bar{\delta}_{x_j}; \quad j = 1(I)N_I; \quad (89)$$

$$f(\bar{\delta}_{x_j}) \rightarrow N(0, K_{\tilde{\bar{x}}_j}),$$

что существенно упрощает расчет скачков сопряженного вектора $\Delta\bar{\lambda}(t_j)$, которые теперь будут определяться по формуле

$$\Delta\bar{\lambda}(t_j) = K_{\tilde{x}_j}^{-1} [\tilde{x}_j - \bar{x}(t_j)], \quad j = I(I)N_I. \quad (90)$$

В практической ситуации преобразование и группирование удобно проводить по текущим выборочным группам измерений минимального объема, что позволяет упростить алгоритм преобразования (88). Так, например, если наземная радиолокационная станция измеряет дальность и углы, характеризующие направление на КА, то данные измерения могут быть легко пересчитаны в координаты КА, и таким образом задача сводится к обработке прямых позиционных измерений. Если же, далее, сгруппировать такие измерения по двум несенным по времени точкам, то можно оценить и полный вектор текущего состояния.

В целом, в рамках рассматриваемого подхода учет специфики измерений производится на этапе оценки значений \tilde{x}_j , $K_{\tilde{x}_j}$ (или их составляющих), а последующая полная обработка проводится по универсальному алгоритму для информационно-эквивалентной модели прямых измерений (89).

С вычислительной точки зрения это позволяет упростить общую процедуру оценивания, а также эффективно реализовать возможности как приближенного интегрирования уравнений краевой задачи на коротких интервалах группирования измерений, так и точного интегрирования с большим шагом.

3. Важное значение для повышения быстродействия алгоритмов оценивания имеют конструктивные методы решения краевых задач. Значительными возможностями в этом отношении обладает метод приближенного корректирующего оператора (ПКО), обоснованный в [9]. Согласно этому методу для решения уравнения

$$\bar{\lambda}(\bar{q}) = 0, \quad (91)$$

применяется вычислительный процесс

$$\bar{q}_{k+1} = M \left[- \sum_{i=0}^k \bar{\lambda}(\bar{q}_i, T) \right], \quad (92)$$

где $M[\bullet]$ — приближенный корректирующий оператор, выражающий алгоритм решения приближенного уравнения

$$\tilde{\lambda}(\bar{q}) = 0. \quad (93)$$

Выбор приближенной модели (93) может быть осуществлен множеством различных способов в конкретной ситуации с учетом специфики исходной зависимости (91), определяемой особенностями моделей динамики объекта и измерений. Для этого могут применяться как формальные приемы упрощения исходных моделей, так и методы их аппроксимации и др.

Во всех случаях необходимо стремиться к тому, чтобы алгоритм решения уравнения (93) был достаточно простым, и обеспечивалась достаточно быстрая сходимость итерационного процесса (92).

Важной особенностью метода ПКО (92) является то обстоятельство, что для каждой итерации значение $\bar{\lambda}(\bar{q})$ вычисляется один раз. Применительно к рассматриваемой в данной работе задаче оптимального оценивания это означает, что для очередного уточнения вектора параметров состояния объекта дифференциальные уравнения краевой задачи интегрируются один раз. Таким

образом, обеспечивается высокая экономичность вычислений. Ниже это будет показано на примере.

С математической точки зрения вычислительная схема (92) представляет специальный многоточечный вариант метода простой итерации. Условия его сходимости устанавливаются на основе принципа сжатых отображений.

Оператор $M[\bullet]$ может изменяться или уточняться в ходе вычислительного процесса по его текущим результатам на каждой итерации или через несколько итераций. В этом случае можно говорить о комбинированном варианте использования метода ПКО.

С общих методологических позиций очевидно, что в качестве оператора $M[\bullet]$ могут рассматриваться и операторы различных известных методов численного решения нелинейных уравнений, таких как метод Ньютона, его модификации и др.

При линейном представлении $\tilde{\lambda}(\bar{q})$ вида

$$\tilde{\lambda}(\bar{q}) = A\bar{q} + \bar{b},$$

из (92) следует, что

$$\bar{q}_{k+1} - \bar{q}_k = -M \cdot \tilde{\lambda}(\bar{q}_k),$$

или

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k - M \cdot \tilde{\lambda}(\bar{q}_k), \quad (94)$$

где

$$M = A^{-1}. \quad (95)$$

Это по форме напоминает модифицированный (упрощенный) метод

Ньютона и в частном случае при $M = \left[\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \bar{q}} \right]_{\bar{q}=\bar{q}_0}^{-1}$ совпадает с ним.

Оператор M может уточняться в ходе итераций по некоторому правилу

$$M_k = M_k(\bar{q}_k, \bar{q}_{k-1}, \dots, \bar{q}_{k-s}), \quad s < k, \quad (96)$$

тогда вычислительный процесс (92) при $s = 1$ принимает вид

$$\bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k - M_k(\bar{q}_k) \cdot \tilde{\lambda}(\bar{q}_k). \quad (97)$$

В частном случае при $M_k = \left[\frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \bar{q}} \right]_{\bar{q}=\bar{q}_k}^{-1}$ из (97) следует метод Ньютона (69).

В целом метод ПКО выражает достаточно общую идеологию конструирования алгоритмов решения уравнения (91) и с этой точки зрения вряд ли может быть улучшен, т.к. процедура любого алгоритма или метода может рассматриваться в качестве приближенного корректирующего оператора. Очевидно, что этот метод может применяться при решении задач оценивания как для вариационного, так и для прямого вариантов ММП.

8. Определение орбиты ИСЗ по результатам измерений

Рассмотрим особенности применения вариационного ММП на примере решения задачи статистического оценивания параметров движения искусственного спутника Земли по результатам измерений текущих навигационных параметров. Такие измерения могут проводиться с наземных измерительных пунктов или автономно с борта КА. Предполагается, что измеряемые парамет-

ры могут быть произвольного вида и состава и имеют математические модели измерений общего вида (2).

Конкретизируем уравнения движения объекта. Будем считать, что полет происходит в нормальном гравитационном поле Земли, учитывающем ее сжатие, на высотах, где влияние атмосферы пренебрежимо мало. Соответствующие уравнения движения в абсолютной геоцентрической экваториальной системе отсчета представим с учетом [5] в виде, удобном для программирования

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x; & \dot{y} &= V_y; & \dot{z} &= V_z; \\ \dot{V}_x &= -ax + F_x; & \dot{V}_y &= -ay + F_y; & \dot{V}_z &= (2bc - a)z + F_z; \end{aligned} \quad (98)$$

где

$$\begin{aligned} a &= b[\alpha_{00} + c(d - 1)]; & b &= R_0 r^{-3}; & c &= 1.5\alpha_{20} R_0^2 r^{-2}; & d &= 5z^2 r^{-2}; \\ J_{20} &= -0.001082627; & \alpha_{00} &= 62564951 \text{ м}^2 / \text{с}^2; \\ \alpha_{20} &= -67889,273 \text{ м}^2 / \text{с}^2; & R_0 &= 6371 \text{ км}; & r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

В уравнениях (98) функции F_x , F_y и F_z есть проекции вектора возмущающего ускорения, создаваемого сопротивлением атмосферы

$$\bar{F} = -S \rho \left| \bar{V}_{\text{отн}} \right| \bar{V}_{\text{отн}},$$

где S — баллистический коэффициент спутника, определяемый его весовыми, геометрическими и аэродинамическими характеристиками;

ρ — плотность атмосферы, определяемая в зависимости от высоты полета по стандартным моделям [11, 12];

$\bar{V}_{\text{отн}}$ — вектор скорости спутника относительно набегающего воздушного потока, определяемый в предположении того, что атмосфера вращается вместе с Землей с угловой скоростью Ω

$$V_{x_{\text{отн}}} = V_x + \Omega y; \quad V_{y_{\text{отн}}} = V_y - \Omega x; \quad V_{z_{\text{отн}}} = V_z.$$

Составим сопряженную систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_x &= (a - Gx^2)\lambda_{V_x} - Gxy\lambda_{V_y} - Jxz\lambda_{V_z}; \\ \dot{\lambda}_y &= -Gxy\lambda_{V_x} + (a - Gy^2)\lambda_{V_y} - Jyz\lambda_{V_z}; \\ \dot{\lambda}_z &= -Jx\lambda_{V_x} - Jy\lambda_{V_y} + [a - 2bc(1 - d) - Jz^2]\lambda_{V_z}; \\ \dot{\lambda}_{V_x} &= -\lambda_x; & \dot{\lambda}_{V_y} &= -\lambda_y; & \dot{\lambda}_{V_z} &= -\lambda_z, \end{aligned} \quad (99)$$

$$G = r^{-2}[3a + 2bc(2d - 1)]; \quad J = G - 10bcr^{-2}; \quad J_1 = Gz - 2bcdz^{-1}.$$

Таким образом, задача оценивания параметров движения объекта в рамках вариационного метода максимального правдоподобия сводится к определению неизвестного вектора его исходного состояния $\bar{x}_0 = \bar{x}(t_0)$ посредством решения двухточечной краевой задачи для системы из двенадцати нелинейных дифференциальных уравнений (98) и (99) при граничных условиях $\bar{\lambda}(t_0) = \bar{\lambda}(T) = 0$ с учетом скачкообразного изменения сопряженного вектора в измерительных точках t_j

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \bar{\psi}^T(t_i)}{\partial \bar{x}} K_{\delta_i}^{-1} \{ \bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)] \}; \quad i = 1(I)N. \quad (100)$$

Вид функций $\bar{\psi}(\bar{x}, t)$ определяется принятым составом измерений. Аналитические представления этих функций для наиболее употребительного в космической навигации состава измерений приведены в [1, 2, 12 и др.]. Там же

даны простые аналитические соотношения для производных от измеряемых параметров по текущим кинематическим параметрам движения. Численное решение краевой задачи может проводиться с помощью методов Ньютона, наискорейшего спуска, приближенного корректирующего оператора, их модификаций и др. [1, 9, 17].

Навигационные определения производятся в интересах управления полетом, планирования работы специальной аппаратуры и др., что в свою очередь, вызывает необходимость прогнозирования движения на определенные временные интервалы. Ошибки прогнозирования в значительной степени определяются влиянием неучтенных возмущающих факторов на движение спутника. Наибольшее влияние на движение низколетящих спутников оказывает отклонение силы сопротивления воздуха от расчетной. Одним из путей повышения точности прогнозирования является уточнение параметров верхней атмосферы по данным траекторных измерений. Из-за сложности решения этой задачи в большинстве случаев с достаточной для практики точностью можно ограничиться определением баллистического коэффициента S как параметра согласования, учитывающего в среднем отличие принятой модели атмосферы от реальной [5, 11, 12]. При такой постановке наряду с определением вектора начального состояния спутника \bar{x}_0 требуется оценить и значение баллистического коэффициента S .

В рамках предлагаемого вариационного подхода на основании (19) необходимо систему уравнений краевой задачи (98) и (99) дополнить еще одним дифференциальным уравнением

$$\dot{\mu} = -\rho |\bar{V}_{омн}| (V_{x_{омн}} \lambda_{V_x} + V_{y_{омн}} \lambda_{V_y} + V_{z_{омн}} \lambda_{V_z}), \quad (101)$$

и граничными условиями $\mu(t_0) = \mu(T) = 0$.

При наличии аномальных измерений необходимо принимать меры по их исключению. Методика решения этого вопроса приведена в [1, 2, 5 и др.]. Она предусматривает определение на каждой итерации среднего квадратического отклонения единицы веса измерений σ_0 . Указанная методика применима и в данном случае. При вариационном подходе параметр σ_0 рассматривается как элемент вектора \bar{c}_l в краевой задаче (21) и может быть вычислен при ее решении.

Для повышения быстродействия алгоритмов оценивания в конкретных расчетных условиях наряду с изложенным выше в п.7, могут быть эффективно использованы рекомендации, связанные с ускорением процессов интегрирования уравнений движения, приведенные в [1, 12 и др.]. При этом должны учитываться особенности применяемого метода численного решения краевой задачи. Так, при использовании метода Ньютона (69) на разных итерациях (особенно на ранних) могут вводиться различные упрощения уравнений (98), (99) и применяться различные приближенные способы их интегрирования. Как в интересах определения значений $\bar{\lambda}(\bar{x}_0, T)$, так и для вычисления матрицы частных производных $\frac{\partial \bar{\lambda}(\bar{x}_0, T)}{\partial \bar{x}_0}$. Более высокие требования следует предъявить к приближенному описанию динамики объекта при вычислении $\bar{\lambda}(\bar{x}_0, T)$. В этом случае точность применяемых приближенных способов должна повышаться по мере подхода вычислительного процесса к оптимальным значениям оцениваемых параметров.

Для моделей сопряженной системы (99) упрощения допустимы в большей мере, так что их приближенные представления могут применяться на всех итерациях. В частности, как показывает анализ, учет сжатия гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы в сопряженной системе (99) оказывает сравнительно небольшое влияние на результаты решения задачи. Поэтому вместо системы (99) во многих случаях можно использовать систему

$$\dot{\bar{\lambda}}_r = \frac{\pi_0}{r^3} [\bar{\lambda}_V - \frac{3}{r^2} (\bar{r}\bar{r}^T) \bar{\lambda}_V]; \quad \dot{\bar{\lambda}}_V = -\bar{\lambda}_r; \quad (102)$$

$$\bar{\lambda} = [\bar{\lambda}_r, \bar{\lambda}_V]^T = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_{V_x}, \lambda_{V_y}, \lambda_{V_z}]^T; \quad \pi_0 = 398600,44 \text{ км}^3 / \text{с}^2,$$

которая следует из (99) при $\alpha_{20} = 0$ и соответствует модели центрального гравитационного поля.

В ряде важных случаев можно добиться ускорения вычислительного процесса, если при обработке навигационных измерений предварительно осуществить их преобразования и перейти от исходных первичных моделей измерений (2) к информационно-эквивалентным моделям прямых измерений полного вектора состояния $\bar{x}(x, y, z, V_x, V_y, V_z)$ или позиционного вектора $\bar{\rho}(x, y, z)$. Такая возможность обычно имеется, как при использовании измерений наземных радиолокационных станций, так и при обработке измерительных данных автономных навигационных систем, работающих по сигналам, получаемым от радионавигационных спутников, или использующих показания высотомера и угловые астроизмерения.

В ходе указанных преобразований должны быть сформированы последовательности оценок полного вектора \tilde{x}_j или позиционного вектора $\tilde{\rho}_j$, а также определены соответствующие значения их корреляционных матриц K_{x_j} и K_{ρ_j} .

В результате перехода к моделям прямых измерений упрощается правило расчета скачков сопряженного вектора (100), что способствует повышению быстродействию алгоритма решения краевой задачи оптимального оценивания. Для модели прямых эквивалентных измерений полного вектора состояния вместо (100) будем иметь выражение

$$\bar{\lambda}(t_j^+) = \bar{\lambda}(t_j^-) + K_{x_j}^{-1} [\tilde{x}_j - \bar{x}(t_j)], \quad j = I(I)N_I, \quad (103)$$

а для модели эквивалентного позиционного вектора

$$\bar{\lambda}_\rho(t_j^+) = \bar{\lambda}_\rho(t_j^-) + K_{\rho_j}^{-1} [\tilde{\rho}_j - \bar{\rho}(t_j)], \quad j = I(I)N_I, \quad (104)$$

где $\bar{\lambda}_\rho = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z]^T$.

Ниже в п.9 приводятся результаты численного исследования некоторых методов решения краевой задачи (98), (99), (100). Для иллюстрации возможностей конструктивного метода приближенного корректирующего оператора, указанного в п.7, с целью конкретизации вида оператора M , рассмотрим приближенное решение исходной задачи, соответствующее условиям движения спутника по орбитам, близким к круговым, применительно к модели динамики в однородном центральном поле и модели прямых эквивалентных измерений полного вектора состояния.

В этом случае краевая задача (98)–(100) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= \bar{V}; & \dot{\bar{V}} &= -\omega^2 \bar{r}; \\ \dot{\bar{\lambda}}_\rho &= \omega^2 \bar{\lambda}_V; & \dot{\bar{\lambda}}_V &= -\bar{\lambda}_\rho; \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}(t_j^+) &= \bar{\lambda}(t_j^-) + K_{\bar{x}_j}^{-1} [\bar{x}_j - \bar{x}(t_j)], \quad j = I(I)N_I, \\ \bar{\lambda}(t_0) &= \bar{\lambda}(T) = 0,\end{aligned}$$

где ω — угловая скорость орбитального движения спутника в начальный момент t_0

$$\omega = \omega(\bar{x}_0) = \sqrt{\pi_0 r_0^{-3}}; \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \quad (106)$$

Согласно (49) решение этой краевой задачи сводится к определению корня \bar{x}_0 нелинейного уравнения

$$\sum_{j=1}^{N_I} V(T, t_j) K_{\delta_j}^{-1} [\bar{x}_j - U(t_j, t_0) \bar{x}_0] = 0, \quad (107)$$

где

$$U(t_j, t_0) = \begin{bmatrix} \cos \omega(t_j - t_0) E & \omega^{-1} \sin \omega(t_j - t_0) E \\ -\omega \sin \omega(t_j - t_0) E & \cos \omega(t_j - t_0) E \end{bmatrix}; \quad (108)$$

$$V(T, t_j) = \begin{bmatrix} \cos \omega(T - t_j) E & \omega \sin \omega(T - t_j) E \\ -\omega^{-1} \sin \omega(T - t_j) E & \cos \omega(T - t_j) E \end{bmatrix}; \quad (109)$$

E — единичная матрица размерности 3×3 .

Нелинейность этого уравнения определяется зависимостью фундаментальных матриц U и V от параметра ω , который, согласно (106), в свою очередь, зависит от неизвестного вектора \bar{x}_0 .

Сопоставляя структуру выражений (93), (95) и (107), приходим к заключению, что для решения исходной краевой задачи (98)–(100) можно применить вычислительный процесс (97) с корректирующим оператором

$$M_k = \left[\sum_{j=1}^{N_I} V(T, t_j / \bar{x}_{0k}) K_{x_j}^{-1} U(t_j, t_0 / \bar{x}_{0k}) \right]^{-1}, \quad (110)$$

где k — номер итерации в (97).

При хорошем начальном приближении для вектора \bar{x}_0 в ряде случаев можно применить вычислительный процесс (94) с постоянным начальным значением оператора (110).

9. Некоторые результаты расчетов

Приведенные ниже результаты численных исследований носят иллюстративный характер.

Расчеты проводились для спутника, находящегося на орбите с высотой $h=1000$ км и эксцентриситетом $e=0,003$. С помощью датчика случайных величин по нормальному закону распределения на интервале времени $T \leq 200$ с с шагом $\Delta t = 1$ с моделировались оценки текущего состояния КА.

Эти результаты рассматривались как статистическая выборка прямых измерений вектора текущего состояния. Ее обработка осуществлялась вариационным методом максимального правдоподобия. При этом для численного решения краевой задачи (98)–(100) применялись метод Ньютона, модифицированный (упрощенный) метод Ньютона и метод приближенного корректирующего оператора с оператором (110) в двух вариантах: ПКО-1 и ПКО-2. В варианте ПКО-1 решение определялось согласно (97) с корректирующим оператором M , уточняемом на каждой итерации по формулам (108)–(110). В варианте ПКО-2

на первых двух итерациях решалась приближенная краевая задача (105), соответствующая движению в однородном центральном поле, с использованием аналитических соотношений (107)-(109). Далее на 3 и 4 итерации применялся вариант ПКО-1 с постоянным корректирующим оператором M , вычисленным по результатам 2 итерации.

Исследуемые варианты предельных ошибок измерений представлены в табл.1.

Основная цель численных расчетов заключалась в исследовании сходимости приведенных выше алгоритмов оценивания, а также влияния ошибок измерений на точность определяемых оценок и на их смещение относительно «истинных» (моделируемых) значений.

Табл. 1. Варианты максимальных отклонений ошибок измерений

| № варианта | $\Delta \bar{r}_{i_{\max}}, м$ | $\Delta \bar{V}_{i_{\max}}, м/с$ |
|------------|--------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 100 | 0.5 |
| 2 | 150 | 1 |
| 3 | 200 | 2 |

С целью проверки области сходимости решения выбирались достаточно грубые начальные приближения \bar{x}_0^0 . Они отличались от истинных значений \bar{x}_0 на 500 км по координатам положения и 0.5 км/с по проекциям скорости. Итерационный процесс прекращался при выполнении условий для модулей невязок $\Delta r < 1 м$, $\Delta V < 1 см/с$.

Соответствующие этим условиям результаты представлены в табл.2 по итерациям на мерном интервале $T=200 с$ при $N=200$ для второго варианта ошибок измерений табл.1.

Табл. 2. Сходимость итерационного процесса

| Метод | Модуль смещения оценок | № итерации | | | | Число интегрирований СДУ (98)-(99) |
|-------------------|------------------------|------------|------|-------|------|------------------------------------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Ньютона (строгий) | $\Delta r, м$ | 112 | 2 | - | - | 14 |
| | $\Delta V, м/с$ | 22.5 | 0.01 | - | - | |
| Ньютона (модиф.) | $\Delta r, м$ | 112 | 46 | 2 | - | 9 |
| | $\Delta V, м/с$ | 22.5 | 0.06 | 0.01 | - | |
| ПКО-1 | $\Delta r, м$ | 6625 | 713 | 37 | 5 | 4 |
| | $\Delta V, м/с$ | 65 | 2.8 | 0.2 | 0.02 | |
| ПКО-2 | $\Delta r, м$ | 6511 | 36 | 16 | 4 | 2 |
| | $\Delta V, м/с$ | 187 | 1.34 | 0.013 | 0.01 | |

Анализ данных табл.2 свидетельствует о вычислительных преимуществах рассмотренных вариантов реализации метода приближенного корректирующего оператора в принятых расчетных условиях.

На рис.1 и 2 представлены зависимости изменения проекций сопряженных переменных векторов координат и скорости, соответственно, в ходе интегрировании сопряженной системы (99) при оптимальной оценке. Как видно, они имеют скачкообразный характер и строго удовлетворяют нулевым граничным условиям.

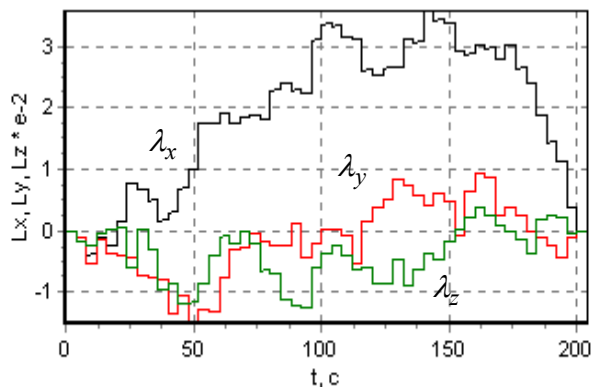


Рис.1. Сопряженные переменные вектора координат

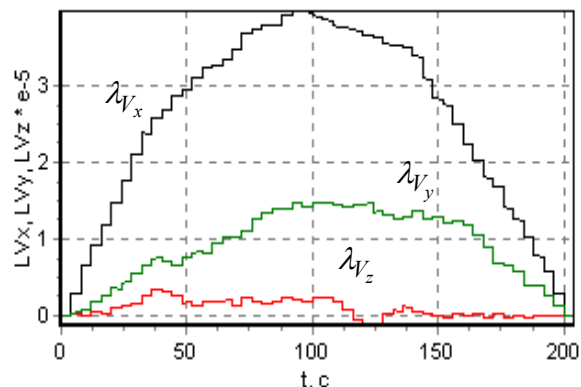


Рис.2. Сопряженные переменные вектора скорости

На рис. 3-6 представлены результаты обработки измерений в зависимости от объема выборки $N \leq 200$ при интервале между измерениями 1 с. Решения краевой задачи проводилось по строгой схеме метода Ньютона. Начальные приближения вектора \bar{x}_0^0 соответствовали первому измерению вектора состояния. Точностные характеристики вычислялись по общей формуле (86).

На рис. 3 и 4 приводятся средние значения СКО оценок составляющих вектора координат и вектора скорости, соответственно.

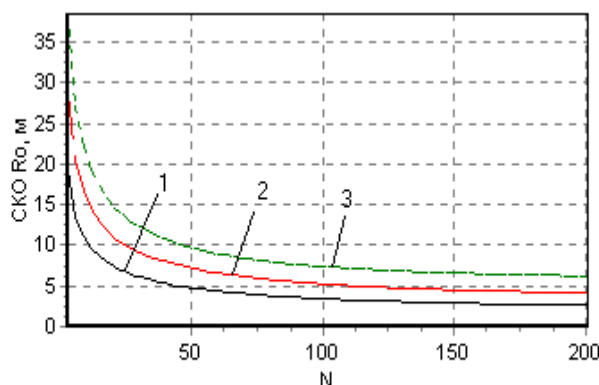


Рис.3. Среднее СКО оценок координат положения

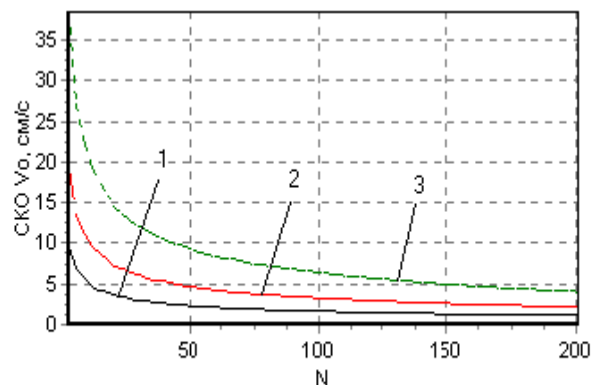


Рис.4. Среднее СКО оценок координат скорости

На рис.5, 6 представлены аналогичные зависимости для модулей смещения оценок компонент вектора координат и вектора скорости, соответственно, относительно их моделируемых «истинных» значений. Номер кривой соответствует номеру варианта ошибок измерений табл.1.

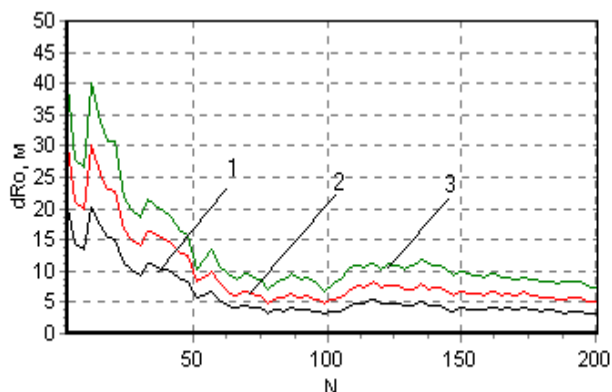


Рис.5. Модуль смещения оценок координат положения

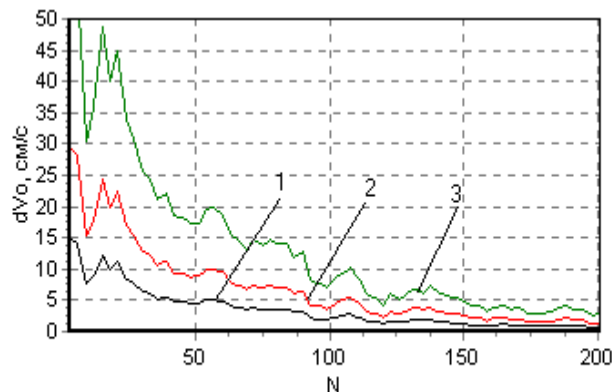


Рис.6. Модуль смещения оценок проекций скорости

Анализ этих зависимостей показывает, что для принятых расчетных условий точность полученных оценок, соответствующих первому варианту ошибок измерений в 1.5-2 раза выше точности, соответствующей второму варианту и в 3-4 раза выше точности, соответствующей третьему варианту. При этом при объеме выборки $N > 50$ исследуемые параметры меняются мало. Аналогичные результаты наблюдаются по смещению оптимальных оценок.

Кроме того, из сравнения данных рис.3,4 и рис.5,6 следует, что все полученные оценки в заданных расчетных условиях находятся в соответствующих интервалах $3\sigma_{\bar{x}}$.

Заключение

1. Предложенный в данной работе вариационный ММП преобразует исходную вероятностную задачу оптимального оценивания параметров состояния непрерывной нелинейной динамической системы по результатам дискретных наблюдений к двухточечной краевой задаче для канонической системы дифференциальных уравнений с промежуточными ограничениями на значения сопряженных переменных. Аналогичное представление имеют и необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления с ограничениями на фазовое состояние. Это свидетельствует о единстве математической природы задач оптимального оценивания и управления и о возможности их решения однотипными методами.

2. Сравнительный анализ необходимых условий оптимальности оценок, соответствующих прямому и вариационному вариантам ММП, свидетельствует об их адекватности в том смысле, что оптимальные оценки, получаемые на основе строгого удовлетворения каждого из них, совпадают.

3. Проведенный сравнительный анализ особенностей вычислительных процессов, связанных с применением каждого из рассматриваемых подходов, позволяет сделать вывод о наличии определенных вычислительных преимуществ вариационного ММП как при оценивании параметров состояния, так и при определении вероятностных характеристик их точности. Это объясняется, прежде всего, тем, что при его численной реализации исключается необходимость вычисления матриц частных производных от измеряемых по оцениваемым параметрам. Вычислительные процессы, свойственные вариационному ММП, по степени обусловленности, области и скорости сходимости соответствуют таким вариантам реализации прямого применения ММП, в которых производится вычисление вторых производных от измеряемых по оцениваемым параметрам, что сопряжено с большими вычислительными затратами.

4. Вычислительные преимущества вариационного ММП могут проявляться в большей мере при усложнении расчетных условий – при совместной оценке параметров исходного состояния объекта и параметров его динамической модели, плохом начальном приближении, невысокой точности измерений и с увеличением объема выборки.

Вместе с тем, для повышения надежности решения краевых задач оптимального оценивания в указанных сложных ситуациях, целесообразно наряду с методом Ньютона комбинационно применять и метод наискорейшего спуска, а также привлекать дополнительную априорную информацию о параметрах состояния с учетом вариационных условий байесовского оценивания и регуляризации решений, полученных в п.3 и 4, соответственно.

5. При синтезе быстродействующих алгоритмов оптимального оценивания имеет смысл использовать конструктивные методы и способы, изложенные в п.7. Особое внимание следует обратить на целесообразность применения конструктивных методов решения краевых задач и, в частности, метода при-

ближенного корректирующего оператора. Об этом свидетельствует как накопленный опыт его практического применения для решения различных задач управления и навигации, так и приведенные выше результаты численных исследований применительно к рассмотренной в п.8 оптимизационной задаче определения орбиты КА по результатам измерений.

6. Предлагаемый метод может быть использован как для обработки измерений параметров движения динамических объектов, так и для выбора эффективного состава и программы измерений.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессору Р.М. Юсупову за внимание к данной работе и полезные рекомендации.

Литература

- [1] *Аким Э.Л., Энеев Т.М.*, Определение параметров движения космических аппаратов по данным траекторных измерений // Космические исследования, 1963, т.1, №1, с.5-50.
- [2] *Бажинов И.К., Алешин В.И., Почукаев В.Н., Поляков В.С.*, Космическая навигация. — М.: Машиностроение, 1975. — 352с.
- [3] *Брандин Н.К., Разоренов Г.Н.* Определение траекторий КА. — М.:Машиностроение, 1978.—216с.
- [4] *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. — М.:Финансы и статистика, 1981.— 302с.
- [5] Космические траекторные измерения. Коллектив авторов под ред. *Агаджанова П.А., Дулевича В.Е., Коростелева А.А.*: Сов. Радио, 1969. — 504с.
- [6] *Костылев А.А., Степанов М.Г.*, Смещенные оценки и метод регуляризации в радиотехнических задачах. — Л.: МО СССР, 1984. —83с.
- [7] *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. — Физматгиз, 1958. — 350с.
- [8] *Ломако Г.И.* Экспериментальная баллистика космических аппаратов. — СПб.:ВИККА им.А.Ф.Можайского, 1997. — 454с.
- [9] *Миронов В.И.* Конструктивный метод решения краевых задач управляемого движения / В сб. «Алгоритмы и программы исследования систем управления», вып.6, — Л.: ВИКИ им.Можайского,1980. — 70–74с.
- [10] *Миронов Ю.В.* Вариационный подход к синтезу бортовых навигационных алгоритмов для малых космических аппаратов // Сб. трудов НТК «Развитие новых технологий на основе использования малых и сверхмалых космических аппаратов» (19 декабря 2000 г.). — СПб.: ВКУ им.А.Ф.Можайского, 2002. —с.163-165.
- [11] Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6» - «Союз» - «Прогресс». Под ред. *Б.Н.Петрова, Н.К.Бажинова.* — М.: Наука, 1985. — 376с.
- [12] Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. *Г.С.Нариманова и М.К.Тихонравова.* — М.: Машиностроение, 1972. — 608с.
- [13] *Репин В.Г., Тартаковский Г.П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. — М.: Сов. Радио, 1977. — 432с.
- [14] *Степанов М.Г.* Введение в теорию смещенного оценивания параметров движения космических аппаратов по ограниченным данным. — СПб.: ВИККА им.А.Ф.Можайского, 1993. — 135с.
- [15] Статистические методы обработки результатов наблюдений. Под ред. *Р.М.Юсупова.* — МО СССР, 1984. — 563с.
- [16] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М: Наука, 1979. — 288с.
- [17] *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 488с.
- [18] *Шапиро Н.Н.* Расчет траекторий баллистических снарядов по данным радиолокационных наблюдений. — М.: ИЛ, 1968. — 319с.
- [19] *Шебшаевич В.С., Романов Л.М., Неволько М.П.* Методы определения параметров движения ИСЗ по выборкам измерений полного и нарастающего объемов с использованием производных второго порядка // Космические исследования, т.7, вып. 4, 1969. — с.241–249.
- [20] *Эльясберг П.Е.* Определение движения по результатам измерений. — М.: Наука, 1976. — 416с.