

РЕКУРСИВНО-ИЕРАРХИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ФРАКТАЛОПОДОБНЫХ СИГНАЛОВ

А. В. Скурихин

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д.39

andrey@mail.iias.spb.su

УДК 681.3.06(075)

А. В. Скурихин. **Рекурсивно-иерархическое представление одномерных фракталоподобных сигналов** // Труды СПИИРАН. Вып. 1, т. 3. — СПб: СПИИРАН, 2003.

Аннотация. В данной статье рассматривается способ адаптивного рекурсивно-иерархического представления одномерных сигналов, обладающих фрактальными свойствами. Повышение эффективности обработки достигается за счет рекурсивного представления самоподобных областей с произвольным уровнем масштабирования, а также использования особенностей свойств человеческого восприятия и быстрой вычислительной реализации. — Библ. 10 назв.

UDC 681.3

A. V. Skourikhin. **The recursive hierarchical representation of one-dimensional fractal-like signals** // SPIIRAS Proceedings. Issue 1, v. 3. — SPb: SPIIRAS, 2003.

Abstract. In the article is considering a method for recursive-hierarchical representation of one-dimensional signals with fractal properties. The increasing of processing efficiency is achieved due to the recursive representation of self-similar patterns with arbitrary scale level, considering of human perception properties and fast computational realization. — Bibl. 10 items.

1. Введение

Иерархическое представление информации обеспечивает структуризацию данных, максимально приближенную к человеческому восприятию. Это позволяет, в свою очередь, организовывать эффективный поиск и компактное представление данных в компьютере, основанные на использовании семантико-ассоциативных связей между различными уровнями восприятия.

В случае одномерных сигналов за основную характеристику конкретного уровня восприятия обычно принимают временной масштаб. В нахождении корреляционных зависимостей между различными временными масштабами представления сигнала лежит ключ к созданию компактной древовидной структуры с семантико-ассоциативной идентификацией объектов разного уровня иерархии.

Согласно новой парадигме информационной связи [1], для максимального учета особенностей человеческого восприятия и соответственно для достижения максимальной эффективности обработки, помимо иерархичности, структурное представление должно обладать следующими основными свойствами.

— Адаптивностью, что выражается в зависимости количества объектов на различных уровнях, количества этих уровней и связей между ними только от формы исходного сигнала;

— Рекурсивной организацией связей, подразумевающей выражение нижнего уровня иерархии в виде ссылки на более высокий уровень. В идеале такое представление должно захватывать не только форму представления, но и само содержание, то есть данные, лежащие на каждом уровне представления. При этом ставится задача минимизации числа областей,

описываемых одним и тем же рекурсивным выражением, и охват каждой из них максимального количества элементов полной древовидной структуры.

В наибольшей степени этими свойствами обладают следующие методы обработки сигналов, получившие широкое распространение на настоящий момент:

— Кратномасштабный анализ и его частный случай — вейвлет-анализ. Общая идея метода [2] состоит в том, что исследуемый сигнал раскладывается в базисе рекурсивно вложенных подпространств. Каждое из этих подпространств образует соответствующий уровень иерархии, причем наивысший уровень определяет весь сигнал в целом, а низший — его минимально различимый фрагмент. Иерархическое дробление основано на локализации временных характеристик сигнала, что составляет принципиальное отличие данного метода от классических методов спектрального, и, в частности, фурье-анализа. В общем случае кратномасштабное представление избыточно, однако доказано [3], что при условии ортогональности масштабирующих функций и различии временных масштабов соседних уровней иерархии в два раза такой базис не содержит избыточной информации. Вместе с тем, наложение этого требования существенно понижает степень адаптивности представления структуры и недостаточно полно использует свойство рекурсии. Следует отметить интересный способ преодоления последнего недостатка, предложенный в так называемом алгоритме нуля-дерева Шапиро [4] и в дальнейшем усовершенствованный Саидом и Перельманом [5].

— Фрактальный анализ, концепция которого предложена в [6]. Этот подход предусматривает построение рекурсивно-иерархической структуры за счет поиска самоподобных фрагментов сигнала на различных временных масштабах. Выражение областей нижнего уровня иерархии через высшие производится при помощи системы итерируемых функций IFS, содержащей стандартный набор аффинных преобразований, включающий в себя масштабирование и временной сдвиг [7]. Согласно новой парадигме информационной связи [1], при таком подходе информационное сообщение содержит алгоритм развертки информационного содержания в самом себе, что позволяет достичь эффективности передачи, превышающей оценки по теореме отсчетов Шеннона-Котельникова. Наиболее существенным недостатком фрактального анализа является высокая вычислительная сложность поиска самоподобия, сравнимая с полным перебором, и отсутствие быстрых алгоритмов вследствие проблемы инверсии [7]. Основным способом снижения вычислительных затрат при фрактальном анализе по настоящее время является разработка эвристических методов эффективного поиска самоподобия.

Несмотря на кажущееся принципиальное различие подходов, эти два метода имеют много общих свойств, основанных на представлении в виде рекурсивно вложенных разномасштабных пространств. Такой способ представления хорошо иллюстрируется "принципом матрешки", лежащем в основе динамической модели дискретного пространства (ДМДП), предложенной в [8]. Таким образом, оба вышеописанных метода являются частным случаем ДМДП, учитывающими различные аспекты рекурсивно-семантической идентификации объектов исходного сигнала. Неявное использование этими методами лежащего в основе ДМДП принципа идентификации неразличимости

обеспечивает восстановление информации на приемной стороне с последовательно возрастающей степенью детализации.

Достаточно большое число исследований посвящены способам объединения фрактального и кратномасштабного методов обработки одномерных сигналов, обеспечивающих повышение эффективности относительно скорости обработки или степени компрессии. Так, в [9] предложен метод ускорения процедуры фрактального анализа с применением методов вейвлет-анализа, позволяющий определять границы самоподобных участков на основе так называемого "скелета максимумов" вейвлет-спектрограммы при анализе финансовых рядов. Напротив, в работе [10] эффективность вейвлет-анализа возрастает за счет применения аффинных преобразований самоподобия к локализованным во времени областям разных уровней иерархии.

В данной статье рассматривается способ адаптивного рекурсивно-иерархического представления одномерных сигналов, обладающих фрактальными свойствами, который сочетает в себе свойства фрактального и вейвлетного методов кодирования. Повышение эффективности обработки достигается за счет рекурсивного представления самоподобных областей с произвольным уровнем масштабирования, а также использования особенностей интуитивного восприятия человеком сигнала с неизвестным источником информации. Отдельно рассматриваются особенности быстрой вычислительной реализации предлагаемого метода.

2. Психофизиологические особенности структурирования информации об одномерных сигналах

С точки зрения человеческого восприятия, при анализе сигнала от неизвестного источника информации основными элементами, несущими семантико-смысловую нагрузку, в первом приближении являются экстремумы сигнала и их взаимное расположение. Несмотря на удобство разложения и анализа сигналов в базисе гармонических функций, человек производит первичную оценку параметров сигнала посредством его кусочно-линейной аппроксимации. Таким образом, первичная структуризация неизвестного сигнала осуществляется по принципу выделения областей знакопостоянства первой производной. Вторичным признаком с точки зрения психофизиологического восприятия служит оценка гладкости поведения наблюдаемой функции, что с математической точки зрения эквивалентно определению степени непрерывности первой и второй производных, а также определению их экстремальных точек. Наконец, последним этапом структурного представления анализируемого сигнала является определение подобных друг другу участков как на близких, так и на существенно различных временных масштабах. Все это, вкупе с оценкой степени стационарности исследуемого процесса, подразумевающей временную локализацию его характеристик, и создает в человеческом воображении структурное представление наблюдаемого объекта.

Именно эти способы, в порядке убывания их приоритета, предлагается положить в основу разрабатываемой модели рекурсивно-иерархического представления фракталоподобных сигналов. Именно для фракталоподобных сигналов наиболее характерен рекурсивный способ упорядочения информации при осмыслении объекта, и именно этот способ приводит к столь

значительному сокращению объема хранения информации без нарушения концепции целостности восприятия. Как показали исследования, именно этот способ структуризации отвечает за формирование эстетического впечатления от наблюдаемого объекта, будь то графическое изображение одномерного фрактала, музыка Баха или архитектурные формы, подчиняющиеся рекурсивно формируемому отношению "золотого сечения". Классификация сигналов по степени "фракталоподобности" может быть произведена как на основе априорных знаний об их источнике, так и по количественным признакам, характеризующим форму спектральной характеристики и фрактальную размерность сигнала.

3. Построение древовидной структуры

3.1. Формирование уровней структурного представления

Как было указано выше, в качестве основополагающего элемента структурного представления предполагается взять зависимость количества элементарных областей от масштабного уровня рассмотрения процесса. Очевидно, что на низшем уровне иерархии число областей будет при этом совпадать с количеством областей с одним знаком производной у исходного сигнала, а на самом верхнем уровне такая область будет всего одна.

Рассмотрим основные способы формирования областей различного уровня и семантико-ассоциативных связей между ними.

3.2. Структурное представление на основе теории фильтрации

Применение к исходному сигналу сглаживающих фильтров с последовательным увеличением временного масштаба позволяет сформировать структуру, удовлетворяющую вышеуказанным требованиям. Принцип формирования уровней с помощью этого метода для фрагмента аудиосигнала "Элизе" Бетховена показан на рис. 1.

Каждый структурный уровень в этом случае определяется сверткой исходного сигнала со сглаживающим фильтром соответствующего масштаба во временной области. Для формирования древовидной структуры при этом необходимо обеспечить выполнение требования монотонного убывания количества элементарных областей при возрастании уровня иерархии. Это, в свою очередь, влечет за собой требование монотонного убывания как временных, так и частотных характеристик рассматриваемого фильтра. Этому требованию удовлетворяет семейство фильтров, обладающих свойством оптимальной частотно-временной локализации, наиболее известный представитель которой — фильтр Гаусса:

$$G(t)=\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (1),$$

обеспечивающий наилучшую частотно-временную локализацию.

Как известно, фильтрация сигналов конечной протяженности дает большие ошибки на границах сигнала, что может привести к нарушению условия формирования иерархической структуры. Особенно сильно это

сказывается при вычислении дискретной свертки. Для устранения краевых ошибок предлагается замена аperiodической свертки на периодическую, что предполагает некоторое увеличение объема вычислений, однако обеспечивает построение иерархической структуры для любых одномерных сигналов. Зависимость между масштабами соседних уровней в соответствии с теорией много масштабного анализа выражается по мультипликативному закону

$$t_{n-1} = k \cdot t_n \quad (2),$$

где k определяет структурное разрешение по шкале масштабов. При $k \rightarrow 1$ мы переходим к непрерывному случаю и имеем полную картину поведения сигнала при применении данного сглаживающего фильтра. При $k=2$ и замене сглаженных уровней сигнала на межуровневые сигналы ошибки мы переходим к классическому варианту вейвлет-анализа.

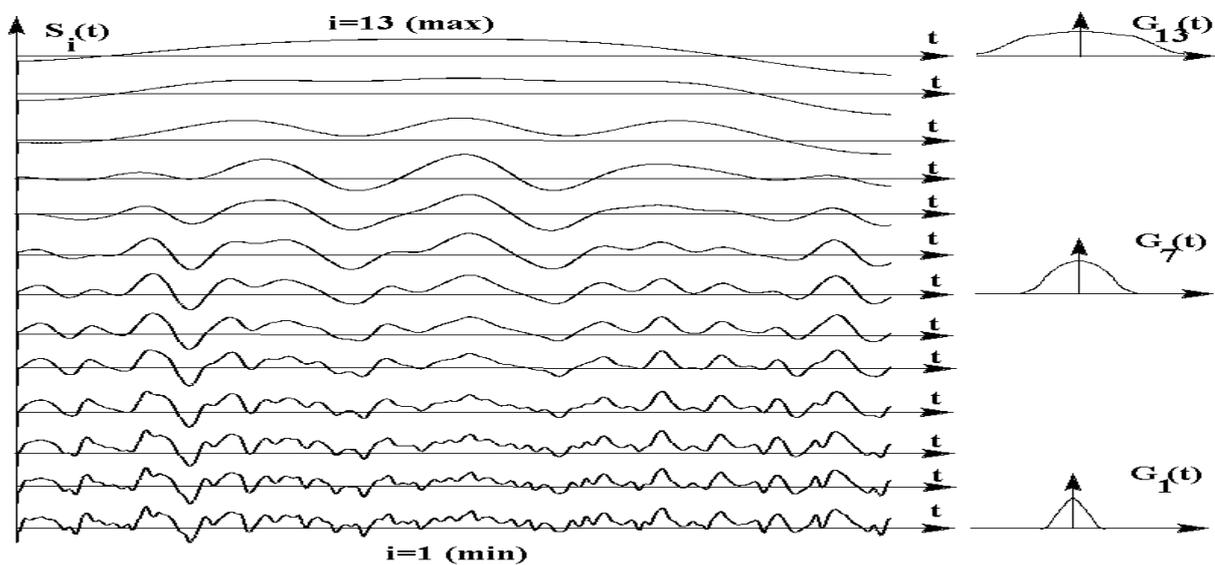


Рис. 1. Формирование уровней методом фильтрации гауссовским фильтром

В полученной древовидной структуре узлы определяют области производной сигнала одного знака, а ветви — соответствие между областями соседних уровней иерархии. Принцип формирования ассоциативных связей между соседними уровнями показан на рис. 2, а полная древовидная структура при $k=2^{1/2}$ — на рис. 3.

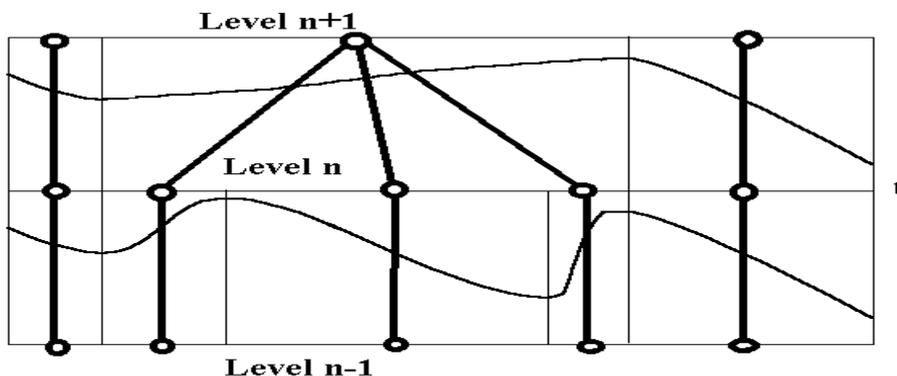


Рис. 2. Принцип формирования ассоциативных межуровневых связей

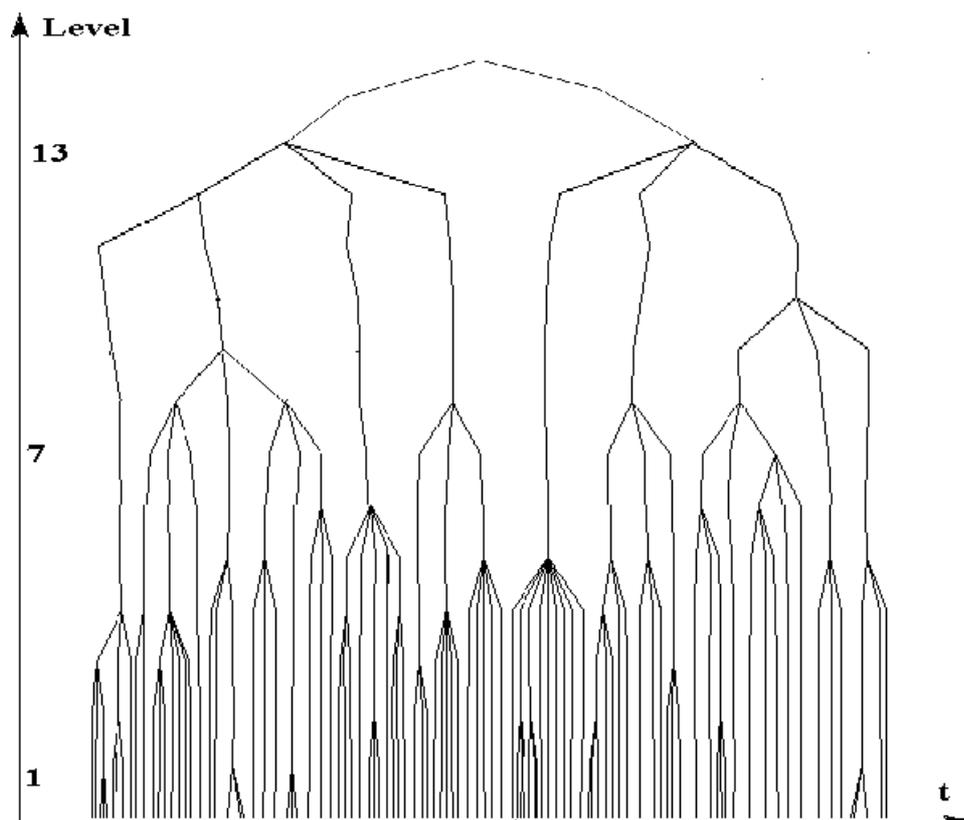


Рис. 3. Древоподобная структура, полученная методом фильтрации

Очевидно, что при увеличении k в соответствии с принципом идентификации неразличимости [8] будет теряться информация об ассоциативных связях между соседними уровнями иерархии и будет уменьшаться число самих уровней. Между тем, в рамках предложенной модели наибольший интерес представляет нахождение пространственно-временных координат всех точек ветвления областей, поскольку с их помощью возможно восстановление полной древоподобной структуры с высокой степенью точности. Рассмотрим основные методы решения данной проблемы.

Легко заметить, что простое увеличение количества уровней иерархии и, соответственно, уменьшение коэффициента k приведет к экспоненциальному росту вычислительной сложности алгоритма. При этом подавляющая часть информации будет избыточной. Выход из этого затруднительного положения легко найти в применении методов теории оптимизации, заключающихся в нахождении экстремумов на данном уровне методами дихотомии или "золотого сечения".

Процедура нахождения экстремумов выглядит следующим образом. Сначала производится поиск экстремумов во временной области на фиксированных уровнях иерархии и строится огрубленное приближение иерархической структуры. Далее в масштабно-временной структуре выявляются области ветвления и в этих областях производится бинарный поиск по масштабной оси.

Предлагаемый подход позволяет сформировать тернарную древоподобную структуру с точной фиксацией уровней ветвления. Преимущества формирования такой структуры в том, что она использует методы классической теории связи и позволяет осуществить аппаратную реализацию с использованием стандартной элементной базы. Вместе с тем, для

компьютерной обработки с использованием данного метода существуют серьезные ограничения, связанные с большой вычислительной сложностью метода. Кроме того, несмотря на однозначное определение межуровневых связей, соответствующие области соседних уровней в общем случае имеют временной сдвиг, что создает дополнительную избыточность представления. Поэтому основное внимание ниже будет уделено методам, сочетающим в себе полезные свойства этого метода с простой и высокоскоростной компьютерной реализацией.

3.3. Структурное представление на основе слияния областей в тернарное дерево

Данный метод является упрощенной версией предыдущего метода, обеспечивая при этом фиксацию временных областей в сочетании с высокой скоростью обработки информации. В основе метода лежит математическая теория фракталоподобных сигналов.

Согласно этой теории, фракталоподобный сигнал не имеет производной ни в одной точке своего существования. Однако традиционные цифровые методы представления игнорируют это фундаментальное свойство вследствие неизбежных погрешностей дискретизации и квантования. Однако можно заметить, что максимальное по модулю значение первой производной дискретизированного фракталоподобного сигнала зависит от выбора шага дискретизации таким образом, что при увеличении шага дискретизации это значение неизбежно уменьшается. Таким образом, для фракталоподобных сигналов сам процесс дискретизации обладает свойством сглаживания, и это свойство можно эффективно использовать.

Введем понятие зигзагообразной области. Будем называть так область с тремя участками знакопостоянства производной. Она характеризуется временной длительностью, амплитудным размахом, равным разности начального и конечного значений, и величиной производной, равной отношению амплитуды к длительности. Число тернарных областей в исходном сигнале равно числу элементарных областей минус два.

Для формирования структуры на основе данного метода на первом шаге создается список зигзагообразных областей, упорядоченный по величине производной. Затем на каждом шаге итерационного процесса производится преобразование области с максимальным значением производной в

элементарную область и переупорядочение списка областей. Таким образом, на каждой итерации количество областей уменьшается на два. Процесс происходит до тех пор, пока на верхнем уровне иерархии останется не более двух элементарных областей. Схематически процесс объединения изображен на рис. 4.

Преимуществами данного метода помимо высокой скорости являются временная фиксация областей исходного сигнала, а также отсутствие граничных искажений. Кроме того, каждый уровень итерации данного метода сохраняет структуру чередования максимумов и минимумов исходного сигнала, что немаловажно для дальнейшей обработки с целью компрессии информации.

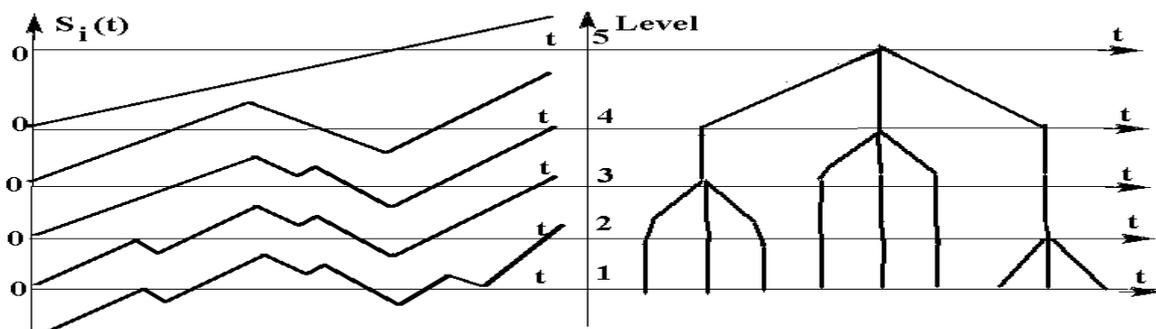


Рис. 4. Объединение зигзагообразных областей в тернарное дерево

3.4. Структурное представление на основе слияния областей в бинарное дерево

Такой метод структурного представления является модификацией предыдущего. Отличие состоит в том, что в этом случае объединение производится по двум соседним элементарным областям с максимальным суммарным значением первой производной, образуя тем самым не тернарное, а бинарное дерево. Соответственно на каждом шаге итерации количество элементарных областей уменьшается на единицу. Схематически процесс объединения изображен на рис. 5.

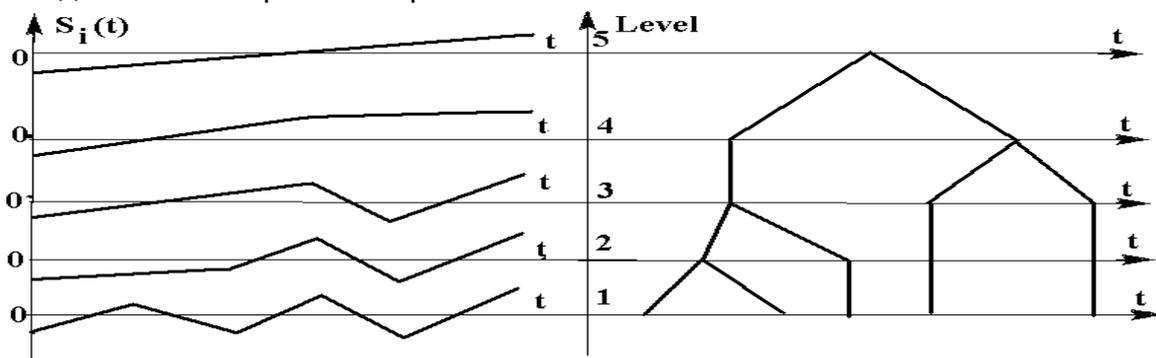


Рис. 5. Объединение областей в бинарное дерево

Данный метод не сохраняет структуру чередования экстремумов исходного сигнала на каждом шаге итерации. В то же самое время, такой способ позволяет осуществить более точную кусочно-линейную аппроксимацию исходного сигнала не только на основе его локальных экстремумов, но и на основе локальных экстремумов первой производной и производных более высокого порядка.

4. Организация рекурсивных связей в структурном представлении

Основной целью первого этапа структурного представления было адаптивное построение древовидной структуры с постоянной арностью — соответственно бинарной или тернарной. Хотя такая структура сама по себе обладает компактным и удобным для поиска представлением, применение рекурсивного подхода позволяет не только повысить коэффициент компрессии,

но и обеспечивает фрактальную аппроксимацию для масштабно-независимого представления исходного сигнала.

С точки зрения хранения информации древовидная структура представляет собой совокупность узлов и связей между ними. Если на каком-либо уровне структуры обнаруживаются повторяющиеся паттерны, можно сделать вывод об избыточности представления данной структуры. Такая избыточность эффективно устраняется с помощью простого переопределения ссылок. Однако для сигналов, обладающих свойством самоподобия, вполне очевидно, что повторяющиеся паттерны могут встречаться и на различных уровнях иерархической структуры. Таким образом, с помощью рекурсивно-ссылочной адресации самоподобных узлов можно сократить количество необходимой для представления информации с приемлемыми для восприятия потерями качества. Схематично процесс формирования рекурсивно-ссылочных связей представлен на рис. 6.



Рис. 6. Формирование рекурсивно-ссылочных связей

Относительно данного метода необходимо сделать следующие замечания:

— При формировании рекурсивных связей структурное представление утрачивает древовидный характер по определению, превращаясь в ориентированный граф. Между тем, содержание элементарных ячеек — бывших узлов дерева не претерпевает изменений, эффективность достигается лишь за счет переупорядочения и удаления ненужных связей.

— Если для всех узлов нижнего уровня иерархии определены рекурсивные связи в виде ссылок на более высокие иерархические уровни, такая структура обладает свойством бесконечной вложенности и становится полностью фрактальным объектом. Это означает, что исходный сигнал можно восстановить с любой степенью детализации, в том числе превышающей исходное разрешение, определяемое частотой дискретизации.

Для эффективного формирования рекурсивно-иерархических связей необходимо обеспечить выполнение следующих условий:

— Абсолютные значения параметров узлов запоминаются лишь на самом верхнем уровне иерархии. Значения же узлов нижележащих уровней представляют собой процентное выражение величин относительно верхнего уровня, параметры которого принимаются за единицу. Таким образом выражаются как временные, так и амплитудные параметры нижележащих уровней.

— Для обеспечения эффективного поиска совпадений и выявления скрытого самоподобия при построении рекурсивных связей следует применять стандартный набор аффинных и циклических преобразований, включающий в себя инверсию во времени и по амплитуде, масштабирование амплитуды и циклическую перестановку порядка следования узлов. Чрезмерное усложнение набора преобразований приводит, однако, к существенному увеличению сложности процедуры поиска совпадений, поэтому сложные преобразования целесообразно применять только для самых нижних уровней иерархии.

— В соответствии с теоремой о коллаже [7] для обеспечения условия сходимости рекурсивно-фрактального преобразования необходимо выполнение требования уменьшения масштаба для аффинных преобразований на каждом уровне рекурсивной ссылочности. При игнорировании этого требования дальнейшее увеличение масштаба представления приведет к хаотическому шумовому процессу, имеющему мало общего с исходным сигналом.

Следующий метод формирования поиска совпадений позволяет эффективно учесть все вышеупомянутые требования. Коэффициент компрессии исходного сигнала ограничивается при этом лишь задаваемым пользователем максимальным среднеквадратичным отклонением (СКО) восстановления исходного сигнала.

Согласно этому методу, происходит упорядочение всех узлов сформированной структуры по их эмпирически формируемым весовым функциям. Данная функция характеризует СКО восстановления исходного сигнала при организации рекурсивной связи от рассматриваемого узла к узлу верхнего уровня. При этом выбирается аффинное преобразование, обеспечивающее минимальный уровень СКО. Если ни один из узлов не удовлетворяет требованиям заданного пользователем СКО, рекурсивная связь на данный узел не осуществляется, и та же самая процедура повторяется для нижележащего уровня иерархии.

5. Восстановление исходного сигнала по заданной рекурсивно-иерархической структуре

Основная проблема предложенного способа рекурсивно-иерархического восстановления состоит в плохом качестве восстановления сигнала на основе кусочно-линейной аппроксимации. Большинство существующих в природе сигналов обладают свойством самоподобия лишь до определенного уровня, сохраняя гладкость и непрерывность производных на малых временных масштабах. В то же время кусочно-линейная аппроксимация не обеспечивает непрерывности производных в экстремальных точках функции.

Следует отметить, что замена кусочно-линейной системы итерируемых функций на полиномиальные системы более высокого порядка не приводит к решению данной проблемы, поскольку приводит к существенному усложнению древовидной структуры и колоссальному усложнению процедуры поиска совпадений. Для обеспечения необходимой гладкости наиболее эффективными являются следующие методы:

— Учет информации об экстремумах производных первого и более высокого порядка. Данный метод хорошо зарекомендовал себя при представлении аудиоинформации. Дело в том, что с точки зрения психофизиологического восприятия человеком аудиосигналов решающую роль играет не уровень звукового давления, а именно его относительное изменение.

При восстановлении сигнала по его первой производной его форма может существенно отличаться от исходного, но поскольку СКО его первой производной будет лежать в установленных пределах, изменение формы мало отразится на качестве звучания.

— Восстановление исходного сигнала кусочно-линейными сплайнами. Этот метод применяется для обеспечения непрерывности восстановления сигнала и его производных по его интерполяционным точкам. Наилучшее сочетание эффективности и скорости обеспечивает интерполяция локальными кубическими сплайнами. Поскольку интерполяционные точки совпадают с точками экстремумов, выражение для соответствующего полинома существенно упрощается, обеспечивая требуемую гладкость восстановления в сочетании с минимизацией СКО.

6. Заключение

Разработанный метод рекурсивно-иерархического представления обеспечивает более эффективную компрессию и масштабирование дискретных одномерных сигналов. На основе метода слияния областей в тернарное дерева разработана программа, которая при том же коэффициенте компрессии по сравнению с традиционными фрактальными методами типа IFS [7] повышает скорость кодирования в среднем в 2,1 раза, обладая при этом лучшим качеством восстановления. Простота реализации и возможность блочной обработки открывают возможность для разработки для хранения и передачи аудиосигналов в реальном времени в сети интернет. Разработанные методы легко обобщаются на случай многомерных сигналов, что позволяет применить рекурсивный подход для кодирования изображений и видеoinформации.

Литература

- [1] Александров В. В., Скурихин А. В., Блажис А. К. О новой парадигме информационной связи // Информационные технологии и интеллектуальные методы. Выпуск №3. — СПб: СПИИРАН, 1999. — с. 289-299.
- [2] Mallat S. G. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation // IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell., 11:674-693, July 1989.
- [3] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. // Comm. Pure and Appl. Math., 41:909-996, 1988.
- [4] Shapiro J. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients // IEEE Transactions on Signal Processing, 41(12):3445-3462, Dec. 1993.
- [5] Said A. and Pearlman W. A.. A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees // IEEE. Trans. Circ. Syst. Video Tech. 6, pp. 243-250, June 1996.
- [6] Mandelbrot B. Fractal Geometry of Nature. Freeman, New York, 1982. — 288 p.
- [7] Barnsley M. F. Fractals Everywhere. London: Academic Press Inc., 1988. — 396 p.
- [8] Александров В. В., Арсентьева А. В. Информация и развивающиеся структуры. — Л.: ЛНИВЦ АН СССР, 1984. — 186 с.
- [9] Левкович-Маслюк Л. И. Нахождение порождающих матриц для фрактальных интерполяционных функций с помощью вейвлет-анализа // Регулярная и хаотическая динамика, 1998, т. 2. — <http://rcd.com.ru:8101/rcd/contents/1998-2/pdf/levkov.zip>
- [10] Wannamaker R. A. and Vrscay E. R.. Fractal Wavelet Compression of Audio Signals // Journal of the Audio Engineering Society, Vol. 45, Nos. 7-8, pp. 540-553 (1997).