

ISSN 1684-8853 (print); ISSN 2541-8610 (online)

ИНФОРМАЦИОННО- УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

6(127)/2023

6(127)/2023

PEER REVIEWED JOURNAL

INFORMATSIONNO- UPRAVLIAIUSHCHIE SISTEMY (INFORMATION AND CONTROL SYSTEMS)

Founder

A. Vostrikov

PublisherSaint Petersburg State University
of Aerospace Instrumentation**Editor-in-Chief**

E. Krouk

Dr. Sc., Professor, Moscow, Russia

Executive secretary

O. Muravtsova

Editorial Board

S. Andreev

Dr. Sc., Tampere, Finland

V. Anisimov

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

B. Bezruchko

Dr. Sc., Professor, Saratov, Russia

N. Blaunstein

Dr. Sc., Professor, Beer-Sheva, Israel

M. Buzdalov,

PhD, Researcher, Saint Petersburg, Russia

C. Christodoulou

PhD, Professor, Albuquerque, New Mexico, USA

A. Dudin

Dr. Sc., Professor, Minsk, Belarus

I. Dumer

PhD, Professor, Riverside, USA

M. Favorskaya

Dr. Sc., Professor, Krasnoyarsk, Russia

L. Fortuna

PhD, Professor, Catania, Italy

A. Fradkov

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

A. Hramov

Dr. Sc., Professor, Innopolis, Russia

L. Jain

PhD, Professor, Canberra, Australia

G. Matvienko

Dr. Sc., Professor, Tomsk, Russia

A. Myllari

PhD, Professor, Grenada, West Indies

K. Samouylov

Dr. Sc., Professor, Moscow, Russia

J. Seberry

PhD, Professor, Wollongong, Australia

M. Sergeev

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

A. Shalyto

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

A. Shepeta

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

Yu. Shokin

RAS Academician, Dr. Sc., Novosibirsk, Russia

A. Smirnov

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

T. Sutikno

PhD, Associate Professor, Yogyakarta, Indonesia

Z. Yuldashev

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

R. Yusupov

RAS Corr. Member, Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

A. Zeifman

Dr. Sc., Professor, Vologda, Russia

Editor: A. Larionova**Proofreader:** T. Zvertanovskaia**Design:** M. Chernenko, Yu. Umnitsyna**Layout and composition:** Yu. Umnitsyna**Contact information**The Editorial and Publishing Center, SUAI
67A, Bol'shaya Morskaya, 190000, Saint Petersburg, RussiaWebsite: <http://i-us.ru/en>, e-mail: i-us.spb@gmail.com

Tel.: +7 - 812 494 70 02

THEORETICAL AND APPLIED MATHEMATICS*Andriyanova N. R. Stability analysis of a Lurie system with scalar retarded control and switching*

2

INFORMATION PROCESSING AND CONTROL*Oreshkina M. V. Minimization technique for the amount of computation for land clutter simulation*

12

SYSTEM AND PROCESS MODELING*Krestovnikov K. D. Mathematical model and control algorithms for a group of ground robots with energy resource redistribution*

20

HARDWARE AND SOFTWARE RESOURCES*Duzhin V. S. A software package for studying problems of asymptotic combinatorics of Young diagrams and Young tableaux*

35

INFORMATION SECURITY*Fatkieva R. R. Secure data transmission method for the movement of autonomous vehicles*

46

SYSTEM ANALYSIS*Efremov A. A., Kozlov V. N. Sufficient conditions for the stability of a locally admissible dynamic system with constraints on phase coordinates and controls*

57

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

66

Contents of the journal «Informatsionno-upravliaiushchie sistemy (Information and Control Systems)» for 2023 [№ 1–6]

68

6(127)/2023

РЕЦЕНЗИРУЕМОЕ ИЗДАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННО-
УПРАВЛЯЮЩИЕ
СИСТЕМЫ

Учредитель

А. А. Востриков

Издатель

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

Главный редактор

Е. А. Крук,

д-р техн. наук, проф., Москва, РФ

Ответственный секретарь

О. В. Муравцова

Редакционная коллегия:

С. Д. Андреев,

д-р техн. наук, Тампере, Финляндия

В. Г. Анисимов,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Б. П. Безручко,

д-р физ.-мат. наук, проф., Саратов, РФ

Н. Блаунштейн,

д-р физ.-мат. наук, проф., Беэр-Шева, Израиль

М. В. Буэдалов,

канд. техн. наук, научный сотрудник, Санкт-Петербург, РФ

Л. С. Джайн,

д-р наук, проф., Канберра, Австралия

А. Н. Дудин,

д-р физ.-мат. наук, проф., Минск, Беларусь

И. И. Думер,

д-р наук, проф., Риверсайд, США

А. И. Зейфман,

д-р физ.-мат. наук, проф., Вологда, РФ

К. Кристодолу,

д-р наук, проф., Альбукерке, Нью-Мексико, США

Г. Г. Матвиенко,

д-р физ.-мат. наук, проф., Томск, РФ

А. А. Мюллери,

д-р наук, профессор, Гренада, Вест-Индия

К. Е. Самуилов,

д-р техн. наук, проф., Москва, РФ

Д. Себерри,

д-р наук, проф., Волонгонг, Австралия

М. Б. Сергеев,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

А. В. Смирнов,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Т. Сутикну,

д-р наук, доцент, Джокьякарта, Индонезия

М. Н. Фаворская,

д-р техн. наук, проф., Красноярск, РФ

Л. Фортуна,

д-р наук, проф., Катания, Италия

А. Л. Фрадков,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

А. Е. Храмов,

д-р физ.-мат. наук, Иннополис, РФ

А. А. Шальто,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

А. П. Шепета,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Ю. И. Шокин,

акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф., Новосибирск, РФ

З. М. Юлдашев,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Р. М. Юсупов,

чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Редактор: А. Г. Ларионова

Корректор: Т. В. Звертановская

Дизайн: М. Л. Черненко, Ю. В. Умницына

Компьютерная верстка: Ю. В. Умницына

Адрес редакции: 190000, г. Санкт-Петербург,

ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, ГУАП, РИЦ

Тел.: (812) 494-70-02, эл. адрес: ius.spb@gmail.com,

сайт: http://i-us.ru

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Андриянова Н. Р. Анализ устойчивости системы Лурье со скалярным запаздывающим управлением и переключениями

2

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЕ

Орешкина М. В. Метод минимизации объема вычислений при имитации отражений радиоволн от земной поверхности

12

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Крестовников К. Д. Математическая модель и алгоритмы управления группой наземных роботов с перераспределением энергетических ресурсов

20

ПРОГРАММНЫЕ И АППАРАТНЫЕ СРЕДСТВА

Дужин В. С. Программный инструментарий для исследования задач асимптотической комбинаторики диаграмм и таблиц Юнга

35

ЗАЩИТА ИНФОРМАЦИИ

Фаткиева Р. Р. Метод защищенной передачи информации для передвижения автономных транспортных средств

46

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Ефремов А. А., Козлов В. Н. Достаточные условия устойчивости локально допустимой динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления

57

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

66

Содержание журнала «Информационно-управляющие системы» за 2023 г. [№ 1–6]

68



Анализ устойчивости системы Лурье со скалярным запаздывающим управлением и переключениями

Н. Р. Андриянова^а, аспирант, orcid.org/0000-0002-6152-3572, st040174@student.spbu.ru

^аСанкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург, 199034, РФ

Введение: для обеспечения устойчивости линейных систем с переключениями М. С. Браницкий (Branicky M. S.) предложил метод нахождения условий на закон переключений. Известно также, что наличие запаздываний может устойчивость нарушить. Целесообразно распространить этот метод на систему автоматического регулирования с нелинейным управлением, которое бы позволило задавать произвольные запаздывания при управлении или переключении. **Цель:** при произвольном фиксированном запаздывании в управлении получить ограничение на закон переключений, которое бы гарантировало устойчивость решения нелинейной системы, где подсистемы заданы уравнениями с линейными по состоянию правыми частями, а управление входит в систему в виде скалярной нелинейности с рациональным показателем, большим единицы. **Результаты:** исследованы случаи как синхронных (одновременных для всех параметров системы), так и асинхронных переключений в связи с возникновением задержек при выработке управляющего воздействия, а также при поступлении информации о смене активной подсистемы. Для каждой из рассматриваемых систем построены составные функционалы Ляпунова – Красовского, позволившие найти условия на закон переключений, при которых решения являются локально асимптотически устойчивыми. Оказалось, что для этого достаточно выбирать моменты переключения так, чтобы длительность действия подсистемы неограниченно стремилась к бесконечности со временем. Показано, что в дискретном случае аналогичные условия также обеспечат устойчивость при достаточно малом шаге дискретизации. Проведено численное моделирование в случаях как синхронных, так и асинхронных переключений между непрерывными и дискретными подсистемами. Графики, представленные в данной работе, согласуются с теоретическими выводами.

Ключевые слова – системы Лурье, запаздывание, синхронные и асинхронные переключения, асимптотическая устойчивость, составной функционал.

Для цитирования: Андриянова Н. Р. Анализ устойчивости системы Лурье со скалярным запаздывающим управлением и переключениями. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 6, с. 2–11. doi:10.31799/1684-8853-2023-6-2-11, EDN: UNKUBX
For citation: Andriyanova N. R. Stability analysis of a Lurie system with scalar retarded control and switching. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 2–11 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-2-11, EDN: UNKUBX

Введение

Математические модели, которые объединяют как дискретные, так и непрерывные свойства, являются гибридными системами. Они включают системы с переключением [1–8], которые описывают поведение конечного набора непрерывных подсистем дифференциальных уравнений и функции переключения между ними.

Когда все подсистемы экспоненциально устойчивы, известно [3], что если временные промежутки переключений достаточно большие, то асимптотическая устойчивость сохранится. Условия, накладываемые на закон переключений, для обеспечения асимптотической устойчивости решений систем с секторными нелинейностями были получены в работе [9].

Зачастую существенное влияние на устойчивость системы оказывают запаздывания, которые могут возникать как в состоянии, так и в управлении. Поэтому важно изучать нелинейные системы с запаздыванием [10–18]. Ввиду нередкой невозможности определить величину задержки ставится вопрос об устойчивости реше-

ний систем при любых запаздываниях. В таком случае об устойчивости позволяет судить второй метод Ляпунова, согласно которому требуется построить либо функции Ляпунова, удовлетворяющие условию Разумихина, либо функционалы Ляпунова – Красовского.

Данная работа посвящена системе автоматического регулирования, где состояние системы входит и в уравнение для объекта, и в управление линейно. Скалярное управление с запаздыванием определяется динамическим законом и входит во все эти уравнения через степенную функцию с показателем, большим 1, с нечетными числителем и знаменателем.

Анализ устойчивости такого сорта нелинейных систем без запаздываний может быть проведен при помощи функции Ляпунова, состоящей из квадратичного слагаемого и интеграла от нелинейности секторного типа, как это показано в монографии А. М. Летова [19] применительно к задаче стабилизации курса самолета.

В настоящей работе для обеспечения устойчивости решения получены ограничения на закон переключений между непрерывными подсисте-

мами. Для любой фиксированной величины запаздывания в управлении и в законе переключения найдены условия асимптотической устойчивости решения. Результаты перенесены на случай разностных подсистем, где похожие условия гарантируют устойчивость при достаточно малом шаге дискретизации.

Синхронные переключения

Предположим, что заданы N подсистем, каждая из которых представляет собой систему автоматического регулирования

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_s \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_s f(z(t)); \\ \dot{z}(t) = \mathbf{C}_s^T \mathbf{x}(t) - \rho_1^{(s)} f(z(t)) - \rho_2^{(s)} f(z(t - \tau)), \end{cases} \quad (1)$$

где $s \in \{1, \dots, N\}$; переменные $\mathbf{x} \in R^n, z \in R^1$ и запаздывание $\tau > 0$. В параметры системы входят матрица \mathbf{A}_s размерности n , векторы \mathbf{b}_s и \mathbf{C}_s размерности $n \times 1$, числа $\rho_1^{(s)}$ и $\rho_2^{(s)}$. Функция $f(z) = z^\mu$ имеет рациональный положительный показатель μ , у которого числитель и знаменатель нечетные. При этом автоматически выполняется условие секторной нелинейности $zf(z) > 0$ при $z \neq 0$. Кроме того, система (1) имеет тривиальное решение.

Расширенный вектор решения обозначим $\mathbf{y}^T(t) = (\mathbf{x}^T(t), z(t))$. Чтобы построить решение системы (1), необходимо задать начальный момент времени t_0 и начальную вектор-функцию $\Phi^T = (\mathbf{x}^T(t_0), z_{t_0})$, где функция $z_t(\theta) = z(t + \theta)$ кусочно-непрерывна при $\theta \in [-\tau; 0]$. В данной работе используются евклидова норма для вектора, сингулярная – для матрицы, а для состояния – равномерная норма $\|\Phi\|_\tau = \sup_{\theta \in [-\tau; 0]} \|\Phi(\theta)\|$.

Законом переключений между подсистемами (1) называют кусочно-постоянную непрерывную справа функцию $\sigma(t)$, заданную при $t \geq 0$ со значениями в множестве номеров подсистем $\{1, \dots, N\}$. В данной работе не принимается в расчет случай Зено [1, 2], когда за конечный промежуток времени может произойти бесконечно много переключений.

Считаем известными моменты переключений $0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \dots$ при $m = 1, 2, \dots$. Система с переключениями имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_{\sigma(t)} f(z(t)); \\ \dot{z}(t) = \mathbf{C}_{\sigma(t)}^T \mathbf{x}(t) - \rho_1^{\sigma(t)} f(z(t)) - \rho_2^{\sigma(t)} f(z(t - \tau)). \end{cases} \quad (2)$$

Условия устойчивости в виде матричных неравенств, не зависящие от закона переключений, были получены в работе [17].

Решается задача получения условий на закон переключений $\sigma(t)$ и параметры системы, при вы-

полнении которых можно гарантировать асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (2) с фиксированным запаздыванием τ .

В статье М. С. Браницкого (Branicky M. S.) [20] разработан подход (dwell time approach), позволяющий найти условия, накладываемые на функцию переключения, при которых линейная система дифференциальных уравнений оставалась бы асимптотически устойчивой. При этом для каждой подсистемы строится своя функция Ляпунова, относительно которой получаются линейные дифференциальные неравенства и выводятся оценки решений на промежутке действия подсистемы. Учитывая эффект скачка функции Ляпунова при переключениях, приходят к условиям на закон переключений.

Поскольку система (2) дифференциально-разностная, вместо метода функций Ляпунова будет использован подход Ляпунова – Красовского, значит, нужно для каждой подсистемы предоставить положительно определенный функционал, для которого производная в силу подсистемы отрицательно определена. Введем два предположения.

Предположение 1. У функции $f(z) = z^\mu$ показатель $\mu > 1$.

Предположение 2. Существуют положительно определенные матрицы $\mathbf{D}^{(s)}$ такие, что формы

$$\begin{aligned} \Phi^{(s)}(t) = & \mathbf{x}^T(t) \left(\mathbf{A}_s^T \mathbf{D}^{(s)} + \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{A}_s \right) \mathbf{x}(t) + \\ & + \mathbf{x}^T(t) \left(2\mathbf{D}^{(s)} \mathbf{b}_s + \mathbf{C}_s \right) f(z(t)) - \left(\rho_1^{(s)} + \rho_2^{(s)} \right) f^2(z(t)) \end{aligned}$$

являются отрицательно определенными для $s = 1, \dots, N$.

С матрицами $\mathbf{D}^{(s)}$ из предположения 2 для каждой подсистемы (1) построен функционал Ляпунова – Красовского

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t) = & \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{x}(t) + \int_0^{z(t)} f(\theta) d\theta - \\ & - \rho_2^{(s)} f(z(t)) \int_{-\tau}^0 f(z(t + \theta)) d\theta + \\ & + \int_{-\tau}^0 \left(\beta^{(s)} + \gamma^{(s)}(\tau + \theta) \right) f^2(z(t + \theta)) d\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где параметры $\beta^{(s)} > 0, \gamma^{(s)} > 0$.

Оценим функционал (3) снизу:

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{x}, z_t) \geq & \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{x}\|^2 + d_1^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t + \theta)) d\theta + \\ & + \left(1 - \frac{\tau(\mu + 1)}{2l_1^{(s)}} \left(\rho_2^{(s)} \right)^2 z^{\mu-1} \right) \frac{z^{\mu+1}}{\mu + 1}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1^{(s)} = \lambda_{\min}(\mathbf{D}^{(s)})$, т. е. минимальное собственное число матрицы $\mathbf{D}^{(s)}$; $d_1^{(s)} = \beta^{(s)} - \frac{l_1^{(s)}}{2}, l_1^{(s)} > 0$.

Функционал (3) будет положительно определен в области $\|y_t\|_\tau < H_1$, где

$$H_1 = \min_{s \in \{1, \dots, N\}} \left(\frac{2l_1^{(s)}}{\tau(\mu+1)(\rho_2^{(s)})^2} \right)^{\frac{1}{\mu-1}}.$$

Тем же образом находится верхняя оценка функционала (3) в той же самой области. Тогда в полученной области работает двусторонняя оценка функционала

$$\begin{aligned} & \alpha_3^{(s)} z^{\mu+1} + d_1^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta + \\ & + \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{x}\|^2 \leq V^{(s)}(\mathbf{x}, z_t) \leq \alpha_2^{(s)} \|\mathbf{x}\|^2 + \\ & + \alpha_4^{(s)} z^{\mu+1} + d_2^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_2^{(s)} = \lambda_{\max}(\mathbf{D}^{(s)})$ – максимальное собственное число матрицы $\mathbf{D}^{(s)}$;

$$\alpha_3^{(s)} = \frac{1}{\mu+1} \left(1 - \frac{\tau(\mu+1)}{2l_1^{(s)}} (\rho_2^{(s)})^2 H_1^{\mu-1} \right);$$

$$\alpha_4^{(s)} = \frac{1}{\mu+1} \left(1 + \frac{\tau(\mu+1)}{2l_1^{(s)}} (\rho_2^{(s)})^2 H_1^{\mu-1} \right);$$

$$d_2^{(s)} = \beta^{(s)} + \gamma^{(s)} \tau + \frac{l_1^{(s)}}{2}.$$

Неравенство для сравнения функционалов $V^{(s)}(\mathbf{x}, z_t)$ и $V^{(v)}(\mathbf{x}, z_t)$ имеет вид

$$V^{(s)}(\mathbf{x}, z_t) \leq c V^{(v)}(\mathbf{x}, z_t), \quad (5)$$

где $c = \max_{s, v \in \{1, \dots, N\}} \left\{ \frac{\alpha_2^{(v)}}{\alpha_1^{(s)}}, \frac{\alpha_4^{(v)}}{\alpha_3^{(s)}}, \frac{d_2^{(v)}}{d_1^{(s)}} \right\}$.

Проверим отрицательную определенность производной функционала (3) в силу s -й подсистемы (1):

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(s)}(\mathbf{x}, z_t)}{dt} &= \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}_s^T \mathbf{D}^{(s)} + \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{A}_s \right) \mathbf{x} + \\ &+ \mathbf{x}^T \left(2\mathbf{D}^{(s)} \mathbf{b}_s + \mathbf{C}_s \right) f(z) - \left(\rho_1^{(s)} + \rho_2^{(s)} \right) f^2(z) - \\ &- \frac{df(z)}{dz} \rho_2^{(s)} \int_{-\tau}^0 f(z(t+\theta)) d\theta - \beta^{(s)} f^2(z(t-\tau)) + \\ &+ \left(\beta^{(s)} + \gamma^{(s)} \tau \right) f^2(z) - \gamma^{(s)} \int_{t-\tau}^t f^2(z(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

С учетом предположения 2 при выборе достаточно малых $\beta^{(s)}$ и $\gamma^{(s)}$ найдется область $\|y_t\|_\tau \leq H_2$, где слагаемые высоких порядков не нарушат отрицательную определенность про-

изводных функционалов. Тогда верхняя оценка будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(s)}(\mathbf{x}, z_t)}{dt} &\leq -b_1^{(s)} \|\mathbf{x}\|^2 - b_2^{(s)} z^{2\mu} - \\ &- b_3^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

с положительными коэффициентами $b_1^{(s)}, b_2^{(s)}, b_3^{(s)}$.

Далее будем работать в области $\|y_t\|_\tau < H = \min\{H_1, H_2\}$. Перейдем в неравенствах (4) и (6) к новым переменным

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \|\mathbf{x}(t)\|^2, \quad p_2(t) = z^{2\mu}(t), \\ p_3(t) &= \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta \end{aligned}$$

и продолжим оценки функционала и его производной сверху:

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t) &\leq \tilde{\alpha}_1^{(s)} \|p\|, \\ \tilde{\alpha}_1^{(s)} &= \max_{\|p\|=1} \left(\alpha_2^{(s)} |p_1| + \alpha_4^{(s)} |p_2| + d_2^{(s)} |p_3| \right) \end{aligned}$$

и

$$\frac{dV^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t)}{dt} \leq -\tilde{\alpha}_2^{(s)} \|p\|^{\rho+1},$$

где $\tilde{\alpha}_2^{(s)}$ – положительный коэффициент, а $\rho+1 = \frac{2\mu}{\mu+1}$.

Отсюда получается дифференциальное неравенство

$$\frac{dV^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t)}{dt} \leq -b \left(V^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t) \right)^{\rho+1}, \quad (7)$$

где положительная постоянная

$$b = \min_{s \in \{1, \dots, N\}} \frac{\tilde{\alpha}_2^{(s)}}{(\tilde{\alpha}_1^{(s)})^{\rho+1}}.$$

Пусть заданы моменты переключений $\theta_1, \dots, \theta_m, \dots$, где θ_m – первое переключение после t_0 . Интегрируем неравенство (7) сначала на промежутке до первого переключения $[t_0; \theta_m)$:

$$\left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\mathbf{x}_t) \right)^{-\rho} \geq \left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\boldsymbol{\Phi}) \right)^{-\rho} + b\rho(t - t_0).$$

При $t \in [\theta_{m+k-1}; \theta_{m+k})$, $k = 1, 2, \dots$ после интегрирования применяется неравенство сравнения (5), за счет которого последовательно происходит переход к оценкам на предыдущих промежутках:

$$\begin{aligned} & \left(V^{\sigma(\theta_{m+k-1})}(\mathbf{x}_t) \right)^{-\rho} \geq \left(V^{\sigma(\theta_{m+k-1})}(\mathbf{x}_{\theta_{m+k-1}}) \right)^{-\rho} + \\ & + b\rho(t - \theta_{m+k-1}) \geq c^{-\rho} \left(V^{\sigma(\theta_{m+k-2})}(\mathbf{x}_{\theta_{m+k-1}}) \right)^{-\rho} + \\ & + b\rho(t - \theta_{m+k-1}) \geq \dots \geq c^{-k\rho} \left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\boldsymbol{\varphi}) \right)^{-\rho} + \\ & + b\rho \left((t - \theta_{m+k-1}) + \Psi(m, k) + c^{-k\rho}(\theta_m - t_0) \right), \end{aligned}$$

где

$$\Psi(m, k) = \sum_{i=1}^{k-1} c^{-(k-i)\rho} (\theta_{m+i} - \theta_{m+i-1}). \quad (8)$$

Параметр k отвечает за количество переключений на промежутке $[t_0; t]$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Нулевое решение системы (2) будет асимптотически устойчивым, если для фиксированного запаздывания $\tau > 0$ функция (8) такова, что $\Psi(1, k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство: По свойствам однородных функций (см., например, [21]) неравенства (4) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \beta_1 \|\mathbf{y}\|^{\mu+1} & \leq V^{(s)}(\mathbf{y}_t) \leq \\ & \leq \beta_2 \|\mathbf{y}\|^2 + d_2^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta \end{aligned}$$

с помощью положительных β_1, β_2 .

Для любого ε такого, что $0 < \varepsilon \leq H$, дифференциальное неравенство (7) выполняется в области $\|\mathbf{y}_t\|_{\tau} < \varepsilon$. При $t \in [t_0; \theta_m)$ оценка решения запишется в виде

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| & \leq \beta_1^{\frac{1}{\mu+1}} \left(V^{(s)}(\mathbf{y}_t) \right)^{\frac{1}{\mu+1}} \leq \\ & \leq \beta_1^{\frac{1}{\mu+1}} \left(\left[\beta_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau}^2 + d_2^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z_{t_0}) d\theta \right]^{-\rho} + \right. \\ & \quad \left. + b\rho(t - t_0) \right)^{\frac{1}{\mu-1}}. \end{aligned}$$

При $t \in [\theta_{m+k-1}; \theta_{m+k})$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| & \leq \beta_1^{\frac{1}{\mu+1}} \left(c^{-k\rho} \left[d_2^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z_{t_0}) d\theta + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \beta_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau}^2 \right]^{-\rho} + b\rho \left[(t - \theta_{m+k-1}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Psi(m, k) + c^{-k\rho}(\theta_m - t_0) \right] \right)^{\frac{1}{\mu-1}}. \end{aligned}$$

Из условия теоремы следует существование такого k_0 , что для $k \geq k_0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \Psi(m, k) & = \Psi(1, k+m-1) - \\ & - c^{-(k-1)\rho} \sum_{i=1}^{m-1} c^{-(m-i)\rho} (\theta_{i+1} - \theta_i) > \\ & > \frac{1}{b\rho} \left(\frac{1}{\varepsilon \beta_1^{\mu+1}} \right)^{1-\mu}. \end{aligned}$$

Если $k \geq k_0$, то за счет указанного выше неравенства имеет место оценка $\|\mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$. Иначе при $k < k_0$

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \beta_1^{\frac{1}{\mu+1}} \left(c^{-k\rho} [\beta_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau}^2]^{-\rho} \right)^{\frac{1}{\mu-1}},$$

а значит, найдется

$$\delta = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2} c^{-k_0} \varepsilon^{\mu+1}}$$

такая, что для начальных функций $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau} < \delta$ решение будет оставаться в области $\|\mathbf{y}(t)\|_{\tau} < \varepsilon$, когда $t \geq t_0$. Наконец, из оценок решения видно, что $\|\mathbf{y}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Конец доказательства.

Замечание 1. Нулевое решение системы (2) равномерно асимптотически устойчиво, если $\Psi(m, k) \rightarrow \infty$ равномерно по $m = 1, 2, \dots$ при $k \rightarrow \infty$.

Асинхронные переключения

Если переключения каких-либо хотя бы двух параметров системы происходят не одновременно, то такие переключения называют асинхронными. Так, например, часто возникают задержки в законе переключений во время формирования управляющего воздействия или при получении регулятором информации о смене активной подсистемы [16]. Рассмотрим аналог системы (2) с асинхронными переключениями:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_{\sigma(t)} f(z(t)); \\ \dot{z}(t) = \mathbf{C}_{\sigma(t)}^T \mathbf{x}(t) - \rho_1^{\sigma(t)} f(z(t)) - \rho_2^{\sigma(t-\tau)} f(z(t-\tau)). \end{cases} \quad (9)$$

Воспользуемся модификацией функционала (3)

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t) & = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{x}(t) + \int_0^{z(t)} f(\theta) d\theta - \\ & - f(z(t)) \int_{-\tau}^0 \rho_2^{\sigma(t+\theta)} f(z(t+\theta)) d\theta + \\ & + \int_{-\tau}^0 \left(\beta^{(s)} + \gamma^{(s)}(\tau + \theta) \right) f^2(z(t+\theta)) d\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно получить нижнюю оценку

$$V^{(s)}(\mathbf{x}, z_t) \geq \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{x}\|^2 + d_1^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta + \left(1 - \frac{\tau(\mu+1)}{2l_1^{(s)}} \max_q (\rho_2^{(q)})^2 z^{\mu-1}\right) \frac{z^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Видно, что в области $\|\mathbf{y}_t\|_\tau < H_1$, где

$$H_1 = \min_{s \in \{1, \dots, N\}} \left(\frac{2l_1^{(s)}}{\tau(\mu+1) \max_q (\rho_2^{(q)})^2} \right)^{\frac{1}{\mu-1}},$$

функционал (9) будет положительно определен и, более того, выполняются неравенства, аналогичные (4).

Производная функционала (10) в силу системы (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t)}{dt} &= \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{A}_s^T \mathbf{D}^{(s)} + \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{A}_s) \mathbf{x}(t) + \\ &+ \mathbf{x}^T(t) (2\mathbf{D}^{(s)} \mathbf{b}_s + \mathbf{C}_s) f(z(t)) - \\ &- \frac{df(z(t))}{dt} \int_{-\tau}^0 \rho_2^{\sigma(t+\theta)} f(z(t+\theta)) d\theta + \\ &+ (\beta^{(s)} + \gamma^{(s)} \tau - \rho_1^{(s)} - \rho_2^{(s)}) f^2(z(t)) - \\ &- \beta^{(s)} f^2(z(t-\tau)) - \gamma^{(s)} \int_{t-\tau}^t f^2(z(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

По тем же причинам, как и в синхронном случае, она будет отрицательно определена и иметь оценку вида (6). Дальше рассуждения из случая синхронных переключений нетрудно переложить на асинхронный и получить следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Нулевое решение системы (9) будет асимптотически устойчивым, если для фиксированного запаздывания функция (8) такова, что $\Psi(1, k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Замечание 2. Нулевое решение системы (9) равномерно асимптотически устойчиво, если $\Psi(m, k) \rightarrow \infty$ равномерно по $m = 1, 2, \dots$ при $k \rightarrow \infty$.

Дискретная система Лурье

Рассмотрим разностную систему с синхронными переключениями

$$\begin{cases} \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k) + h [\mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{y}(k) + \mathbf{b}_{\sigma(k)} f(\eta(k))]; \\ \eta(k+1) = \eta(k) + h [\mathbf{C}_{\sigma(k)}^T \mathbf{y}(k) - \rho_1^{\sigma(k)} f(\eta(k)) - \\ - \rho_2^{\sigma(k)} f(\eta(k-r))], \end{cases} \quad (11)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots; \mathbf{y} \in R^n; \eta \in R^1; r > 0$ целое; функция $\sigma: k \rightarrow s$, где $s \in \{1, \dots, N\}$; матрицы \mathbf{A}_s размерности n ; векторы \mathbf{b}_s и \mathbf{C}_s размерности $n \times 1$; $\rho_1^{(s)}$ и $\rho_2^{(s)}$ — числа. Шаг дискретизации h может выбираться так, чтобы запаздывание $\tau = rh$, если разностная система (11) получена из непрерывной (2) с помощью явного метода Эйлера.

Введем обозначение $\mathbf{y}^{(k)} = (\mathbf{y}^T(k), \mathbf{y}^T(k-1), \dots, \mathbf{y}^T(k-r))^T$, где r — целое неотрицательное запаздывание.

Считаем выполненными предположения 1 и 2. Дискретные функционалы с матрицами $\mathbf{D}^{(s)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) &= \mathbf{y}^T(k) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k) + \\ &+ \int_0^{\eta^{(k)}} f(\theta) d\theta + \sum_{j=1}^r \beta_j^{(s)} f^2(\eta(k-j)) - \\ &- h \rho_2^{(s)} f(\eta(k)) \sum_{j=1}^r f(\eta(k-j)), \end{aligned} \quad (12)$$

где параметры $\beta_j^{(s)} > 0$. Оценим снизу s -й функционал:

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) &\geq \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{y}(k)\|^2 + \frac{\eta^{\mu+1}(k)}{\mu+1} - \\ &- h \left| \rho_2^{(s)} \right| \sum_{j=1}^r \left[\frac{f^2(\eta(k))}{2l_j} + \frac{l_j f^2(\eta(k-j))}{2} \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^r \beta_j^{(s)} f^2(\eta(k-j)) \geq \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{y}(k)\|^2 + \\ &+ \frac{\eta^{\mu+1}(k)}{\mu+1} \left[1 - \frac{h(\mu+1)}{2 \sum_{j=1}^r l_j} \left| \rho_2^{(s)} \right| \eta^{\mu-1}(k) \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^r \left(\beta_j^{(s)} - \frac{h}{2} \left| \rho_2^{(s)} \right| \sum_{j=1}^r l_j \right) f^2(\eta(k-j)), \end{aligned}$$

где положительные величины l_j достаточно малы, чтобы не нарушить положительную определенность функционала в области $\|\mathbf{y}\| + \|\eta^{(k)}\| < H_1$ при

$$H_1 = \min_{s \in \{1, \dots, N\}} \left(\frac{2 \sum_{j=1}^r l_j^{(s)}}{h(\mu+1) \left| \rho_2^{(s)} \right|} \right)^{\frac{1}{\mu-1}}.$$

Теперь несложно получить верхнюю и нижнюю оценки в найденной области с положитель-

ными коэффициентами $\alpha_i^{(s)}$, $i = 1, \dots, 4$ и $d_j^{(s)}$, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} & \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{y}(k)\|^2 + \alpha_3^{(s)} \eta^{\mu+1}(k) + \\ & + d_1^{(s)} \sum_{j=1}^r f^2(\eta(k-j)) \leq \\ & \leq V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) \leq \alpha_2^{(s)} \|\mathbf{y}(k)\|^2 + \\ & + \alpha_4^{(s)} \eta^{\mu+1}(k) + d_2^{(s)} \sum_{j=1}^r f^2(\eta(k-j)). \end{aligned} \quad (13)$$

Пересчитав коэффициент c по той же формуле, как он находился в (5), для $s, q \in \{1, \dots, N\}$, приходим к неравенству

$$V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) \leq cV^{(q)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}). \quad (14)$$

В дискретном варианте метода Ляпунова – Красовского вместо производной находится приращение $\Delta V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) = V^{(s)}(\mathbf{y}(k+1), \eta^{(k+1)}) - V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)})$:

$$\begin{aligned} \Delta V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) &= \mathbf{y}^T(k+1) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k+1) - \\ & - \mathbf{y}^T(k) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k) + \int_{\eta(k)}^{\eta(k+1)} f(\xi) d\xi + \\ & + \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{j+1}^{(s)} f^2(\eta(k-j)) - \sum_{j=1}^r \beta_j^{(s)} f^2(\eta(k-j)) - \\ & - h\rho_2^{(s)} f(\eta(k+1)) \sum_{j=1}^r f(\eta(k-j+1)) + \\ & + h\rho_2^{(s)} f(\eta(k)) \sum_{j=2}^{r+1} f(\eta(k-j+1)). \end{aligned}$$

После подстановки правых частей системы (11) при $\sigma = s$ и некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta V^{(s)} &= h\Phi^{(s)}(k) + \Delta \mathbf{y}^T(k) \mathbf{D}^{(s)} \Delta \mathbf{y}(k) + \\ & + h\mu\theta_k [\eta(k) + \zeta_k\theta_k\Delta\eta(k)]^{\mu-1} (\Delta\eta(k))^2 + \beta_1^{(s)} f^2(\eta(k)) - \\ & - \beta_r^{(s)} f^2(\eta(k-r)) - \sum_{j=1}^{r-1} (\beta_j^{(s)} - \beta_{j+1}^{(s)}) f^2(\eta(k-j)) - \\ & - h\rho_2^{(s)} [f(\eta(k+1)) - f(\eta(k))] \sum_{j=1}^r f(\eta(k-j+1)), \end{aligned}$$

где $\Phi^{(s)}(k)$ – функция из предположения 2 в дискретном времени; $\Delta \mathbf{y}(k) = h[\mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{y}(k) + \mathbf{b}_{\sigma(k)} f(\eta(k))]$; $\Delta\eta(k) = \eta(k+1) - \eta(k)$; $\theta_k \in (0; 1)$; $\zeta_k \in (0; 1)$.

Первое слагаемое отрицательно определено по предположению 2. В четвертом слагаемом $\beta_1^{(s)}$ выбираем достаточно малой, чтобы в сум-

ме с первым получить отрицательную определенность. Пусть $\beta_j^{(s)} > \beta_{j+1}^{(s)}$ при $j = 1, \dots, r-2$. Оценим выражение

$$\begin{aligned} & -h\rho_2^{(s)} [f(\eta(k+1)) - f(\eta(k))] \sum_{j=1}^r f(\eta(k-j+1)) \leq \\ & \leq \frac{r}{2e_1^{(s)}} \psi^2(k) + \frac{e_1^{(s)}}{2} \sum_{j=0}^{r-1} f^2(\eta(k-j)), \end{aligned}$$

где $\psi^2(k) = h^2 \left(\rho_2^{(s)} [f(\eta(k+1)) - f(\eta(k))] \right)^2$ в свою очередь может быть представлена по формуле конечных приращений Лагранжа как функция большего порядка относительно $\|\mathbf{y}\|^2$ и $f^2(\eta(k-j))$, $j = 0, 1, \dots, r$, а положительная $e_1^{(s)} < 2(\beta_j^{(s)} - \beta_{j+1}^{(s)})$ при $j = 1, \dots, r-2$. Третье слагаемое более высокого порядка говорит о существовании области $\|\mathbf{y}\| + \|\eta^{(k)}\| < H_2$, в которой не нарушится отрицательность приращения. Получится промежуточное неравенство в данной области вида

$$\begin{aligned} \Delta V^{(s)} &\leq -\gamma_0^{(s)} \|\mathbf{y}\|^2 - \gamma_1^{(s)} \eta^{2\mu}(k) - \\ & - \gamma_2^{(s)} \sum_{j=1}^r f^2(\eta(k-j)) + \\ & + h^2 \|\mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{y}(k) + \mathbf{b}_{\sigma(k)} f(\eta(k))\|^2 \|\mathbf{D}^{(s)}\| \end{aligned}$$

с некоторыми положительными $\gamma_i^{(s)}$, $i = 0, 1, 2$. Теперь выберем h достаточно малым, чтобы положительное слагаемое из промежуточной оценки не испортило отрицательную определенность. Тогда по свойствам однородных функций

$$\begin{aligned} \Delta V^{(s)} &\leq -b_0^{(s)} \|\mathbf{y}\|^2 - b_1^{(s)} \eta^{2\mu}(k) - \\ & - b_2^{(s)} \sum_{j=1}^r f^2(\eta(k-j)), \end{aligned} \quad (15)$$

где $b_0^{(s)}$, $b_1^{(s)}$, $b_2^{(s)}$ положительны в области $\|\mathbf{y}\| + \|\eta^{(k)}\| < H_2$.

Подобно тому, как из оценок (4) и (6) выводится дифференциальное неравенство, оценки (13) и (15) приведут в дискретном случае к разностному неравенству

$$\Delta V^{(s)} \leq -b \left(V^{(s)} \right)^{\rho+1}$$

с положительными b и $\rho = \frac{\mu-1}{\mu+1}$.

Используем лемму из работы [22] о том, что если выполнены неравенства

$$0 \leq V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k+1)}) \leq V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k)}) - b \left[V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k)}) \right]^{1+p}$$

для $k = k_0, k_0 + 1, \dots$, причем

$$b(\rho+1) \left[V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k_0)}) \right]^p \leq 1,$$

то справедлива оценка

$$\left(V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k)}) \right)^{-p} \geq \left(V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k_0)}) \right)^{-p} + b\rho(k - k_0).$$

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Нулевое решение системы (11) будет локально асимптотически устойчивым, если для фиксированного положительного запаздывания r и достаточно малого шага дискретизации h функция $\Psi(m, i)$, пересчитанная согласно формуле (8) с коэффициентом c из (14), обладает свойством $\Psi(1, i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Доказательство: Зафиксируем начальный отсчет k_0 и выберем область $\|\mathbf{y}^{(k_0)}\| < \delta'$ так, чтобы выполнялось условие леммы [22]. Применим лемму при $k \in \{k_0, k_0 + 1, \dots, \theta_m - 1\}$:

$$\left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\mathbf{y}^{(k)}) \right)^{-p} \geq \left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\mathbf{y}^{(k_0)}) \right)^{-p} + b\rho(k - k_0)$$

и при $k \in \{\theta_{m+i-1}, \dots, \theta_{m+i} - 1\}$:

$$\left(V^{\sigma(\theta_{m+i-1})}(\mathbf{y}^{(k)}) \right)^{-p} \geq c^{-ip} \left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\mathbf{y}^{(k_0)}) \right)^{-p} + b\rho \left((k - \theta_{m+i-1}) + \Psi(m, i) + c^{-ip}(\theta_m - k_0) \right).$$

Дальнейшее обоснование повторяет доказательство теоремы 1.

Конец доказательства.

Аналогичный результат можно сформулировать для дискретной системы с асинхронными переключениями

$$\begin{cases} \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k) + h \left[\mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{y}(k) + \mathbf{b}_{\sigma(k)} f(\eta(k)) \right]; \\ \eta(k+1) = \eta(k) + h \left[\mathbf{C}_{\sigma(k)}^T \mathbf{y}(k) - \rho_1^{\sigma(k)} f(\eta(k)) - \right. \\ \left. - \rho_2^{\sigma(k-r)} f(\eta(k-r)) \right]. \end{cases} \quad (16)$$

На основе (12) построим функционал

$$V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta_t) = \mathbf{y}^T(k) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k) + \int_0^{\eta(k)} f(\theta) d\theta + \sum_{j=1}^r \beta_j^{(s)} f^2(\eta(k-j)) -$$

$$- hf(\eta(k)) \sum_{j=1}^r \rho^{\sigma(k-j)} f(\eta(k-j)). \quad (17)$$

Для него можно найти область $\|\mathbf{y}\| + \|\eta^{(k)}\| < H_1$, где выполняются оценки, подобные (13) и (14), с точностью до постоянных коэффициентов. Приращение функционала (17) вдоль решения системы (16)

$$\begin{aligned} \Delta V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) &= \mathbf{y}^T(k+1) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k+1) - \\ &- \mathbf{y}^T(k) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k) + \int_{\eta(k)}^{\eta(k+1)} f(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{j+1}^{(s)} f^2(\eta(k-j)) - \sum_{j=1}^r \beta_j^{(s)} f^2(\eta(k-j)) - \\ &- hf(\eta(k+1)) \sum_{j=1}^r \rho_2^{\sigma(k-j+1)} f(\eta(k-j+1)) + \\ &+ hf(\eta(k)) \sum_{j=2}^{r+1} \rho_2^{\sigma(k-j+1)} f(\eta(k-j+1)) \end{aligned}$$

будет отрицательно определенным в некоторой области $\|\mathbf{y}\| + \|\eta^{(k)}\| < H_2$ при выполненных предположениях 1 и 2. Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 3, приходим к следующему результату.

Теорема 4. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Нулевое решение системы (16) будет локально асимптотически устойчивым, если для фиксированного положительного запаздывания r и достаточно малого шага дискретизации h функция, пересчитанная по формуле (8) с коэффициентом c из неравенства сравнения для функционалов (17), обладает свойством $\Psi(1, i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Численное моделирование

Возьмем в качестве примера следующие параметры подсистем:

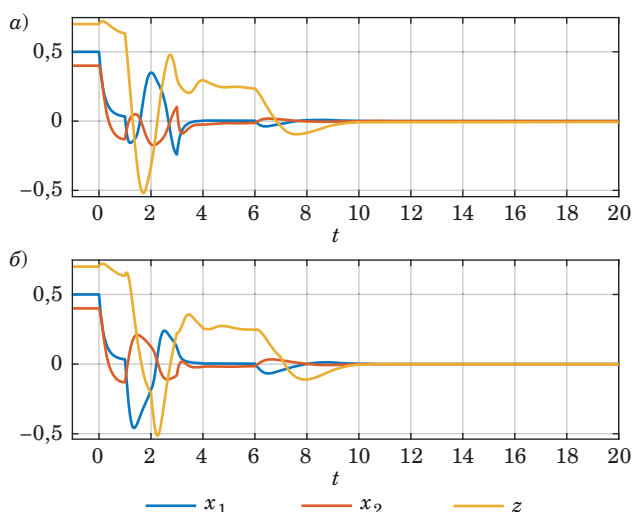
$$\mu = \frac{7}{3}, \tau = 1,$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -6,5 & 0,6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ -3,5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1^T = (0,8 \quad 0,6), \rho_1^{(1)} = 3, \rho_2^{(1)} = -2,4,$$

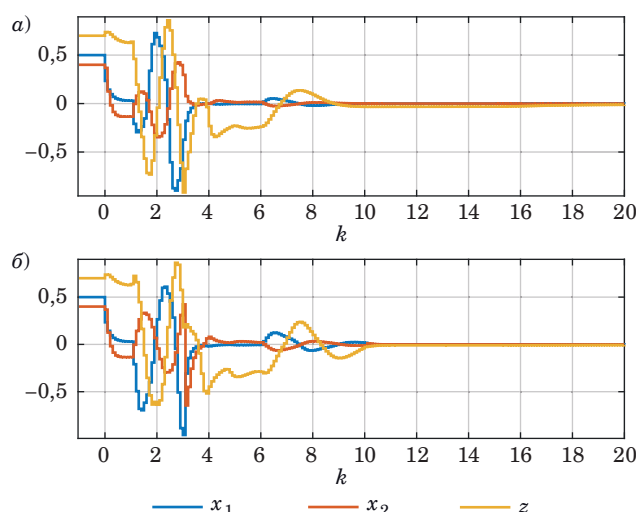
$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0,6 \\ -2,4 & -5 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -6,5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2^T = (5 \quad -0,5), \rho_1^{(2)} = 1,5, \rho_2^{(2)} = 3.$$



■ **Рис. 1.** Графики компонент решений, полученные методом Рунге – Кутты 4-го порядка: *a* – для системы (2); *б* – для системы (9)

■ **Fig. 1.** Graphs of solution components obtained by Runge – Kutta method of fourth order: *a* – for system (2); *б* – for system (9)



■ **Рис. 2.** Графики компонент решений, построенные с помощью явного метода Эйлера с шагом дискретизации 0,1: *a* – для системы (11); *б* – для системы (16)

■ **Fig. 2.** Graphs of solution components obtained by the explicit Euler method with step size 0.1: *a* – for system (11); *б* – for system (16)

Начальный момент $t_0 = 0$ и начальная функция

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t_0} \\ z_{t_0} \end{pmatrix} = (0,5 \quad 0,4 \quad 0,7)^T \text{ при } t \in [-1; 0].$$

Согласно теории все параметры выбраны так, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} \left(\mathbf{A}_s^T \mathbf{D}^{(s)} + \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{A}_s \right) \left(\mathbf{D}^{(s)} \mathbf{b}_s + \frac{1}{2} \mathbf{C}_s \right) \\ \left(\mathbf{D}^{(s)} \mathbf{b}_s + \frac{1}{2} \mathbf{C}_s \right)^T - \left(\rho_1^{(s)} + \rho_2^{(s)} \right) \end{pmatrix}$$

была отрицательно определенной для положительно определенных матриц $\mathbf{D}^{(s)}$, в качестве которых были выбраны матрицы

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}; \mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Закон переключений $\sigma(t) = 1$, когда

$$t \in [-1; 1) \cup \left[\frac{i(i-1)}{2}; \frac{i(i+1)}{2} \right), i = 3, 5, \dots,$$

и $\sigma(t) = 2$ при

$$t \in \left[\frac{i(i-1)}{2}; \frac{i(i+1)}{2} \right), i = 2, 4, \dots$$

Результаты моделирования представлены на рис. 1, *a*, *б* и 2, *a*, *б*. Графики рис. 1, *a* и 2, *a* соответствуют случаю синхронных, а рис. 1, *б* и 2, *б* – асинхронных переключений.

Заключение

В предложенной работе рассмотрена нелинейная регулируемая система с одним исполнительным органом с переключениями и запаздыванием. Получены условия на закон переключений, обеспечивающие асимптотическую устойчивость решений таких систем в случаях непрерывного и дискретного времени. В каждом случае исследовались как синхронные, так и асинхронные переключения. Численные решения, представленные графически, подтверждают справедливость сформулированных теорем.

Литература

1. Liberzon D. *Switching in Systems and Control*. Birkhauser, Boston, MA, 2003. 233 p. doi:10.1007/978-1-4612-0017-8
2. Li C., Feng G., Huang T. On hybrid impulsive and switching neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2008, vol. 6, no. 38, pp. 1549–1560. doi:10.1109/TSM-CB.2008.928233
3. Liberzon D., Morse A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Sys-*

- tems Magazine*, 1999, vol. 19, no. 5, pp. 59–70. doi:10.1109/37.793443
4. **Каменецкий В. А.** Системы с переключениями, системы Лурье, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана. *Автоматика и телемеханика*, 2019, т. 8, № 8, с. 9–28. doi:10.1134/S0005117919080010
 5. **Каменецкий В. А.** Условия устойчивости систем с переключениями между четырьмя линейными дискретными подсистемами. *XV Междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого)*, Москва, 3–5 июня 2020 г., с. 182–184. https://elibrary.ru/download/elibrary_44162285_43744180.pdf (дата обращения: 10.06.2023).
 6. **Du S., Karimi H. R., Qiao J., Wu D., Feng C.** Stability analysis for a class of discrete-time switched systems with partial unstable subsystems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, vol. 66, no. 12, pp. 2017–2021. doi:10.1109/TC-SII.2019.2897009
 7. **Platonov A. V.** On the asymptotic and practical stability of Persidskii-type systems with switching. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2023, vol. 48. doi:10.1016/j.nahs.2022.101318. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1751570X22001133> (дата обращения: 10.06.2023).
 8. **Zhang W., Wei Z., Lin X., Chen C. C.** Finite-time bounded sampled-data control of switched time-delay systems with sector bounded nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, vol. 153. doi:10.1016/j.chaos.2021.111470. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0960077921008249> (дата обращения: 10.06.2023).
 9. **Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V., Voloshin M. V.** On the global asymptotic stability of a class of nonlinear switched systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 107–120.
 10. **Cao J., Zhong S.** New delay-dependent condition for absolute stability of Lurie control systems with multiple time-delays and nonlinearities. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 194, iss. 1, pp. 250–258. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.04.034>
 11. **Aleksandrov A., Andriyanova N.** Stability analysis of Lur'e indirect control systems with time delay and multiple nonlinearities. *International Journal of Dynamics and Control*, 2023, vol. 11, pp. 3074–3083. doi:10.1007/s40435-023-01174-w
 12. **Zhang P., Xu Y., Shen T.** An improved stability criterion for discrete-time Lur'e systems with time-varying delay. *IEEE 2018 Chinese Automation Congress (CAC)*, 2018, pp. 305–310. doi:10.1109/CAC.2018.8623306
 13. **Park J. M., Lee S. Y., Park P. G.** An improved stability criteria for neutral-type Lur'e systems with time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, vol. 355, no. 12. pp. 5291–5309. doi:10.1016/j.jfranklin.2018.05.014
 14. **Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.** *Stability of Time-Delay Systems*. Control Engineering Series. Birkhauser, Boston USA, 2003. 356 p.
 15. **Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D.** *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer, Dordrecht, 1999. 648 p.
 16. **Aleksandrov A. Yu., Stepenko N. A.** Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2022, vol. 8, no. 3, pp. 1113–1119. doi:10.22055/JACM.2022.39514.3423
 17. **Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A.** Stability analysis of some classes of nonlinear switched systems with time delay. *International Journal of Systems Science*, 2017, vol. 48, no. 10, pp. 2111–2119. doi:10.1080/00207721.2017.1311382
 18. **Titton M. G., Gomes da Silva Jr J. M., Valmorbidia G., Jungers M.** Stability analysis of Lure systems under aperiodic sampled data control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2023, vol. 33, iss. 12, pp. 7130–7153. doi:10.1002/rnc.6744
 19. **Летов А. М.** *Устойчивость нелинейных регулируемых систем*. М., Физматлит, 1962. 483 с.
 20. **Branicky M. S.** Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, vol. 43, no. 4, pp. 475–482. doi:10.1109/9.664150
 21. **Зубов В. И.** *Математические методы исследования систем автоматического регулирования*. Л., Судпромгиз, 1959. 324 с.
 22. **Александров А. Ю., Жабко А. П.** Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем. *Сибирский математический журнал*, 2003, т. 44, № 6, с. 951–958. doi:10.1023/B:SIMJ.0000007470.46246.bd

UDC 517.929.4

doi:10.31799/1684-8853-2023-6-2-11

EDN: UNKUBX

Stability analysis of a Lurie system with scalar retarded control and switchingN. R. Andriyanova^a, Post-Graduate Student, orcid.org/0000-0002-6152-3572, st040174@student.spbu.ru^aSaint-Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya Emb., 199034, Saint-Petersburg, Russian Federation**Introduction:** To ensure the stability of switched linear systems, M. S. Branicky proposed a method for finding conditions on the switching law. It is also known that the presence of delays can disrupt stability. It is advisable to extend this method to a nonlinear control

system, which makes it possible to set arbitrary concentrated delays during control or switching. **Purpose:** To investigate a nonlinear system with subsystems composed of linear parts and control assumed to be a scalar nonlinearity with a greater than one rational degree. Also, for an arbitrary delay in control, to obtain conditions for the switching law that would guarantee the stability of the solution. **Results:** Cases of both synchronous (simultaneous for all parameters of the system) and asynchronous switchings have been studied in connection with the occurrence of delays when developing a controlling action, as well as receiving information about active subsystem changing. Multiple Lyapunov – Krasovsky functionals were constructed for each system under discussion, which made it possible to find conditions on the switching law under which the solutions will be locally asymptotically stable. As we have found out it is sufficient for this to choose the switching moments so that the duration of the subsystem should unboundedly tend to infinity over time. We also demonstrate that in the discrete case, similar conditions also ensure stability at a sufficiently small discretization step. We have carried out numerical modeling for both synchronous and asynchronous switching between continuous and discrete subsystems. The graphs presented in the paper are consistent with the theoretical conclusions.

Keywords – Lurie systems, delay, synchronous and asynchronous switching, asymptotic stability, dwell-time approach.

For citation: Andriyanova N. R. Stability analysis of a Lurie system with scalar retarded control and switching. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 2–11 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-2-11, EDN: UNKUBX

References

1. Liberzon D. *Switching in Systems and Control*. Birkhauser, Boston, MA, 2003. 233 p. doi:10.1007/978-1-4612-0017-8
2. Li C., Feng G., Huang T. On hybrid impulsive and switching neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2008, vol. 6, no. 38, pp. 1549–1560. doi:10.1109/TSMCB.2008.928233
3. Liberzon D., Morse A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, vol. 19, no. 5, pp. 59–70. doi:10.1109/37.793443
4. Kamenetskiy V. A. Switched systems, Lur'e systems, absolute stability, Aizerman problem. *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 8, pp. 1375–1389 (In Russian). doi:10.1134/S0005117919080010
5. Kamenetskiy V. A. Stability conditions for systems with switching between four linear discrete subsystems. *XV Mezhdunarodnaya konferenciya "Ustojchivost' i kolebaniya nelinejnyh sistem upravleniya" (konferenciya Pyatnitskogo)* [Proc. of XV Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)], Moscow, 2020, pp. 182–184 (In Russian). Available at: https://elibrary.ru/download/elibrary_44162285_43744180.pdf (accessed 10 June 2023).
6. Du S., Karimi H. R., Qiao J., Wu D., Feng C. Stability analysis for a class of discrete-time switched systems with partial unstable subsystems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, vol. 66, no. 12, pp. 2017–2021. doi:10.1109/TCSII.2019.2897009
7. Platonov A. V. On the asymptotic and practical stability of Persidskii-type systems with switching. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2023, vol. 48. doi:10.1016/j.nahs.2022.101318. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1751570X22001133> (accessed 10 June 2023).
8. Zhang W., Wei Z., Lin X., Chen C. C. Finite-time bounded sampled-data control of switched time-delay systems with sector bounded nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, vol. 153. doi:10.1016/j.chaos.2021.111470. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0960077921008249> (accessed 10 June 2023).
9. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V., Voloshin M. V. On the global asymptotic stability of a class of nonlinear switched systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 107–120.
10. Cao J., Zhong S. New delay-dependent condition for absolute stability of Lurie control systems with multiple time-delays and nonlinearities. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 194, iss. 1, pp. 250–258. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.04.034>
11. Aleksandrov A., Andriyanova N. Stability analysis of Lur'e indirect control systems with time delay and multiple nonlinearities. *International Journal of Dynamics and Control*, 2023, vol. 11, pp. 3074–3083. doi:10.1007/s40435-023-01174-w
12. Zhang P., Xu Y., Shen T. An improved stability criterion for discrete-time Lur'e systems with time-varying delay. *IEEE 2018 Chinese Automation Congress (CAC)*, 2018, pp. 305–310. doi:10.1109/CAC.2018.8623306
13. Park J. M., Lee S. Y., Park P. G. An improved stability criteria for neutral-type Lur'e systems with time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, vol. 355, no. 12, pp. 5291–5309. doi:10.1016/j.jfranklin.2018.05.014
14. Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. *Stability of Time-Delay Systems*. Control Engineering Series. Birkhauser, Boston USA, 2003. 356 p.
15. Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer, Dordrecht, 1999. 648 p.
16. Aleksandrov A. Yu., Stepenko N. A. Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2022, vol. 8, no. 3, pp. 1113–1119. doi:10.22055/JACM.2022.39514.3423
17. Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A. Stability analysis of some classes of nonlinear switched systems with time delay. *International Journal of Systems Science*, 2017, vol. 48, no. 10, pp. 2111–2119. doi:10.1080/00207721.2017.131382
18. Tifton M. G., Gomes da Silva Jr J. M., Valmorbidia G., Jungers M. Stability analysis of Lure systems under aperiodic sampled data control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2023, vol. 33, iss. 12, pp. 7130–7153. doi:10.1002/rnc.6744
19. Letov A. M. *Ustojchivost' nelinejnyh reguliruemyh sistem* [Stability of nonlinear controlled systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1962. 483 p. (In Russian).
20. Branicky M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, vol. 43, no. 4, pp. 475–482. doi:10.1109/9.664150
21. Zubov V. I. *Matematicheskie metody issledovaniya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Mathematical methods of investigating automatic regulation systems]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1959. 324 p. (In Russian).
22. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. On stability of solutions to one class of nonlinear difference systems. *Siberian Mathematical Journal*, 2003, vol. 44, iss. 6, pp. 951–958 (In Russian). doi:10.1023/B:SIMJ.0000007470.46246.bd



Метод минимизации объема вычислений при имитации отражений радиоволн от земной поверхности

М. В. Орешкина^а, канд. техн. наук, доцент, orcid.org/0000-0002-0965-2932, oreskina.m@yandex.ru

^аНовосибирский государственный технический университет, К. Маркса пр., 20, Новосибирск, 630073, РФ

Введение: имитация отражений от поверхности Земли является важным этапом в процессе тестирования и оценки работоспособности радиолокационных станций. Для создания имитационной модели поверхности область, на которой планируется использовать радиолокационную станцию, разбивается на множество небольших участков. Каждый из этих участков рассматривается как точечный отражатель. Эхосигнал от области поверхности формируется как совокупность сигналов от точечных отражателей, входящих в нее, что требует значительных вычислительных ресурсов. **Цель:** обосновать методы минимизации объема вычислений при расчете отраженных от земной поверхности сигналов для имитационного моделирования работы радиолокационных станций. **Результаты:** моделирование отраженного от Земли сигнала сводится к вычислению свертки последовательности, описывающей структуру земной поверхности, и последовательности, описывающей зондирующий сигнал. Вычисление свертки эффективно по методу перекрытия с накоплением, где всю последовательность разделяют на несколько секций. Показано, что при вычислении частичных свертки с использованием преобразования Фурье гармоник, имеющие низкую энергетическую плотность, могут быть проигнорированы без значительного влияния на точность вычислений. Для каждой из секций можно использовать различные методы минимизации в зависимости от свойств сигналов, отраженных от земной поверхности. Эти свойства зависят от удаленности рассматриваемого участка от радиолокационной станции. В зоне, расположенной близко к радиолокационной станции, вклад отражений от участков сильно зависит от их местоположения. Фактически отражения формируют только близлежащие участки. Получены выражения для оценки ошибок, которые возникают из-за пренебрежения отражениями от удаленных участков. Показано, что в зоне, находящейся на значительном расстоянии от радиолокационной станции, отражающие участки принимают точечный характер, что позволяет непосредственно вычислять свертку без применения быстрых алгоритмов. **Практическая значимость:** представленные методы минимизации вычислений могут быть использованы для разработки имитаторов эхосигналов.

Ключевые слова — отражения от поверхности Земли, эхосигнал, радиолокационная станция, математическое моделирование, имитация сигналов, полунатурное моделирование, минимизация объема вычислений, эффективность алгоритма.

Для цитирования: Орешкина М. В. Метод минимизации объема вычислений при имитации отражений радиоволн от земной поверхности. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 6, с. 12–19. doi:10.31799/1684-8853-2023-6-12-19, EDN: VDQNIЕ

For citation: Oreshkina M. V. Minimization technique for the amount of computation for land clutter simulation. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 12–19 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-12-19, EDN: VDQNIЕ

Введение

Радиолокационная станция (РЛС) излучает электромагнитную энергию и принимает возвращающиеся сигналы для обнаружения объектов в этой среде [1, 2]. Помимо сигналов от целевых объектов, на вход приходят и мешающие отражения — эхосигналы от различных объектов окружающей среды, которые затрудняют обнаружение [1–4]. Идентификация и классификация объектов осуществляется с помощью специальных алгоритмов обнаружения.

Тестирование алгоритмов обнаружения РЛС занимает много времени, поскольку характеристики окружающей среды постоянно меняются. Распространенным методом тестирования является имитационное моделирование [3–7], при котором реальные элементы РЛС или систему в целом испытывают с использованием сигналов, генерируемых специальным устройством — имитатором. Точность результатов моделирования

зависит от точности применяемых математических моделей, включая модели помех, большая часть которых приходит от земной поверхности [3–10].

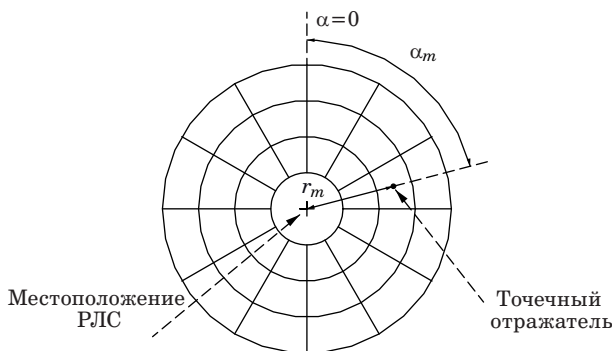
Помехи от земной поверхности могут присутствовать по всей зоне обзора РЛС. Их моделирование создает значительную нагрузку на вычислительные ресурсы имитатора, поскольку одна линия дальности может содержать тысячи независимых выборок помех [3, 4, 8]. Сложность моделирования отражений от Земли настолько высока, что возможно только их статистическое представление. Модель отражений от земной поверхности — это коррелированный случайный процесс. Он характеризуется функцией плотности распределения вероятности в сочетании с функцией спектральной плотности мощности. При моделировании более сложных корреляционных функций и функций плотности распределения вероятности необходима большая вычислительная мощность [3–12].

Ранее малая вычислительная мощность имитационных систем накладывала значительные ограничения на модели помех [3, 4]. Использовались модели отражений от однородной поверхности либо модели, имеющие грубые характеристики, подходящие только для РЛС с низким разрешением. Развитие радиолокационной техники приводит к тому, что требования к имитационным моделям растут, а модели, разработанные для РЛС с низким разрешением, становятся менее востребованными и их место занимают более детальные модели [12–20], поэтому становится актуальной разработка методов их имитации [3–5, 21]. Цель данной работы – обосновать методы минимизации объема вычислений при расчете отраженных от земной поверхности сигналов для имитационного моделирования работы РЛС.

Имитация экосигнала от земной поверхности

При имитации экосигналов от земной поверхности исходное распределение отражающих свойств Земли задается в виде цифровой карты. Ее формируют путем разбиения поверхности на множество мелких участков с помощью специальной сетки (рис. 1). После разбиения поверхности на участки для каждого из них находят координаты точки в центре, которые соответствуют положению отсчета (точечного отражателя). Тип покрова и высота в этой точке определяют значение удельной эффективной поверхности рассеяния (УЭПР), а также спектр доплеровских флуктуаций экосигнала. Отражение от каждой из точек можно задать как

$$\dot{S}_{mn}(q) \sim \frac{\sqrt{\sigma_{mn}}}{D_{mn}^2} \exp(j\varphi_{\text{наб}}(D_{mn})) \times (x_{1mn}(q) + jx_{2mn}(q)), \quad (1)$$



■ **Рис. 1.** Сетка для формирования цифровой модели поверхности
 ■ **Fig. 1.** Grid for forming digital surface model

где $\varphi_{\text{наб}}(D_{mn}) = \frac{4\pi D_{mn} f_p}{c}$ – фазовый набег от фазового центра антенного массива до точки с σ_{mn} и обратно; D_{mn} – расстояние от фазового центра антенного массива до точки с σ_{mn} ; f_p – рабочая частота; c – скорость света; $x_1(q), x_2(q)$ – независимые нормальные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (коэффициент корреляции между отсчетами $x(q_n)$ и $x(q_{n+1})$ зависит от типа покрова и силы ветра); j – мнимая единица; σ – массив эффективной поверхности рассеяния точек, имитирующей земную поверхность (σ_{mn} – элемент массива); m, n – порядковые номера точек по азимуту и углу места соответственно; q – номер итерации.

Используя выражение (1), комплексную огибающую сигнала, отраженного от земной поверхности, можно представить как

$$\dot{S}(t, q, \alpha_{00}, \theta_{00}) \sim \sum_{n=1}^N \dot{S}_\alpha(n, q, \alpha_{00}, \theta_{00}) \times \dot{S}_{\text{зонд}}(t - n\Delta\tau), \quad (2)$$

где

$$\dot{S}_\alpha(n, q, \alpha_{00}, \theta_{00}) \sim \sum_{m=1}^M \dot{S}_{mn}(q) F_\alpha(\alpha_m - \alpha_{00}) \times F_\theta(\theta(r_n) - \theta_{00});$$

F_α, F_θ – диаграммы направленности в азимутальной и угломестной плоскости; α_{00}, θ_{00} – положение оси передающей антенны в азимутальной и угломестной плоскости; $\dot{S}_{\text{зонд}}(t - n\Delta\tau)$ – комплексная огибающая зондирующего импульса; N, M – количество элементов по азимуту и дальности.

Минимизация вычисления свертки при моделировании отражений от поверхности Земли

Количество необходимых для моделирования поверхности Земли точек (M и N) зависит от структуры поверхности и разрешающей способности РЛС. Требования к шагу дискретизации подробно рассмотрены в работах [14, 15]. Зачастую необходимо моделировать несколько точек на ширину диаграммы направленности, поэтому расчет \dot{S}_α занимает относительно мало вычислительных ресурсов, в то время как количество отсчетов, приходящихся на длину зондирующего импульса, может достигать нескольких тысяч. При этом типичной является ситуация, когда размер массива, описывающего земную поверхность, во много раз превышает размеры последовательностей

значений $\dot{S}_{zond} : N \gg N_1$, где N_1 – количество отсчетов \dot{S}_{zond} .

В этом случае секционирование свертки по методу перекрытия с накоплением может значительно повысить эффективность вычислений [22]. Этот метод заключается в разделении одной последовательности на несколько частей и выполнении свертки для каждой части отдельно.

Рассмотрим вычисление свертки (2) по методу перекрытия с накоплением. Для этого исходную последовательность \dot{S} разбивают на секции длиной $L + N_1 - 1$, у которых есть участки перекрытия длиной $N_1 - 1$. Затем для каждой секции вычисляют циклическую свертку длиной $L + N_1 - 1$ и отбрасывают последние $N_1 - 1$ отсчетов. Полученные результаты объединяют в итоговую последовательность.

Число L удобно выбирать так, чтобы число $L + N_1 - 1$ было степенью двойки. Тогда каждую из частичных сверток можно эффективно выполнять с помощью быстрых алгоритмов, значительно снижая вычислительную сложность [23].

Одним из наиболее эффективных методов для вычисления длинных сверток является алгоритм, основанный на использовании теоремы о свертке и быстром преобразовании Фурье [23]:

$$\dot{S}(t, q, \alpha_{00}, \theta_{00}) = \text{IFT}(\dot{G}_S), \quad (3)$$

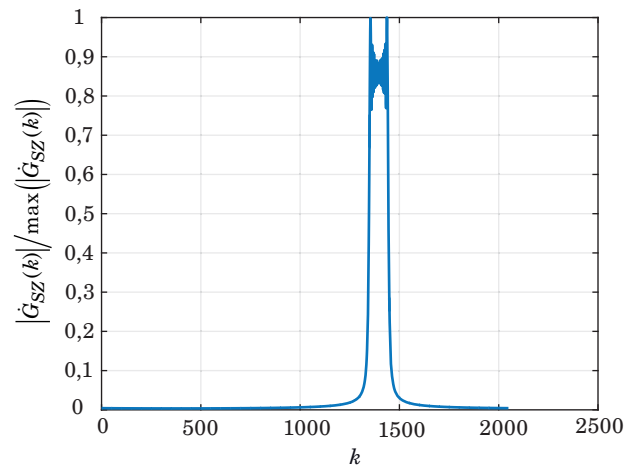
где \dot{G}_S – последовательность, каждый элемент которой: $\dot{G}_S(k) = \dot{G}_{S\alpha}(k)\dot{G}_{SZ}(k)$; k – вещественная переменная, имеющая смысл пространственной частоты; $\dot{G}_{S\alpha}(k)$, $\dot{G}_{SZ}(k)$ – спектры функций \dot{S}_α , \dot{S}_{zond} ; IFT – обратное преобразование Фурье.

Спектр сигнала \dot{S}_{zond} обладает частотно-избирательными свойствами (рис. 2), поэтому произведение $\dot{G}_{S\alpha}(k)\dot{G}_{SZ}(k)$ можно осуществлять не по всем частотам, а только для тех, что дают значительный вклад в спектр:

$$\dot{G}_S(k) = \begin{cases} \dot{G}_{S\alpha}(k)\dot{G}_{SZ}(k), & |\dot{G}_{SZ}(k)| \geq \varepsilon; \\ 0, & |\dot{G}_{SZ}(k)| < \varepsilon, \end{cases} \quad (4)$$

где ε – порог, ниже которого значениями $|\dot{G}_{SZ}(k)|/\max(|\dot{G}_{SZ}(k)|)$ допустимо пренебречь.

Порог ε определяет уровень ошибок, который признается допустимым и может задаваться, например, исходя из суммарной мощности составляющих, попадающих в отсекаемую часть спектров. При этом количество требуемых элементов зависит только от типа зондирующего импульса, поэтому заранее известно, для каких значений k нужно рассчитывать произведение, а для каких значение можно принять равным нулю. Такая минимизация позволяет сократить количество необходимых операций.



■ **Рис. 2.** Нормированный модуль спектра последовательности \dot{S}_{zond} , которую формируют 2048 отсчетов сигнала с линейно-частотной модуляцией, длительностью 20 мкс и девиацией 5 МГц

■ **Fig. 2.** Normalized modulus of the spectrum of a sequence \dot{S}_{zond} . The sequence \dot{S}_{zond} includes 2048 samples of a signal with linear frequency modulation, with parameters: duration is 20 μ s, deviation is 5 MHz

Для подтверждения полученных соотношений был проведен численный эксперимент. При анализе эхосигналов обычно рассматриваются их характеристики после прохождения через согласованный фильтр [1]:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{out}(t, q, \alpha_{00}, \theta_{00}) = \\ = \sum_{n=1}^N \dot{S}_\alpha(n, q, \alpha_{00}, \theta_{00}) \dot{S}_1(t - n\Delta\tau), \end{aligned} \quad (5)$$

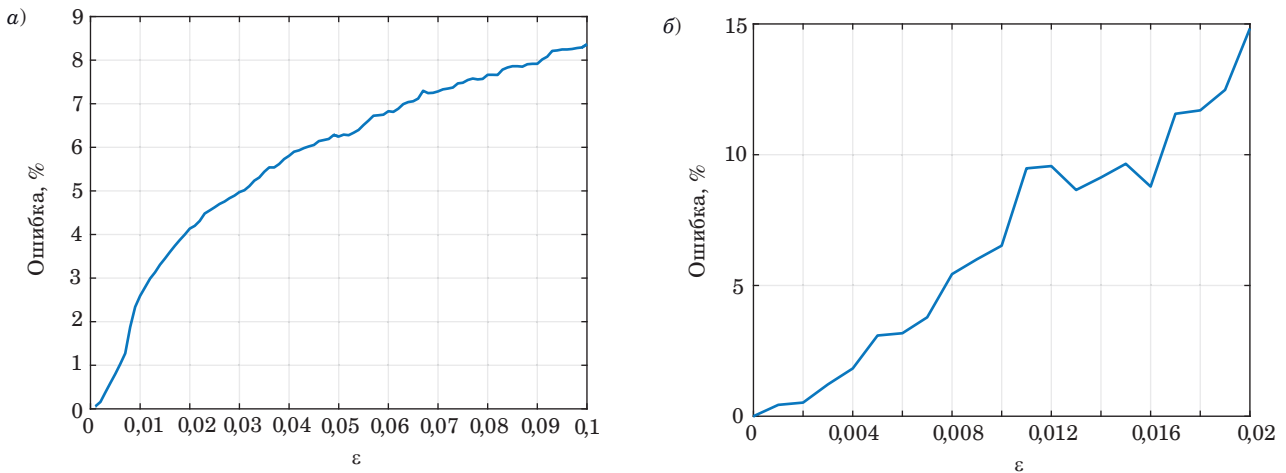
где $\dot{S}_1(t) = \dot{S}_{zond}(t - n\Delta\tau) \times \bar{\dot{S}}_{zond}(t - n\Delta\tau)$.

Графики зависимости среднего значения погрешности, возникающие при ограничении в спектре, представлены на рис. 3, а и б. Представлен пример для однородной (поверхность содержит один покров, затенения отсутствуют) и неоднородной (присутствуют несколько покровов, часть участков затенена) поверхности.

Другие возможности оптимизации связаны с распределением отражающих участков земной поверхности. Рассмотрим их более подробно.

Отражения от области поверхности, расположенной вблизи РЛС

В прилегающей к РЛС области на отражения от земной поверхности значительно влияет множитель дальности $1/D^2$. Вклад отражающей точки в общую сумму (2) резко уменьшается с ростом дальности до нее, что позволяет пренебречь отражениями от более дальних точек. Поскольку участки области находятся возле РЛС, отраже-



■ **Рис. 3.** Зависимость среднего значения погрешности при моделировании от уровня ограничения спектра для однородной (а) и неоднородной (б) поверхности

■ **Fig. 3.** Dependence of the average value of the modeling error on the spectrum limiting level for a homogeneous surface (а) and a heterogeneous surface (б)

ния от нее должны быть рассчитаны первыми за относительно небольшой промежуток времени. Усечение последовательности точек, для каждой из которых необходимо сформировать комплексную случайную величину и рассчитать значение отражения по формуле (1), позволит сократить количество вычислений для расчета отраженного сигнала.

Рассмотрим, в каких случаях отражениями от более дальних точек можно пренебречь. Оценим параметры сигнала на выходе согласованного фильтра (5).

Поскольку x_1 и x_2 – гауссовы случайные процессы с нулевым математическим ожиданием, сигнал (5) тоже представляет собой центрированную гауссову случайную величину. Его дисперсия

$$D_s(t) \sim \sum_{n=1}^N \frac{\sigma_{mn}}{D_{mn}^4} \dot{S}_1^2(t - n\Delta\tau).$$

Обозначим длину усеченной последовательности K . В этом случае дисперсия

$$D_s(t, N_2) \sim \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\sigma_{mn}}{D_{mn}^4} \dot{S}_1^2(t - n\Delta\tau).$$

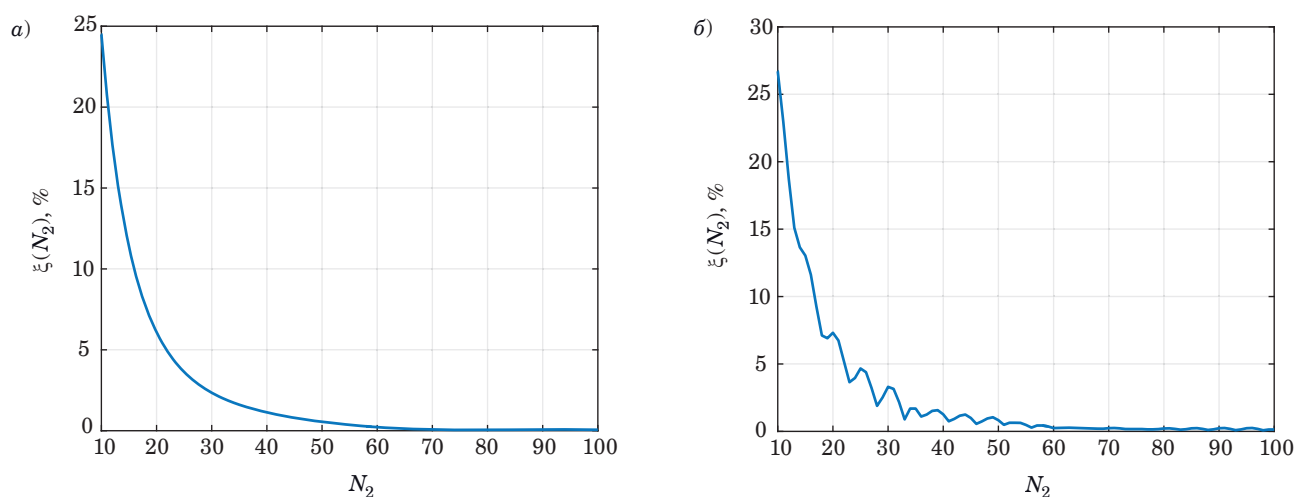
Для оценки этой величины используем выражение, показывающее относительную оценку:

$$\xi(N_2) = \left(\frac{D(t) - D(t, N_2)}{D(t)} \right) \cdot 100\% =$$

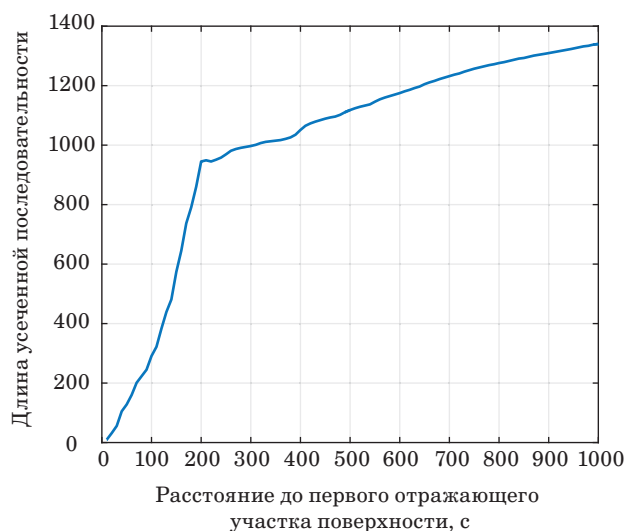
$$= \frac{\left(\sum_{m=1}^M F_\alpha(\alpha_m - \alpha_{00}) \sum_{n=N_1}^N \frac{\sigma_{mn}}{D_{mn}^4} \dot{S}_{zond}(t - n\Delta\tau) \right)}{\left(\sum_{m=1}^M F_\alpha(\alpha_m - \alpha_{00}) \sum_{n=1}^{N_2} \frac{\sigma_{mn}}{D_{mn}^4} \dot{S}_{zond}(t - n\Delta\tau) \right)} \times 100\%. \quad (6)$$

Рассмотрим значение выражения (6) для однородной (рис. 4, а) и неоднородной (рис. 4, б) поверхности. В качестве сигнала был использован сигнал с линейно-частотной модуляцией с частотой 10 ГГц, длительностью 20 мкс, девиацией 20 МГц. Количество отсчетов сигнала 2000. Первые сигналы РЛС начинает принимать от участков поверхности, находящихся в 10 м от станции. Значение K равно количеству отсчетов сигнала. Как видно из рис. 4, ошибка резко убывает с увеличением точек поверхности как для однородной, так и для неоднородной поверхности. И для расчета сигнала с погрешностью менее 1 % достаточно всего 50 точек.

Однако следует отметить, что такая зависимость характерна только для случая, когда РЛС принимает сигналы от близко расположенных участков. На рис. 5 представлена длина усеченной последовательности N_2 , начиная с которой ошибка (6) не превышает 1 % в зависимости от расстояния до первого отражающего участка поверхности, от которого РЛС начинает принимать сигнал. Как видно из рисунка, значительный эффект можно достигнуть в случае, если РЛС принимает сигнал от участков, удаленных до 200 м.



■ **Рис. 4.** Зависимость ошибки (6) от количества задействованных отсчетов для моделирования однородной (а) и неоднородной (б) поверхности
 ■ **Fig. 4.** Dependence of the error (6) on the number of samples involved for modeling a homogeneous surface (a) and a heterogeneous surface (b)

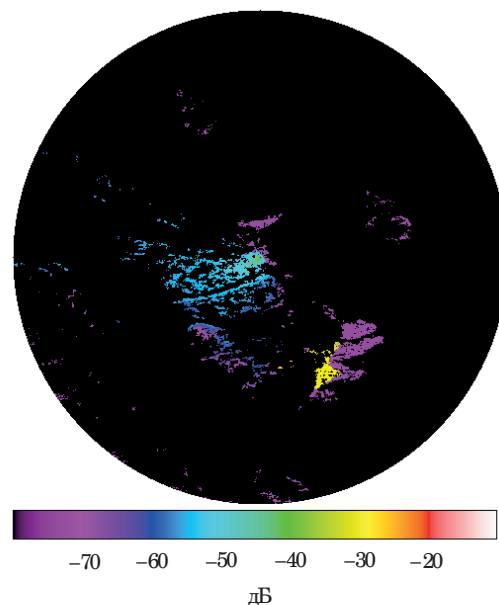


■ **Рис. 5.** Длина усеченной последовательности N_2 , начиная с которой ошибка (6) не превышает 1 %
 ■ **Fig. 5.** The length of the truncated sequence N_2 , starting from which the error (6) does not exceed 1%

Отражения от области поверхности, удаленной от РЛС

Для отражений под малыми углами обзора типично, что основная часть отражений сосредоточена вблизи РЛС [3, 4]. С ростом дальности количество затененных участков возрастает, и отражающие участки имеют точечный характер (рис. 6). Причем с уменьшением высоты антенны количество затененных участков увеличивается [3].

Массив отражений (1) на больших дальностях представляет собой сильно разреженную



■ **Рис. 6.** Распределение отражающей способности по поверхности; максимальная дальность 30 км; уровень УЭПР показан цветом
 ■ **Fig. 6.** Distribution of surface reflectivity; the maximum range is 30 km; the color shows NRCS level

матрицу. Поэтому более эффективно задавать ее как набор точечных участков. Такое задание, во-первых, значительно уменьшает размер массива \hat{S} , а во-вторых, позволяет осуществлять непосредственное вычисление выражения (2), так как алгоритм быстрой свертки на основе преобразования Фурье для этого случая не является эффективным [23].

Методика моделирования отраженных сигналов с использованием методов минимизации вычислений

Рассмотрим основные этапы, которые необходимо предпринять для подготовки к моделированию отражений от земной поверхности.

Этап 1. Определение рабочей области РЛС.

Выбрать оптимальный диапазон для моделирования. Обычно этот диапазон ограничивается радиогоризонтом, однако при моделировании может быть выбран и меньший диапазон, в зависимости от распределения видимых областей поверхности.

Этап 2. Задание распределения УЭПР по поверхности.

Определить видимые и затененные участки поверхности, а также значения УЭПР. Эти данные, как правило, определяются с помощью топографической карты местности, данных о высотах поверхности и выбранной математической модели отражений.

Этап 3. Подготовка данных для моделирования.

Перед началом моделирования необходимо разделить поверхность на зоны в зависимости от характера отражения радиосигналов.

Зона 1 — область поверхности, расположенная в пределах 200 метров от РЛС. Для моделирования отражений от поверхности в этой зоне необходимо выбрать параметр N_2 . Это можно сделать, руководствуясь формулой (6).

Зона 2 — область поверхности между зоной 1 и зоной 3. Для синтеза отражений в данной области нужно рассчитать спектр (4) в соответствии с выбранным порогом ε .

Зона 3 — область поверхности, которую можно представить отдельными отражателями. Определить ее можно по соотношению площади видимых участков поверхности к общей площади выбранного кольца равной дальности.

После окончания предварительных расчетов можно переходить к вычислению комплексной

огибающей отраженного сигнала. Для каждой из зон применяют различные алгоритмы расчета. Так, для зоны 1 вычисление происходит по формуле (2), при этом вместо N точек используют ограниченное их количество — N_2 . В зоне 2 эффективен расчет свертки (2) по методу перекрытия с накоплением. Зона 3 предполагает отражение сигнала, как если бы он взаимодействовал с точечными отражателями.

Заключение

В работе рассмотрены возможности оптимизации алгоритмов синтеза отражений от поверхности Земли. Описанные методы позволяют уменьшить вычислительную сложность моделирования, тем самым уменьшив требования к мощности устройств для имитации отражений.

Развитие радиолокационных систем и технологий обнаружения ставит перед разработчиками имитационного оборудования задачу создания точных моделей отражений от объектов окружающей среды. Одним из сложных объектов для моделирования является земная поверхность. Ее имитация требует значительных вычислительных ресурсов, так как необходимо учитывать множество факторов и отражений. В связи с этим точность моделирования отраженного сигнала ограничена возможностями расчетов.

Таким образом, разработка и усовершенствование методов оптимизации моделирования становится одной из ключевых задач для достижения максимальной эффективности при имитации сигнала.

Финансовая поддержка

Исследование выполнено при финансовой поддержке в рамках реализации программы развития НГТУ, научный проект № С23-16.

Литература

1. Richards M. A., Scheer M. A., Holm W. A. *Principles of Modern Radar*. Edison, SciTech Publishing, 2010. 962 p.
2. Melvin W. L., Scheer J. A. *Principles of Modern Radar: Advanced Techniques*. NY, SciTech Publishing, IET, Edison, 2013. 846 p.
3. Billingsley B. J. *Low Angle Radar Land Clutter Measurements and Empirical Models*. William Andrew Publishing, 2001. 719 p.
4. Kulemin G. P. *Millimeter-Wave Radar Targets and Clutter*. Artech House, 2003. 417 p.

5. Тырыкин С. В., Сабитов Т. И., Киселев А. В. *Специальные вопросы построения когерентных матричных имитаторов*. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2021. 232 с.
6. Xu G., Hao F., Chen J., Xiu C. Optimization of clutter simulation based on GPU. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 29501–29507. doi:10.1109/ACCESS.2020.2972941
7. Dang X., Chen Y., Wang C., Yin H., Xu H. Land clutter data generation using generative adversarial network. *IEEE MTT-S Intern. Conf. on Numerical Electromagnetic and Multiphysics Modeling and Optimization (NEMO)*, Hangzhou, China, 2020, pp. 1–3. doi:10.1109/NEMO49486.2020.9343606

8. Орешкина М. В. Погрешность моделирования эхосигналов от поверхности Земли при дискретном задании ее отражающих свойств. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общетеχνическая*, 2019, № 4, с. 11–15. doi:10.21778/2218-5453201941115
9. Kim D., Park A. J., Suh U., Goo D., Kim D., Yoon B., Ra W., Kim S. Accurate clutter synthesis for heterogeneous textures and dynamic radar environments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, vol. 58, iss. 4, pp. 3427–3445. doi:10.1109/TAES.2022.3151585
10. Ergezer H., Keskin M. F., Gunay O. Hardware-in-the-loop radar test simulator. *4th Intern. Conf. on Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications*, Vienna, 2014, pp. 666–673. doi: 10.5220/0005034506660673
11. Hua Q., Hao C., Mo Z. Simulation and modeling of radar echo signal. *9th Intern. Conf. on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, Chongqing, 2012, pp. 1954–1957. doi:10.1109/FSKD.2012.6233930
12. Billingsley J. B., Farina A., Gini F. Statistical analyses of measured radar ground clutter data. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1999, no. 35, pp. 579–593. doi:10.1109/7.766939
13. Bokov A., Slizko V. Generation of radar ground clutter echoes with Jakes' Doppler spectrum on FPGA. *2022 Ural-Siberian Conf. on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (USBREIT)*, Yekaterinburg, Russian Federation, 2022, pp. 136–140. doi:10.1109/USBREIT56278.2022.9923348
14. Никулин А. В., Белоруцкий Р. Ю. Замещение поверхности Земли дискретной моделью при имитации радиолокационных эхосигналов от нее. *Вопросы радиоэлектроники. Сер. Системы отображения информации и управления спецтехнологией*, 2012, № 4, с. 134–144.
15. Oreshkina M., Stepanov M., Kiselev A. Digital Earth surface maps for radar ground clutter simulation. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2022, vol. 33, iss. 2, pp. 340–344. doi:10.23919/JSEE.2022.000035
16. Liu Y., Li Z. Clutter simulation overview. *Proc. of 2017 2nd Intern. Conf. on Materials Science, Machinery and Energy Engineering*, 2017, no. 123, pp. 530–534.
17. Zhong T., Dong G., Wang R. A new adversarial hierarchy for SAR clutter generation. *CIE Intern. Conf. on Radar (Radar)*, Haikou, Hainan, China, 2021, pp. 1323–1326. doi:10.1109/Radar53847.2021.10028560
18. Dong Y. *Models of Land Clutter vs Grazing Angle, Spatial Distribution and Temporal Distribution. L-Band VV Polarisation Perspective*. Edinburgh, Systems Sciences Laboratory, 2004. 65 p.
19. Монаков А. А. Моделирование рассеянного шероховатой поверхностью радиосигнала методом стационарных точек. *Известия вузов России. Радиоэлектроника*, 2023, т. 26, № 3, с. 67–76. doi:10.32603/1993-8985-2023-26-3-67-76
20. Kim D., Park A. J., Suh U., Goo D., Kim D., Yoon B., Ra W.-S., Kim S. Accurate clutter synthesis for heterogeneous textures and dynamic radar environments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 3427–3445. doi:10.1109/TAES.2022.3151585
21. Yanovsky F., Prokopenko I., Rudiakova A., and Rhee H. Generalized computer model of sea, land and atmospheric clutter. *23rd Intern. Radar Symp. (IRS)*, Gdansk, Poland, 2022, pp. 431–436. doi:10.23919/IRS54158.2022.9905001
22. Nussbaumer H. G. *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*. Springer-Verlag, 1981. 248 p.
23. Blahut R. E. *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*. Addison-Wesley Publishing Company, 1985. 441 p.

UDC 621.37

doi:10.31799/1684-8853-2023-6-12-19

EDN: VDQNIIE

Minimization technique for the amount of computation for land clutter simulationM. V. Oreshkina^a, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-0965-2932, oreshkina.m@yandex.ru^aNovosibirsk State Technical University, 20, K. Marksa Pr., 630073, Novosibirsk, Russian Federation

Introduction: Land clutter simulation is an important step in testing and evaluating the performance of radar stations. A surface simulation model is an area within the radar field of view divided into many small sites. Each of these sites is a point reflector. The echo signal from the surface area is a set of signals from the point reflectors this area contains, which requires significant computing resources.

Purpose: To substantiate the techniques of minimizing the amount of computation when calculating reflected signals for the simulation of radar station operation. **Results:** The land clutter modeling requires the calculation of the convolution of the sequence describing the structure of the earth's surface and the sequence describing the probing signal. The calculation of the convolution is efficient according to the overlap-save method, where the entire sequence is divided into several sections. The study shows that when computing partial convolutions with the use of the Fourier transform, some harmonics have low energy and can be ignored without significantly affecting the accuracy of the calculations. The land clutter properties change depending on the distance of the particular area from the radar station. In an area which close to the radar station, the contribution of reflections from areas is highly dependent on their location. Reflections actually are formed only by nearby areas. We obtain the expressions for estimating the errors that arise due to the neglect of reflections from remote areas. At a considerable distance from the radar, the reflective areas take on a point character, which makes it possible to calculate the convolution without using fast algorithms. **Practical relevance:** The presented computational minimization techniques can be used to develop echo signal simulators.

Keywords — land clutter, echo signal, radar, mathematical modeling, signal simulation, hardware-in-the-loop simulation, minimization of the amount of computation, algorithm efficiency.

For citation: Oreshkina M. V. Minimization technique for the amount of computation for land clutter simulation. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 12–19 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-12-19, EDN: VDQNE

Financial support

The research was carried out with financial support within the framework of the development program of NSTU, scientific project No. S23-16.

References

- Richards M. A., Scheer M. A., Holm W. A. *Principles of Modern Radar*. Edison, SciTech publishing, 2010. 962 p.
- Melvin W. L., Scheer J. A. *Principles of Modern Radar: Advanced Techniques*. NY, SciTech Publishing, IET, Edison, 2013. 846 p.
- Billingsley B. J. *Low Angle Radar Land Clutter Measurements and Empirical Models*. William Andrew Publishing, 2001. 719 p.
- Kulemin G. P. *Millimeter-Wave Radar Targets and Clutter*. Artech House, 2003. 417 p.
- Tyrykin S. V., Sabitov T. I., Kiselev A. V. *Special'nye voprosy postroeniya kogerentnykh matrichnykh imitatorov* [Special issues of constructing coherent matrix simulators]. Novosibirsk, NSTU Publ., 2021. 232 p. (In Russian).
- Xu G., Hao F., Chen J., Xiu C. Optimization of clutter simulation based on GPU. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 29501–29507. doi:10.1109/ACCESS.2020.2972941
- Dang X., Chen Y., Wang C., Yin H., Xu H. Land clutter data generation using generative adversarial network. *IEEE MTT-S Intern. Conf. on Numerical Electromagnetic and Multiphysics Modeling and Optimization (NEMO)*, Hangzhou, China, 2020, pp. 1–3. doi:10.1109/NEMO49486.2020.9343606
- Oreshkina M. V. Error of modeling echo signals from Earth surface arising due to discrete assignment of reflective properties. *Voprosy radioelektroniki. Ser. Obshchetekhnicheskaya*, 2019, no. 4, pp. 11–15 (In Russian). doi:10.21778/2218-5453201941115
- Kim D., Park A. J., Suh U., Goo D., Kim D., Yoon B., Ra W., Kim S. Accurate clutter synthesis for heterogeneous textures and dynamic radar environments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, vol. 58, iss. 4, pp. 3427–3445. doi:10.1109/TAES.2022.3151585
- Ergezer H., Keskin M. F., Gunay O. Hardware-in-the-loop radar test simulator. *4th Intern. Conf. on Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications*, Vienna, 2014, pp. 666–673. doi:10.5220/0005034506660673
- Hua Q., Hao C., Mo Z. Simulation and modeling of radar echo signal. *9th Intern. Conf. on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, Chongqing, 2012, pp. 1954–1957. doi:10.1109/FSKD.2012.6233930
- Billingsley J. B., Farina A., Gini F. Statistical analyses of measured radar ground clutter data. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1999, no. 35, pp. 579–593. doi:10.1109/7.766939
- Bokov A., Slizkoy V. Generation of radar ground clutter echoes with Jakes' Doppler spectrum on FPGA. *2022 Ural-Siberian Conf. on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (USBEREIT)*, Yekaterinburg, Russian Federation, 2022, pp. 136–140. doi:10.1109/USBEREIT56278.2022.9923348
- Nikulin A. V., Beloruckij R. Yu. Replacing the earth's surface with a discrete model when simulating radar echoes from it. *Voprosy radioelektroniki. Seriya Sistemy otobrazheniya informacii i upravleniya spektikhnikoj*, 2012, no. 4, pp. 134–144 (In Russian).
- Oreshkina M., Stepanov M., Kiselev A. Digital Earth surface maps for radar ground clutter simulation. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2022, vol. 33, iss. 2, pp. 340–344. doi:10.23919/JSEE.2022.000035
- Liu Y., Li Z. Clutter simulation overview. *Proc. of 2017 2nd Intern. Conf. on Materials Science, Machinery and Energy Engineering*, 2017, no. 123, pp. 530–534.
- Zhong T., Dong G., Wang R. A new adversarial hierarchy for SAR clutter generation. *CIE Intern. Conf. on Radar (Radar)*, Haikou, Hainan, China, 2021, pp. 1323–1326. doi:10.1109/Radar53847.2021.10028560
- Dong Y. *Models of Land Clutter vs Grazing Angle, Spatial Distribution and Temporal Distribution. L-Band VV Polarization Perspective*. Edinburgh, Systems Sciences Laboratory, 2004. 65 p.
- Monakov A. A. Simulation of a radio signal scattered from a rough surface by the method of stationary points. *Journal of the Russian Universities. Radioelectronics*, 2023, vol. 26, no. 3, pp. 67–76 (In Russian). doi:10.32603/1993-8985-2023-26-3-67-76
- Kim D., Park A. J., Suh U., Goo D., Kim D., Yoon B., Ra W.-S., Kim S. Accurate clutter synthesis for heterogeneous textures and dynamic radar environments. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 3427–3445. doi:10.1109/TAES.2022.3151585
- Yanovsky F., Prokopenko I., Rudiakova A., and Rhee H. Generalized computer model of sea, land and atmospheric clutter. *23rd Intern. Radar Symp. (IRS)*, Gdansk, Poland, 2022, pp. 431–436. doi:10.23919/IRS54158.2022.9905001
- Nussbaumer H. G. *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*. Springer-Verlag, 1981. 248 p.
- Blahut R. E. *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*. Addison-Wesley Publishing Company, 1985. 441 p.



Математическая модель и алгоритмы управления группой наземных роботов с перераспределением энергетических ресурсов

К. Д. Крестовников^а, младший научный сотрудник, orcid.org/0000-0001-6303-0344, k.krestovnikov@iias.spb.su
^аСанкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, 14-я линия В. О., 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ

Введение: использование нескольких гомогенных или гетерогенных роботов для решения целевых задач дает преимущества в виде снижения затрат времени или расширения функциональных возможностей по сравнению с одиночным роботом. При этом также возрастает количество ресурсов, необходимое для обеспечения работы группы роботов. **Цель:** повышение эффективности группы роботов, функционирующей на открытой местности с рельефной поверхностью, посредством перераспределения энергетических ресурсов внутри группы. **Результаты:** представлены математическая модель и алгоритмы функционирования группы роботов, часть которых определена рабочими, а другая часть – заряжающими. Роботы-рабочие направлены исключительно на выполнение поставленных целевых задач, а роботы-заряжающие пополняют их энергетические ресурсы. Предлагаемый подход учитывает ограниченный энергетический ресурс заряжающих роботов и потери при передаче энергии между роботами, что позволяет применять разработанные решения для роботов, оборудованных бесконтактными системами передачи энергии. Выбор точек, в которых осуществляется передача энергии, происходит с учетом рельефа поверхности рабочего пространства, что упрощает процесс позиционирования роботов и повышает эффективность передачи энергии бесконтактным способом. Посредством имитационного моделирования в среде Gazebo проведено сравнение общего времени выполнения задач группами, функционирующими с традиционными принципами и на основе представленного подхода. В группе без перераспределения ресурсов все роботы были рабочими и выполняли целевые задачи. Вторая группа была разделена поровну на роботов-рабочих и роботов-заряжающих. Полученные при моделировании результаты показывают общую тенденцию более быстрого выполнения задач группой, функционирующей с перераспределением ресурсов при увеличении расстояния до задач и их количества. **Практическая значимость:** предлагаемый подход к перераспределению ресурсов позволяет расширить область функционирования группы роботов и использовать ее для потенциально более энергоемких задач.

Ключевые слова – групповое управление роботами, роевые системы, перераспределение ресурсов в группе.

Для цитирования: Крестовников К. Д. Математическая модель и алгоритмы управления группой наземных роботов с перераспределением энергетических ресурсов. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 6, с. 20–34. doi:10.31799/1684-8853-2023-6-20-34, EDN: QFJGNR

For citation: Krestovnikov K. D. Mathematical model and control algorithms for a group of ground robots with energy resource redistribution. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 20–34 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-20-34, EDN: QFJGNR

Введение

Исследования способов перераспределения ресурсов в группах робототехнических средств сосредоточены на биологически инспирированных подходах к управлению группами роботов [1, 2], оптимизации распределения целевых заданий [3, 4] и перемещения роботов [5], а также на вспомогательных сервисных задачах [6]. Научные проблемы энергетического обеспечения и планирования при групповом управлении рассматриваются со стороны поддержания энергетических параметров роботов и распределения задач соответствующим образом.

Группа наземных роботов на открытом пространстве может выполнять различные задачи: составление карты, мониторинг местности, поиск объектов интереса, доставка оборудования и обеспечение его функционирования. Выполнение задач и движение по маршруту расходует ресурс

аккумуляторной батареи робота, которого может быть недостаточно для выполнения всей миссии в целом. Для экономии времени и расширения области функционирования в случаях ограниченного энергетического запаса агентов имеет смысл разделять роботов на группы по специализации и использовать заряжающих роботов, которые будут восполнять ресурсы роботов-рабочих.

В ходе анализа существующих решений проблемы определения точек местоположения заряжающих станций или роботов были найдены методы, разработанные преимущественно для разведывательных операций или доставки товаров в городских условиях беспилотными летательными аппаратами (БПЛА) и управляемыми транспортными средствами с ограниченным запасом энергии.

Задача планирования маршрута для электро-мобиля с временными интервалами и ожидани-

ем заряда на станции рассмотрена в работе [7]. Транспортное средство может находиться в ожидании из-за большого числа клиентов и малого количества зарядных устройств. Для решения небольших подобных задач авторы предлагают рассматривать ее как задачу смешанного целочисленного линейного программирования и решать с помощью программного пакета CPLEX. Для более сложных задач авторами была разработана математическая модель, состоящая из адаптивного поиска больших окрестностей и решения смешанной целочисленной программы [8].

В работе [9] представлено решение задачи планирования маршрута электрокара с учетом запаса его энергии и временных окон доставки товара. Авторы разработали оптимизированный муравьиный алгоритм, совмещенный с методом вставки точки заряда в построенный маршрут (выбор ближайшей статичной зарядной станции) и расширенным локальным поиском. Также разработана новая модель вероятностного выбора в предложенном алгоритме, которая учитывает влияние расстояния между точками и временными интервалами. Кроме того, разработанный алгоритм позволяет сравнить три способа заряда (полный, частичный, замена аккумулятора) и выбрать оптимальный относительно времени посещения всех точек и стоимости электроэнергии.

Применение муравьиного алгоритма для поиска стратегии поведения группы мобильных роботов на рабочем поле с препятствиями рассмотрено в работах [10, 11]. Авторы предложили вариант решения проблемы распределения задач в группе мобильных роботов при наличии препятствий в рабочем пространстве. Базовым алгоритмом решения поставленных задач являлся один из видов муравьиного алгоритма — метод мультиколониальной муравьиной системы в сочетании с алгоритмом планирования траектории, реализованный с использованием принципа динамического программирования. Результаты вычислительных экспериментов показали, что траектории роботов строятся на подмножестве свободных ячеек рабочего пространства и не пересекают ячейки с препятствиями. При этом конфигурация рабочего поля влияет не только на фактические маршруты роботов, но и на перераспределение заданий между ними и число задействованных роботов.

Автоматизация сервисного обслуживания БПЛА является актуальной научной задачей [12, 13]. Авторами [14] исследуется задача разведки территории группой, состоящей из наземных и летательных беспилотных аппаратов. Наземный сервисный робот выполняет роль мобильной базы, на которой БПЛА может восполнить запас энергии во время разведки территории. В цели

работы входила минимизация пройденного расстояния каждым из БПЛА. Аналогичные задачи рассмотрены в работах [15–17].

В [18] представлено решение задачи для нескольких БПЛА и одного наземного робота с неограниченным запасом топлива, предназначенного для их дозаправки. Предложенный подход предполагает оптимизацию траектории наземного робота путем поиска центроидов кластеров, найденных с помощью метода k -средних среди всех целевых точек, и оптимизацию траекторий БПЛА с учетом распределенных между ними задач и точек дозаправки, найденных в первом этапе. Подход учитывает ограниченное количество топлива у БПЛА и время останковки наземного робота в точках дозаправки.

В рассмотренных решениях зарядные станции либо статичны, либо считается, что у них не ограничены энергетические ресурсы. Также рабочими аппаратами в основном являются летательные аппараты, что не подходит для решения поставленной задачи в рамках наземной группы роботов. Предлагаемый в данной работе подход учитывает ограниченный энергетический ресурс заряжающих роботов и потери при передаче энергии между роботами. Для снижения потерь при передаче энергии между роботами с использованием бесконтактных методов и упрощения процесса позиционирования точки пополнения заряда роботов-рабочих выбираются с учетом рельефа поверхности рабочего пространства.

Математическая модель управления энергоснабжением группы наземных роботов

В данной работе рассматривается задача управления группой гомогенных роботов, функционально разделенных на рабочих и заряжающих, которым необходимо выполнить ряд предметных целевых задач с определенными координатами, расположенных в области рабочего пространства, описанного картой высот. Рабочие и заряжающие роботы не имеют отличий в основной аппаратной части и дополнительном оснащении, а также имеют одинаковую энергоемкость аккумуляторных батарей. В начальный момент времени роботы находятся в определенных точках рабочего пространства. Энергоснабжение группы обеспечивает стационарная зарядная станция с неограниченным запасом энергии, установленная в рабочем пространстве по известным координатам. Группа имеет централизованную систему управления. Энергетические ресурсы батарей роботов-рабочих расходуются на преодоление пути до места расположения задания и на его выполнение. Энергетические ре-

сурсы роботов-заряжающих расходуются на пополнение заряда роботов-рабочих и преодоление пути до места, в котором осуществляется передача энергии. Необходимо обеспечить выполнение всех целевых задач роботами-рабочими за минимально возможное время.

Для решения поставленной задачи разработана математическая модель динамического управления группой наземных роботов, учитывающая параметры наземных роботов и группы в целом, необходимые для распределения задач и энергетических ресурсов. Пусть даны точки карты высот рабочего пространства $\mathbf{b}_u = [x_u, y_u, z_u]$, $\mathbf{b}_u \in \mathbf{B}$, $u = 1, \dots, m$, а также множество роботов \mathbf{R} , состоящее из множества роботов-рабочих \mathbf{W} и заряжающих роботов \mathbf{C} : $\mathbf{R} = \{\mathbf{W}, \mathbf{C}\}$. Множество роботов-рабочих представляется в виде $\mathbf{W} = \{w_1, \dots, w_i, \dots, w_m\}$, где i – номер робота, $i \in [1, m]$. Каждый робот-рабочий описан кортежем параметров $w_i = \langle \mathbf{cr}_i, er_i, sr_i \rangle$, где $\mathbf{cr}_i = [x_i, y_i, z_i]$ – координаты робота-рабочего в пространстве, er_i – значение его текущего запаса энергии в относительных единицах и параметр его статуса sr_i , принимающий значение 0, если робот не занят выполнением миссии, и 1, если занят. Множество заряжающих роботов $\mathbf{C} = \{c_1, \dots, c_k, \dots, c_z\}$, где z – число заряжающих роботов. При этом робот-заряжающий аналогично описан кортежем параметров $c_i = \langle \mathbf{cr}_k, er_k, sr_k \rangle$.

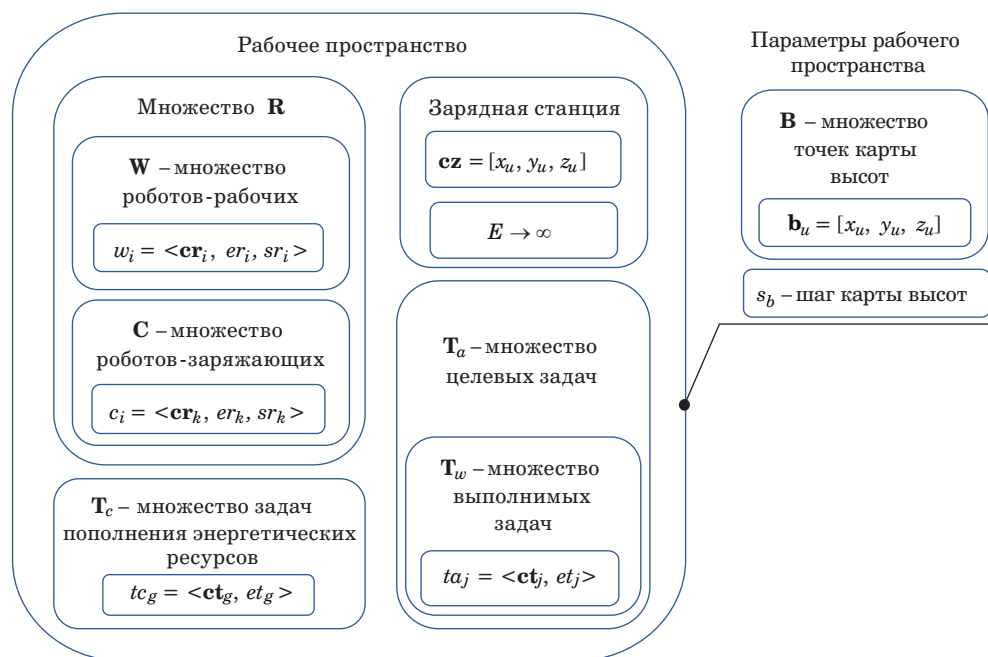
Группе роботов-рабочих назначаются целевые задания (задачи) ta_j , представленные во

множестве $\mathbf{T}_a = \{ta_1, \dots, ta_j, \dots, ta_n\}$, где номер задачи $j \in [1, n]$. Каждая задача описана кортежем параметров $ta_j = \langle \mathbf{ct}_j, et_j \rangle$, где $\mathbf{ct}_j = [x_j, y_j, z_j]$ – координаты точки выполнения задачи, et_j – значение энергии в относительных единицах, которое необходимо для выполнения роботом-рабочим задачи ta_j .

В процессе функционирования системы управления группы формируется множество задач пополнения энергетических ресурсов \mathbf{T}_c . Данное множество аналогично по структуре множеству \mathbf{T}_a : $\mathbf{T}_c = \{tc_1, \dots, tc_g, \dots, tc_q\}$, где номер задачи $g \in [1, q]$. Каждая задача описана кортежем параметров $tc_g = \langle \mathbf{ct}_g, et_g \rangle$, где \mathbf{ct}_g – координаты задачи, а et_g – количество энергии в относительных единицах, которое необходимо передать роботу-рабочему от робота-заряжающего.

Взаимосвязи описанных выше множеств и параметров можно представить в графическом виде (рис. 1).

Для всех роботов определено значение E_{\max} – максимально возможный запас энергии робота [Вт·ч], обусловленный физическими характеристиками источника питания и соответствующий уровню полного заряда. В процессе движения робот расходует энергетические ресурсы на перемещение, величина E_m определяет затраты энергетических ресурсов на преодоление роботом единичного расстояния d_u . Расход энергетических ресурсов на преодоление единичного расстояния в относительных единицах определяется как $e_m = E_m/E_{\max} \cdot 100\%$. Значение e_m позволяет



■ **Рис. 1.** Взаимосвязи множеств и параметров в графическом виде
 ■ **Fig. 1.** Relationships between sets and parameters in graphical form

оценивать расход энергии на преодоление единичного расстояния d_u в процентах от максимально возможного запаса энергии робота E_{\max} . Расход энергии робота E_j на выполнение задачи переводится в относительные единицы аналогичным образом: $et_j = E_j/E_{\max} \cdot 100\%$. Параметр et_j определяет, сколько энергии в процентах от максимально возможного запаса энергии робота E_{\max} будет израсходовано на выполнение задачи. Текущий уровень запаса энергетических ресурсов в относительных единицах er_i определяется как процентное соотношение текущего значения запаса энергии к максимальному E_{\max} . Аналогично определяется заданный минимальный уровень запаса энергетических ресурсов в относительных единицах для роботов-рабочих — $e_{\min w}$ и роботов-заряжающих — $e_{\min c}$. При $er_i \leq e_{\min w}$ роботу требуется пополнение энергетических ресурсов.

В предлагаемой модели принято, что пополнение энергетических ресурсов роботов всегда осуществляется до заданного максимального значения e_{\max} , при этом должно выполняться неравенство $e_{\min w} < e_{\max} \leq 100\%$. Также примем, что $e_{\min c} < e_{\min w}$, так как роботу-заряжающему необходимо преодолеть путь от начальной точки до точки заряда и от точки заряда до зарядной станции. По значениям $e_{\min w}$, $e_{\min c}$ и e_{\max} определяются диапазоны уровней энергетических ресурсов, доступных роботам-рабочим и роботам-заряжающим для перемещения по траектории и выполнения задач.

Роботы-рабочие имеют три режима функционирования: следование по маршруту, выполнение задачи и режим заряда аккумуляторной батареи. В режиме следования по маршруту робот последовательно движется к каждой точке траектории, пока не достигнет конечной точки или точки заряда (при ее наличии). По достижении точки заряда робот-рабочий останавливается до тех пор, пока не прибудет заряжающий робот и не восполнит заряд его батареи. Достигнув координат точки задачи, робот приступает к ее выполнению. Процесс непосредственно выполнения роботом предметной задачи в рамках данной работы не рассматривается, так как не оказывает прямого влияния на процессы функционирования группы и перераспределения ресурсов.

Заряжающие роботы имеют четыре режима функционирования: следование по маршруту, позиционирование для передачи энергии, передача энергии роботу-рабочему, восполнение заряда собственной батареи. Режим следования по маршруту заряжающих роботов аналогичен режиму роботов-рабочих за исключением отсутствия остановок в ожидании собственного заряда. При достижении точки заряда робота-рабочего заряжающий робот находится на месте до тех

пор, пока робот-рабочий не прибудет в данную точку для заряда аккумуляторной батареи, после чего заряжающий робот переходит в режим позиционирования. В режиме позиционирования заряжающий робот движется по локальной траектории до конечной точки, в которой начинается передача энергии роботу-рабочему. После удачного позиционирования робот-заряжающий переходит в режим передачи энергии и расходует свой запас энергии на восполнение заряда батареи робота-рабочего. По завершении передачи энергии заряжающий робот остается на месте и ожидает, пока робот-рабочий окажется на безопасном расстоянии. После этого заряжающий робот перемещается к зарядной станции для восполнения заряда собственной батареи.

Каждый робот имеет относительно низкие вычислительные мощности, поэтому управление группой осуществляется внешней централизованной системой управления. Между централизованной системой управления и роботами группы R осуществляется информационный обмен (рис. 2).

Рабочие и заряжающие роботы передают системе управления свои координаты (cr_i, cr_k), текущий уровень заряда (er_i, er_k) и статус (sr_i, sr_k). На основе информации, полученной от роботов, система управления в соответствии с алгоритмами работы формирует миссии для каждого робота. Миссия M_i роботов-рабочих включает в себя траекторию движения робота p_{ij} , координаты точек пополнения запаса энергетических ресурсов, содержащиеся в кортеже cr_i , и координаты задачи ct_j . Для робота-заряжающего задачей будет являться передача энергии роботу-рабочему в определенной точке рабочей области, а координатами точки пополнения запаса энергетических ресурсов будут являться координаты зарядной станции $cz = [x_u, y_u, z_u]$.



■ **Рис. 2.** Информационный обмен между роботами и системой управления группой

■ **Fig. 2.** Information exchange between robots and group control system

Постановку задачи исследования можно представить в виде математической модели задачи о назначениях с дополнительными ограничениями:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, j = \overline{1, n}; \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, i = \overline{1, m};$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Поскольку задач может быть больше, чем роботов, модель задачи о назначениях является открытой:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tau_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

где F — значение целевой функции; τ_{ij} — элемент матрицы затрат времени \mathbf{P} ; x_{ij} — элемент матрицы назначений \mathbf{Z} .

В соответствии с поставленной задачей матрица затрат времени \mathbf{P} имеет размерность $m \times n$ и состоит из элементов τ_{ij} . Матрица назначений \mathbf{Z} имеет аналогичную размерность и состоит из элементов x_{ij} :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \cdots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{m1} & \cdots & \tau_{mn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix},$$

где m — число роботов; n — число задач; факт назначения i -робота на j -задачу соответствует $x_{ij} = 1$.

С учетом предложенных режимов функционирования роботов-рабочих общее время выполнения j -задачи i -роботом складывается из следующих составляющих:

$$\tau_{ij} = \tau_s + \tau_r + \tau_{tx} + \tau_{exp} + \tau_j,$$

где τ_{ij} — общее время выполнения j -задачи i -роботом; τ_s — время принятия решений системой управления; τ_r — время перемещения i -робота к j -задаче; τ_{tx} — общее время передачи энергии от робота-заряжающего к роботу-рабочему; τ_{exp} — время ожидания робота-заряжающего; τ_j — время выполнения j -задачи.

Примем, что время принятия решений системой управления мало и им можно пренебречь в общем времени выполнения задачи, а также, что $\tau_s = \text{const}$. Процесс непосредственно выполнения роботом предметной задачи в рамках данной работы не рассматривается, ввиду чего примем $\tau_j = \text{const}$. При этом задачи ставятся извне (\mathbf{T}_a), и для стабильного функционирования группы необходимо проверить их выполнимость:

$$\mathbf{T}_w = f_1(\mathbf{ct}_j, \mathbf{cz}, e_{\max}, e_{\min w}, e_{\min c}, e_m, \delta e, \eta_p),$$

$$j \in \{1, n\}.$$

Значение τ_j зависит от скорости движения робота, рельефа рабочего пространства и длины траектории. Скорость движения по траектории и ее максимальное значение являются параметрами, зависящими от конструктивных решений конкретного робота. Примем, что роботы перемещаются в рабочем пространстве с максимальной возможной скоростью, ограниченной их конструктивными параметрами. Тогда время перемещения i -робота-рабочего к j -задаче зависит от длины определенной траектории и рельефа рабочего пространства. Длина траектории зависит от того, каким образом целевые задачи будут распределены между роботами, и взаимного расположения робота и назначенной ему задачи:

$$\mathbf{L}_w = f_2(\mathbf{B}, \mathbf{ct}_j, \mathbf{cr}_i), j \in \{c, d\}, i \in \{1, m\};$$

$$\langle \mathbf{P}_w, \mathbf{D}_w \rangle = f_3(\mathbf{T}_w, \mathbf{W}),$$

где \mathbf{L}_w — множество длин траекторий роботов-рабочих; \mathbf{P}_w — множество траекторий роботов-рабочих до точек выполнения задач; $\mathbf{D}_w = \{(i, j)\}$, $i = 1, \dots, m, j = c, \dots, d$ — множество с элементами номеров роботов и назначенных им задач.

Общее время передачи энергии от робота-заряжающего к роботу-рабочему τ_{tx} зависит от числа точек заряда pm , эффективности передачи энергии между роботами η_n и количества энергии, которое необходимо передать между роботами, et_g . Параметры pm и et_g вычисляются при формировании множества задач пополнения энергетических ресурсов роботов-рабочих \mathbf{T}_c и кортежа точек заряда i -робота \mathbf{cr}_i :

$$\mathbf{T}_c = f_4(\mathbf{p}_{ij}, \mathbf{ct}_j, er_i, et_j, e_{\max}, e_{\min w}, e_m,$$

$$\delta e, d_u, s_b, nb), j \in \{c, d\}, i \in \{1, m\};$$

$$\eta_n = f_5(\eta_{\max}, L_{rel}, H_{rel}, P_{rel}),$$

где η_{\max} — максимальная возможная эффективность передачи энергии; $L_{rel}, H_{rel}, P_{rel}$ — расстояние, смещение, передаваемая мощность системы передачи энергии в относительных единицах.

Время ожидания робота-заряжающего роботом-рабочим τ_{exp} зависит от количества задач пополнения энергетических ресурсов $|\mathbf{T}_c|$, длины траектории робота-заряжающего l_{kg} и их количества в составе группы $|\mathbf{C}|$. Длина траектории зависит от того, каким образом задачи пополнения энергетических ресурсов будут распределены между роботами-заряжающими, и взаимного расположения робота и назначенной ему задачи:

$$L_c = f_2(\mathbf{B}, \mathbf{ct}_g, \mathbf{cr}_k), g \in \{1, q\}, k \in \{1, z\};$$

$$\langle \mathbf{P}_c, \mathbf{D}_c \rangle = f_6(\mathbf{T}_c, \mathbf{C}),$$

где L_c – множество длин траекторий роботов-заряжающих; \mathbf{P}_c – множество траекторий роботов-заряжающих до задач пополнения энергетических ресурсов; $\mathbf{D}_c = \{(k, g)\}, k = 1, \dots, z; g = 1, \dots, q$ – множество с элементами номеров роботов-заряжающих и назначенных им задач.

Примем, что на момент начала работы группы количество рабочих и заряжающих роботов известно и постоянно: $|\mathbf{W}| = \text{const}, |\mathbf{C}| = \text{const}$.

Функционирование рабочих и заряжающих роботов соответствующим образом обеспечивается системой управления группой посредством формирования миссий на основе заданных параметров задач, роботов и области рабочего пространства. С учетом указанных выше функциональных зависимостей время выполнения j -задачи i -роботом τ_{ij} будет зависеть от того, как сформированы миссии каждого робота группы:

$$\mathbf{M}_i = f_7(\mathbf{P}_w, \mathbf{T}_c, \mathbf{T}_w), j \in \{c, d\}, i \in \{1, m\};$$

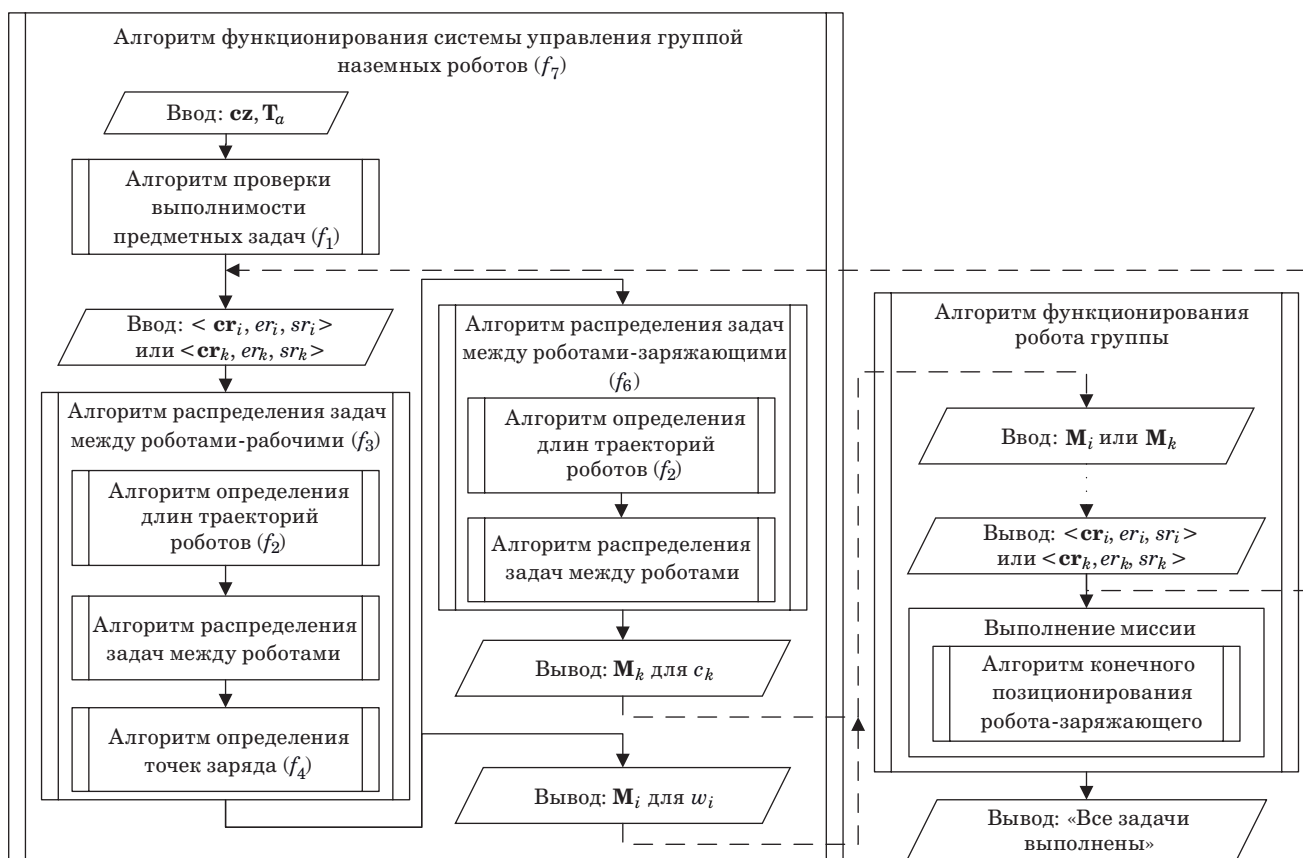
$$\mathbf{M}_k = f_7(\mathbf{P}_c, \mathbf{T}_c, \mathbf{cz}), g \in \{1, q\}, k \in \{1, z\}.$$

Алгоритмы функционирования группы роботов

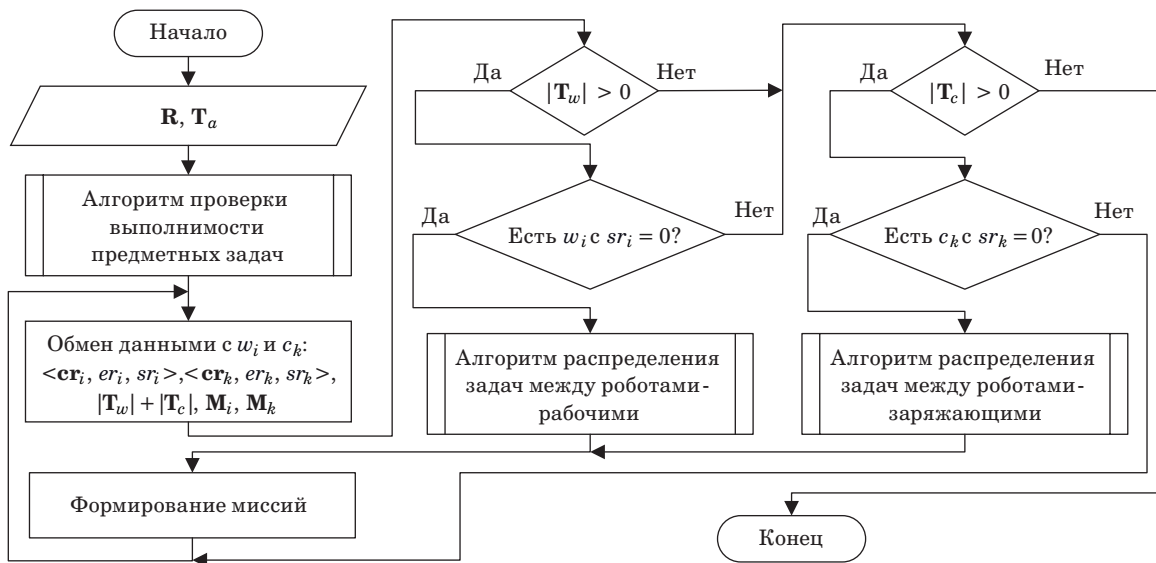
Взаимосвязи между разработанными алгоритмами функционирования системы управления группой наземных роботов показаны на рис. 3.

Далее рассмотрим разработанные алгоритмы более подробно. Алгоритм функционирования системы управления группой наземных роботов представлен на рис. 4.

На первом этапе посредством вложенного алгоритма отбираются выполнимые задачи ta_j , которые помещаются во множество \mathbf{T}_w . Затем осуществляется обмен данными с роботами группы для получения информации о их собственных координатах и запасе энергетических ресурсов. Далее осуществляется проверка количества элементов множества \mathbf{T}_w , а в случае если оно пустое, то множества \mathbf{T}_c , которое содержит в себе задачи пополнения энергетических ресурсов. Если множество задач \mathbf{T}_w пустое, а множество \mathbf{T}_c имеет элементы, то система управления группой проверяет наличие свободного робота-заряжающего. Посредством алгоритма распределения задач пополнения энергетических ресурсов между ро-



■ **Рис. 3.** Комплекс алгоритмов управления группой наземных роботов
 ■ **Fig. 3.** Complex of control algorithms for a group of ground robots



■ **Рис. 4.** Алгоритм функционирования системы управления группой наземных роботов
 ■ **Fig. 4.** Algorithm for the operation of a control system for a group of ground robots

ботами-заряжающими освободившемуся роботу назначается точка, в которой он должен пополнить заряд робота-рабочего. Далее формируются миссии и снова осуществляется обмен данными с роботами. Если множество задач T_w не пустое, то система управления группой проверяет наличие свободного робота-рабочего. Далее в соответствии с алгоритмом распределения задач между роботами-рабочими осуществляется выбор задачи для данного робота, поиск точек пополнения энергетических ресурсов, а затем формируется миссия. Алгоритм работы системы управления группой наземных роботов завершает свою работу в случае, когда множество задач T_w и множество задач пополнения энергетических ресурсов T_c становятся пустыми, что в свою очередь означает, что все выполнимые задачи, поставленные группе роботов, выполнены.

Каждый робот группы функционирует по алгоритму, изображенному на рис. 5.

На первом шаге алгоритма робот вычисляет собственные координаты относительно системы отсчета, связанной с картой высот, что необходимо для локализации робота в рабочей области. Второй шаг подразумевает измерение роботом параметров собственного источника питания и вычисление текущего запаса энергии в относительных единицах. Далее происходит обмен данными между роботом и централизованной системой управления. Робот отправляет системе свои координаты, текущий запас энергии и статус. Статус робота sr_i дает системе информацию о том, занят ли робот в текущий момент выполнением миссии или нет. Если $sr_i = 1$, то робот занят выполнением миссии и

участвовать в распределении задач или точек заряда не может.

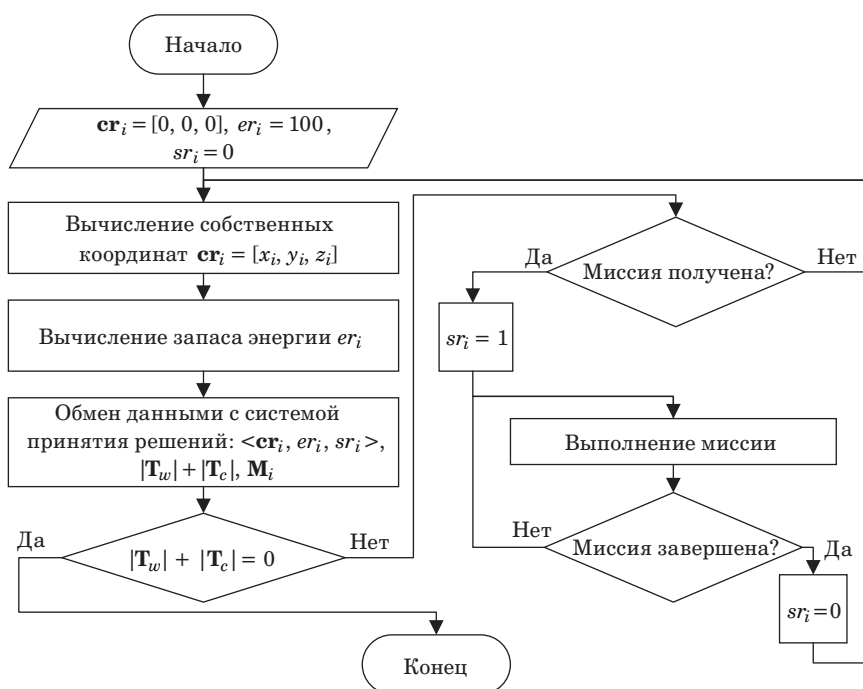
Роботы группы, а соответственно, и группа в целом имеют функциональные ограничения, связанные с физическими параметрами. Ввиду того, что задачи группе роботов ставятся извне, энергетические ресурсы, необходимые для их выполнения, могут превышать допустимые значения. Для стабильного функционирования группы необходимо исключить постановку роботам невыполнимых миссий.

Для отбора выполнимых задач разработан алгоритм (рис. 6), основанный на счетном цикле, внутри которого каждая задача из множества T_a проверяется по двум условиям. Первое проверяемое условие, представленное неравенством

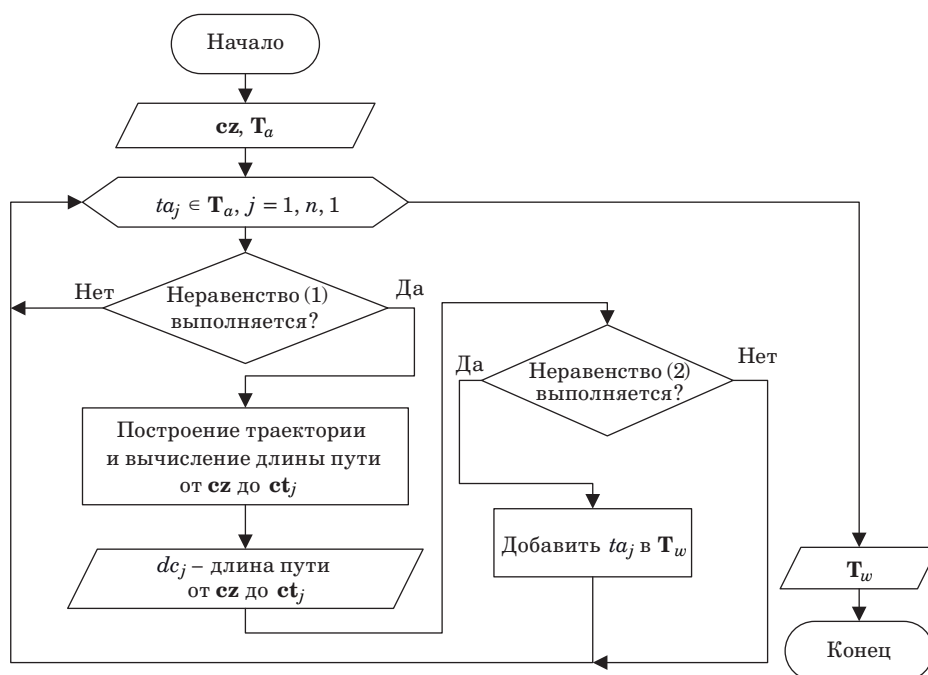
$$et_j \leq e_{\max} - (e_{\min w} + \delta e), \quad (1)$$

соблюдается в случае, если значение энергии, необходимой для выполнения задачи, не превышает значение энергетических ресурсов, доступных роботу-рабочему для использования.

Роботы-заряжающие имеют возможность неограниченно пополнять собственные энергетические ресурсы на зарядной станции, расположенной в рабочем пространстве группы. Предполагается, что робот-заряжающий пополняет свой запас энергетических ресурсов до значения e_{\max} , после чего может получить миссию на пополнение заряда робота-рабочего. Так как расход энергии на перемещение рабочих и заряжающих роботов принят в модели одинаковым, возможно использовать расстояние непосредственно от зарядной станции до



■ **Рис. 5.** Алгоритм функционирования робота группы
 ■ **Fig. 5.** Algorithm for the functioning of a robot from a group



■ **Рис. 6.** Алгоритм проверки выполнимости предметных задач
 ■ **Fig. 6.** Algorithm for possibility checking of performing subject tasks

задачи для проверки ее достижимости роботом-рабочим. Количество энергии, доступное роботу-рабочему, с учетом той, которую ему передаст робот-заряжающий, должно быть до-

статочным для преодоления пути от зарядной станции до задачи и для ее выполнения. Для проверки данного требования выведено неравенство

$$2e_m \frac{dc_j}{du} + et_j \leq e_{\max} - e_{\min w} + \frac{1}{\eta_p} (e_{\max} - e_{\min c}), \quad (2)$$

где dc_j — длина пути от зарядной станции до точки выполнения задачи.

Параметр потенциальной эффективности передачи энергии между роботами η_p показывает отношение между энергией, которую робот-рабочий получил, и энергией, которую робот-заряжающий при этом передал. Данный параметр позволяет учесть потери энергии при передаче энергии между роботами группы, что является особенностью использования бесконтактных систем передачи энергии. Также η_p возможно использовать для учета расхода энергии роботом-рабочим во время получения энергии от робота-заряжающего. Для устойчивой работы реальной системы параметр η_p следует задавать как предполагаемое минимальное значение эффективности передачи энергии между роботами. Если неравенство (2) выполняется, то в соответствии с представленным алгоритмом задача добавляется во множество $T_w = \{tw_c, \dots, tw_j, \dots, tw_d\}$, где номер задачи $j \in [c, d]$.

Для оптимального распределения выполнимых задач между роботами-рабочими используется венгерский алгоритм. Венгерский алгоритм позволяет находить оптимальное соответствие между роботом-рабочим и выполняемой задачей исходя из длины траектории l_{ij} между i -роботом и j -задачей. Для построения траектории каждого робота была выбрана модификация алгоритма LRLHD-A* (Local Roughness Local Height Difference A*) [19, 20].

Алгоритм определения точек заряда направлен на поиск участков на траекториях движения роботов-рабочих, на которых будет осуществляться позиционирование между роботами-рабочими и роботами-заряжающими для передачи энергетических ресурсов. Выбор данных участков осуществляется по принципу поиска наименьшего отклонения между координатами z соседних точек траектории. Диапазон поиска точек заряда соответствует следующему диапазону уровня заряда аккумулятора робота-рабочего: $(e_{\min w}; e_{\min w} + \delta e)$, где δe — заданный параметр, позволяющий определить верхнюю границу диапазона заряда аккумуляторной батареи, при котором разрешено пополнение энергетического запаса робота-рабочего. Количество точек nb на траектории, необходимое для позиционирования роботов при передаче энергии, определяется исходя из их размера, связанного с местом установки системы передачи энергии. Определенные точки заряда формируют множество задач пополнения энергетических ресурсов T_c и подлежат опти-

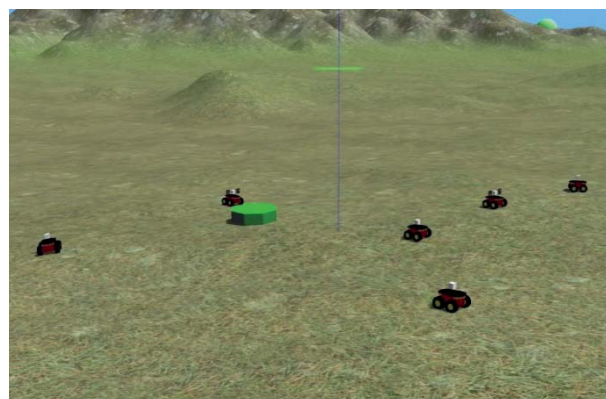
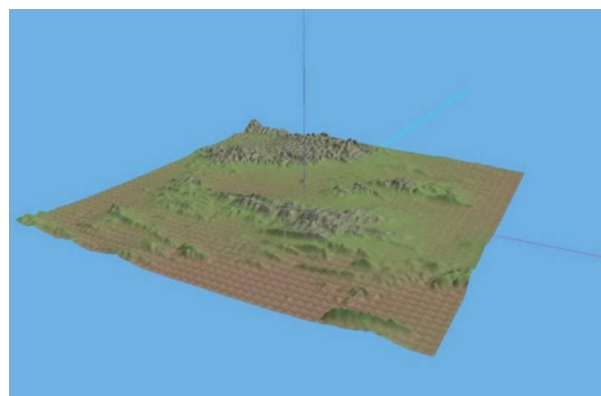
мальному распределению между роботами-заряжающими.

Экспериментальные результаты

Для получения статистически значимых результатов апробация предложенного подхода к функционированию группы роботов с перераспределением ресурсов проведена посредством имитационного моделирования в среде Gazebo. Рабочее пространство, в области которого находятся группа наземных роботов, задачи и зарядная станция, представляет собой рельефную поверхность (рис. 7).

Зарядная станция имеет количество постов передачи энергии для роботов, превышающее их количество, что убирает ограничение на число одновременно заряжающихся роботов в модели.

В качестве исходной модели для роботов использована модификация Pioneer 3-AT. Мобильные четырехколесные роботы (рис. 8) оснащены двунаправленной беспроводной системой передачи энергии [21, 22], ArUco-маркерами и камерами технического зрения. Все расположено в передней части робота.



■ **Рис. 7.** Рельефная поверхность рабочего пространства группы

■ **Fig. 7.** Embossed surface of the group workspace



■ **Рис. 8.** Модель мобильного четырехколесного робота
 ■ **Fig. 8.** Mobile robot model with four wheels

В соответствии с поставленными задачами моделирования разработаны следующие сценарии функционирования группы роботов.

Сценарий 1. Группа роботов выполняет задачи без перераспределения ресурсов. Число роботов равно шести. На начальный момент времени роботы находятся в определенных местах рабочего пространства и имеют максимальный уровень заряда. Число задач варьируется от шести до 15, соответственно, проводится 10 экспериментов для определенного среднего значения расстояния от зарядной станции до задач. Все задачи являются выполнимыми и находятся в определенных местах рабочего пространства. Необходимо зафиксировать время, за которое роботы выполняют все поставленные задачи. По предварительному планированию с применением венгерского алгоритма задачи распределяются между роботами. Выполнив задачу, робот следует на зарядную станцию и пополняет запас энергетических ресурсов, после чего вновь может участвовать в распределении задач.

Сценарий 2. Группа роботов выполняет задачи с перераспределением ресурсов. Число роботов-рабочих равно трем, роботов-заряжающих — тоже трем. На начальный момент времени роботы находятся в соответствующих местах рабочего пространства, определенных в первом сценарии, и имеют максимальный уровень заряда. Число задач, их расположение и количество экспериментов аналогично первому сценарию. Необходимо зафиксировать время, за которое роботы выполняют все поставленные задачи. По предварительному планированию с применением венгерского алгоритма задачи распределяются между роботами-рабочими. Далее на траекториях роботов-рабочих определяются точки заряда. Задачи пополнения энергетических ресурсов

также посредством венгерского алгоритма распределяются между роботами-заряжающими. После выполнения задачи робот-рабочий вновь участвует в распределении невыполненных задач. Робот-заряжающий после передачи энергии роботу-рабочему следует на зарядную станцию для пополнения собственных ресурсов, после чего может вновь участвовать в распределении задач пополнения энергетических ресурсов роботов-рабочих.

Моделирование проводится в целях определения и последующего сравнения времени выполнения задач группой, ввиду чего необходимо связать рабочие параметры роботов со временем. Для создания модели, имеющей высокий уровень соответствия реальному процессу, были проведены замеры потребляемой мощности реального робота [23] в различных режимах работы. Ввиду того, что потребляемую мощность необходимо связать со временем, рассчитанные величины приведены к энергопотреблению и переведены в относительные единицы (таблица).

Энергоемкость аккумуляторной батареи робота соответствует 37 Вт·ч и принята за 100%-й уровень заряда. Таким образом, значения, приведенные в таблице, представляют величину расхода заряда аккумуляторной батареи робота за время.

Во всех экспериментах применялись следующие параметры: максимальный уровень заряда роботов e_{\max} — 100 %; минимальный уровень заряда роботов-рабочих $e_{\min w}$ — 15 %; минимальный уровень заряда роботов-заряжающих $e_{\min c}$ — 5 %; радиус работы группы r_w , не более — 230 м; максимальная скорость робота — 0,1 м/с; время выполнения задачи — 2000 с. Расстояние

■ Энергопотребление мобильной автономной робототехнической платформы

■ Energy consumption of a mobile autonomous robotic platform

Режим работы	Потребители	$P_t, \% \cdot \text{ч}$	$P_t, \% \cdot \text{с}$
Простой	Вычислители в простое	6,8	0,0019
Перемещение	Колесные приводы	26,2	0,0073
	Вычислители		
Выполнение задачи (рабочий)	Дополнительное оборудование	56,2	0,0156
	Вычислители		
Выполнение задачи (заряжающий)	Передача энергии	131,8	0,0366
	Вычислители в простое		
Процесс заряда	Робот-рабочий	100,0	0,0278
	Робот-заряжающий	100,0	0,0278

от зарядной станции до каждой задачи определено для каждого эксперимента. При этом среднее значение расстояния от зарядной станции до задач существенно отличается в экспериментах: для набора экспериментов № 1 – 225 м, для набора экспериментов № 2 – 197 м, для набора экспериментов № 3 – 130 м.

В соответствии с рассмотренными сценариями проведено моделирование, по результатам которого построены графики. Результаты набора экспериментов № 1 представлены на рис. 9, а.

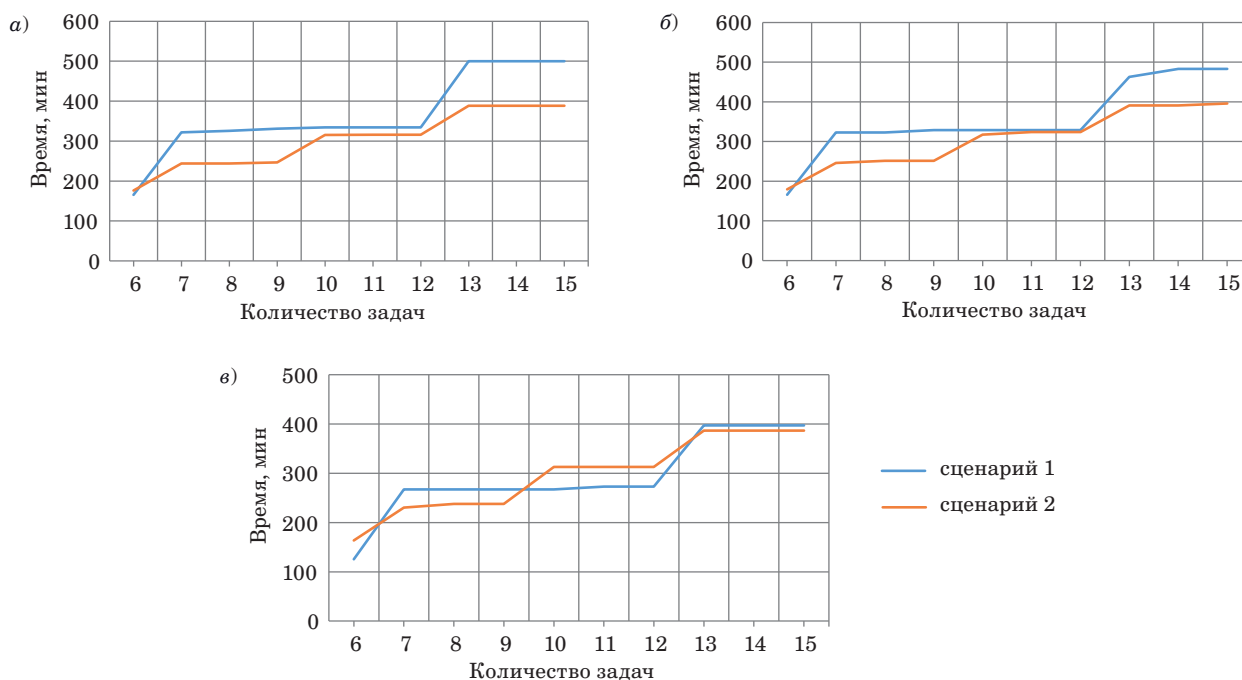
Из графика следует, что тенденция более быстрого выполнения задач группой, функционирующей по второму сценарию, сохраняется при числе задач, превышающем общее количество роботов. Это можно объяснить тем, что роботы-работчие, функционирующие по сценарию 2, расходуют значительно меньше времени на перемещение. Также сокращается время заряда каждого робота, так как роботам-работчим требуется передать меньше энергии ввиду сокращения ее расходов на перемещение. Максимальная разница во времени выполнения задач группами достигается при их количестве от 13 до 15 и составляет более 25 %.

Результаты набора экспериментов № 2 представлены на рис. 9, б. Тенденция более быстрого выполнения задач группой с перераспределением ресурсов сохраняется для набора экс-

периментов № 2. При количестве задач от 10 до 12 разница во времени выполнения задач при различных сценариях функционирования группы становится несущественной. Данный факт обусловлен количеством роботов в группе. Для группы, функционирующей без перераспределения ресурсов, общее время выполнения задач при их количестве от семи до 12 изменяется незначительно ввиду того, что на момент выполнения данных задач заряд всех роботов находится в завершающей стадии после выполнения первых шести задач. Максимальная разница в общем времени выполнения задач достигается при их количестве, равном 14, и составляет 20 %.

График, отражающий результаты набора экспериментов № 3, представлен на рис. 9, в. При среднем расстоянии до задачи 130 м группа без перераспределения ресурсов выполняет задачи быстрее в случае их количества от шести до 12. Так же, как и в предыдущих двух наборах экспериментов, время выполнения шести задач больше у группы, функционирующей по второму сценарию.

Исходя из результатов моделирования, можно сделать вывод, что при уменьшении среднего расстояния до задач преимущество во времени их выполнения постепенно переходит к группе роботов, функционирующей без перераспреде-



■ **Рис. 9.** Зависимость времени выполнения целевых задач от их количества при среднем расстоянии до задачи 225 м (а); 197 м (б); 130 м (в)

■ **Fig. 9.** Dependence of task execution time on their number at an average distance to the task of 225 m (a); 197 m (б); 130 m (в)

ния ресурсов. Это обусловлено снижением общего времени перемещения роботов. Важную роль для группы, функционирующей без перераспределения ресурсов, играет зарядная станция с неограниченным количеством постов передачи энергии. Все роботы группы могут одновременно пополнять свой заряд. Можно предположить, что сокращение постов заряда оказало бы значительное влияние на общее время выполнения задач в данном сценарии функционирования.

Эксперименты проводились с гомогенными группами наземных роботов, ввиду чего возможности группы, функционирующей с перераспределением ресурсов, раскрыты не полностью. Если роботов-заряжающих, в соответствии с их функциональным назначением, оснастить дополнительной аккумуляторной батареей или батареей с большей емкостью, что будет аналогично оснащению дополнительным оборудованием роботов-рабочих, затраты времени на выполнение задач будут меньше, чем в представленных результатах экспериментов.

Заключение

В работе представлено описание разработанных математической модели и алгоритмов функционирования группы наземных роботов с перераспределением энергетических ресурсов. Разработанная математическая модель отличается введением новых параметров, описывающих энергетические характеристики роботов, задач и среды функционирования, а также учитывает возможность энергетического обме-

на между роботами посредством бесконтактных систем передачи энергии. Модель описывает принципы функционирования роботов-рабочих и роботов-заряжающих и их взаимодействия. Разработанные алгоритмы функционирования группы роботов отличаются реализацией процессов перераспределения энергетических ресурсов на основе результатов предварительного планирования внешней централизованной системой управления. Экспериментально проведено сравнение между группами, функционирующими с традиционными принципами и на основе представленного подхода. Имитационное моделирование проведено в среде Gazebo по двум сценариям. В первом сценарии все шесть роботов были рабочими и выполняли задачи, а во втором группа была разделена поровну на роботов-рабочих и роботов-заряжающих. Проведено три набора экспериментов, в которых изменялось количество задач от шести до 15. Каждый набор экспериментов отличался расположением задач в области рабочего пространства и средним расстоянием от зарядной станции до задачи. Максимальная разница во времени выполнения задач группами достигается при среднем расстоянии от зарядной станции до задачи 225 м, количестве задач от 13 до 15 и составляет более 25 %.

Результаты проведенного моделирования подтверждают работоспособность и эффективность разработанного подхода. Перераспределение энергетических ресурсов позволяет значительно расширить область функционирования группы роботов и использовать ее для потенциально более энергоемких задач.

Литература

1. Shamsuddin A. Z. M., Ahsan T., Rahman I., Momen S. Trophallaxis and energy optimization in swarms of robots. *19th Intern. Conf. on Computer and Information Technology (ICCIT)*, 2016, pp. 490–495. doi:10.1109/ICCITECHN.2016.7860247
2. Zhou X., Kinny D. Energy-based particle swarm optimization: collective energy homeostasis in social autonomous robots. *Proc. of the 2013 IEEE/WIC/ACM Intern. Joint Conf. on Web Intelligence (WI) and Intelligent Agent Technologies (IAT)*, 2013, vol. 02, pp. 31–37. doi:10.1109/WI-IAT.2013.87
3. Даринцев О. В., Мигранов А. Б. Аналитический обзор подходов к распределению задач в группах мобильных роботов на основе технологий мягких вычислений. *Информатика и автоматизация*, 2022, № 21(4), с. 729–757. doi:10.15622/ia.21.4.4
4. Arif A. F., Ramli A. R., Samsudin K., Hashim S. J. Energy management in mobile robotics system based on biologically inspired honeybees behavior. *IEEE Intern. Conf. on Computer Applications and Industrial Electronics (ICCAIE)*, 2011, pp. 32–35. doi:10.1109/ICCAIE.2011.6162099
5. Bartashevich P., Koerte D., Mostaghim S. Energy-saving decision making for aerial swarms: PSO-based navigation in vector fields. *IEEE Symp. Series on Computational Intelligence (SSCI)*, 2017, pp. 1–8. doi:10.1109/SSCI.2017.8285178
6. Ismail A. R., Desia R., Zuhri M. F. R. The initial investigation of the design and energy sharing algorithm using two-ways communication mechanism for swarm robotic systems. *Proc. of the Fourth INNS Symposia Series on Computational Intelligence in Information Systems*, 2015, vol. 331, pp. 61–71. doi:10.1007/978-3-319-13153-5_7
7. Keskin M., Laporte G., Çatay B. Electric vehicle routing problem with time-dependent waiting times at recharging stations. *Computers & Operations Research*, 2019, vol. 107, pp. 77–94. doi:10.1016/j.cor.2019.02.014. <https://www.sciencedirect.com/sci->

- ence/article/abs/pii/S030505481930053X (дата обращения: 15.05.2023).
8. **Keskin M., Laporte G., Çatay B.** A simulation-based heuristic for the electric vehicle routing problem with time windows and stochastic waiting times at recharging stations. *Computers & Operations Research*, 2020, vol. 125, 105060. doi:10.1016/j.cor.2020.105060. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0305054820301775> (дата обращения: 15.05.2023).
 9. **Maо H., Shi J., Zhou Y., Zhang G.** The electric vehicle routing problem with time windows and multiple recharging options. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 114864–114875. doi:10.1109/ACCESS.2020.3003000
 10. **Даринцев О. В., Мигранов А. Б.** Использование муравьиного алгоритма для поиска стратегии поведения группы мобильных роботов на рабочем поле с препятствиями. *Многофазные системы*, 2022, т. 17, № 3–4, с. 177–186. doi:10.21662/mfs2022.3.016. <http://mfs.uimech.org/?l=ru> (дата обращения: 15.05.2023).
 11. **Darintsev O., Migranov A.** Multi-criteria optimization of the mobile robot group strategy using the ant algorithm. *Proc. of 16th Intern. Conf. Electromechanics and Robotics “Zavalishin’s Readings”*, Saint-Petersburg, April 14–17, 2021. Springer, Singapore, 2022, vol. 232, pp. 97–108. doi:10.1007/978-981-16-2814-6_9
 12. **Новикова К. О., Фетисов В. С., Овчинников А. В.** Автоматические сервисные станции для обслуживания беспилотных летательных аппаратов. *Научные исследования, разработки и практические внедрения: материалы VII Междунар. науч.-практ. конф.*, Ставрополь, 2022, с. 332–335.
 13. **Yu K., Budhiraja A., Tokekar P.** Algorithms for routing of unmanned aerial vehicles with mobile recharging stations and for package delivery. *arXiv preprint arXiv:1704.00079*, 2017, vol. 15. <https://arxiv.org/abs/1704.00079> (дата обращения: 15.05.2023).
 14. **Seyedi S., Yazicioğlu Y., Aksaray D.** Persistent surveillance with energy-constrained UAVs and mobile charging stations. *IFAC-PapersOnLine*, 2019, vol. 52, iss. 20, pp. 193–198. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896319320087> (дата обращения: 20.05.2023).
 15. **Ахмеров Ш. Р., Фетисов В. С.** Подбор последовательности вылетов мультикоптеров для дежурства над объектом с применением различных технологий. *Проблемы получения, обработки и передачи измерительной информации: материалы II Междунар. науч.-техн. конф.*, 2019, с. 408–413.
 16. **Booth K. E., Piacentini C., Bernardini S., Beck J. C.** Target search on road networks with range-constrained UAVs and ground-based mobile recharging vehicles. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2020, vol. 5, no. 4, pp. 6702–6709. doi:10.1109/LRA.2020.3015464
 17. **Медведев М. Ю., Костюков В. А., Бутенко М. Ю., Гисцов В. Г., Евдокимов И. Д.** Аппаратно-алгоритмическое обеспечение перспективной системы энергосбережения автономной группы БПЛА. *Известия Южного федерального университета. Технические науки*, 2022, № 5 (229), с. 230–243.
 18. **Ramasamy S., Reddinger J. P. F., Dotterweich J. M., Childers M. A., Bhounsule P. A.** Cooperative route planning of multiple fuel-constrained Unmanned Aerial Vehicles with recharging on an Unmanned Ground Vehicle. *Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2021, pp. 155–164. doi:10.1109/ICUAS51884.2021.9476848
 19. **Zakharov K., Saveliev A., Sivchenko O.** Energy-efficient path planning algorithm on three-dimensional large-scale terrain maps for mobile robots. *Proc. V Intern. Conf. “Interactive Collaborative Robotics” (ICR 2020)*, Saint-Petersburg, October 5–7, 2020, vol. 12336, pp. 319–330. doi:10.1007/978-3-030-60337-3_31
 20. **Медведев М. Ю., Бросалин Д. О.** Исследование алгоритмов глобального планирования маршрута. *Мехатроника, автоматика и робототехника*, 2023, № 11, с. 58–61. doi:10.26160/2541-8637-2023-11-58-61
 21. **Krestovnikov K., Cherskikh E., Saveliev A.** Structure and circuit solution of a bidirectional wireless power transmission system in applied robotics. *Radio-engineering*, 2021, vol. 30, no. 1, pp. 142–149. doi:10.13164/re.2021.0142
 22. **Krestovnikov K. D., Cherskikh E. O.** Development of the structure and circuit solution of a bidirectional wireless energy transmission system for swarm robots. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 171–192. doi:10.2298/SJEE2102171Km
 23. **Крестовников К. Д., Ерашов А. А.** Разработка архитектуры и обобщенной структуры модулей распределенной системы управления робототехническими комплексами различного назначения. *Робототехника и техническая кибернетика*, 2022, т. 10, № 3, с. 201–212. doi:10.31776/RTCJ.10305

UDC 62-503.55

doi:10.31799/1684-8853-2023-6-20-34

EDN: QFJGNR

Mathematical model and control algorithms for a group of ground robots with energy resource redistributionK. D. Krestovnikov^a, Junior Researcher, orcid.org/0000-0001-6303-0344, k.krestovnikov@iias.spb.su^aSt. Petersburg Federal Research Center of the RAS, Saint-Petersburg Institute for Informatics and Automation of the RAS, 39, 14 Line, V. O., 199178, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Applying several homogeneous or heterogeneous robots for solving target problems provides advantages in terms of time reduction or increased functionality compared to a single robot. At the same time, the amount of resources required to ensure the operation of a group of robots also increases. **Purpose:** To increase the efficiency of a group of robots operating in rough terrain by redistributing energy resources within the group. **Results:** We present mathematical model and control algorithms for a group of robots, with some of the robots defined as workers, and the other part as chargers. Worker robots are aimed solely at completing assigned tasks, and charging robots replenish their energy resources. The proposed approach takes into account the limited energy resource of charging robots and losses during energy transfer between robots, which makes it possible to apply the developed solutions for robots equipped with contactless energy transfer systems. The selection of points at which energy is transferred takes into account the topography of the surface of the working space, which simplifies the process of robots positioning and increases the efficiency of contactless energy transfer. Using simulation modeling in the Gazebo environment, we have compared the total time for performing tasks by groups operating with traditional principles and that for groups based on the presented approach. In the group without redistribution of resources, all robots were workers and performed target tasks. The second group was divided equally into worker robots and charger robots. The results obtained in the simulation show a general trend towards faster completion of tasks by a group operating with a redistribution of resources when the distance to tasks and their number increases. **Practical relevance:** The proposed approach of the resource redistribution expands the operation area of a group robots and makes it possible to apply it for potentially more energy-intensive tasks.

Keywords – group control of robots, swarm systems, resource redistribution in a group of robots.

For citation: Krestovnikov K. D. Mathematical model and control algorithms for a group of ground robots with energy resource redistribution. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 20–34 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-20-34, EDN: QFJGNR

References

- Shamsuddin A. Z. M., Ahsan T., Rahman I., Momen S. Trophallaxis and energy optimization in swarms of robots. *19th Intern. Conf. on Computer and Information Technology (ICCIT)*, 2016, pp. 490–495. doi:10.1109/ICCITECHN.2016.7860247
- Zhou X., Kinny D. Energy-based particle swarm optimization: collective energy homeostasis in social autonomous robots. *Proc. of the 2013 IEEE/WIC/ACM Intern. Joint Conf. on Web Intelligence (WI) and Intelligent Agent Technologies (IAT)*, 2013, vol. 02, pp. 31–37. doi:10.1109/WI-IAT.2013.87
- Darintsev O., Migranov A. Analytical review of approaches to the distribution of tasks for mobile robot teams based on soft computing technologies. *Informatics and Automation*, 2022, vol. 4, iss. 21, pp. 729–757 (In Russian). doi:10.15622/ia.21.4.4
- Arif A. F., Ramli A. R., Samsudin K., Hashim S. J. Energy management in mobile robotics system based on biologically inspired honeybees behavior. *IEEE Intern. Conf. on Computer Applications and Industrial Electronics (ICCAIE)*, 2011, pp. 32–35. doi:10.1109/ICCAIE.2011.6162099
- Bartashevich P., Koerte D., Mostaghim S. Energy-saving decision making for aerial swarms: PSO-based navigation in vector fields. *IEEE Symp. Series on Computational Intelligence (SSCI)*, 2017, pp. 1–8. doi:10.1109/SSCI.2017.8285178
- Ismail A. R., Desia R., Zuhri M. F. R. The initial investigation of the design and energy sharing algorithm using two-ways communication mechanism for swarm robotic systems. *Proc. of the Fourth INNS Symposia Series on Computational Intelligence in Information Systems*, 2015, vol. 331, pp. 61–71. doi:10.1007/978-3-319-13153-5_7
- Keskin M., Laporte G., Çatay B. Electric vehicle routing problem with time-dependent waiting times at recharging stations. *Computers & Operations Research*, 2019, vol. 107, pp. 77–94. doi:10.1016/j.cor.2019.02.014. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S030505481930053X> (accessed 15 May 2023).
- Keskin M., Laporte G., Çatay B. A Simulation-based heuristic for the electric vehicle routing problem with time windows and stochastic waiting times at recharging stations. *Computers & Operations Research*, 2020, vol. 125, 105060. doi:10.1016/j.cor.2020.105060. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0305054820301775> (accessed 15 May 2023).
- Mao H., Shi J., Zhou Y., Zhang G. The electric vehicle routing problem with time windows and multiple recharging options. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 114864–114875. doi:10.1109/ACCESS.2020.3003000
- Darintsev O. V., Migranov A. B. Using the ant colony algorithm to find a strategy for the behavior of a group of mobile robots on a working field with obstacles. *Multiphase Systems*, 2022, vol. 17, no. 3-4, pp. 177–186. doi:10.21662/mfs2022.3.016. Available at: <http://mfs.uimech.org/?l=ru> (accessed 15 May 2023) (In Russian).
- Darintsev O., Migranov A. Multi-criteria optimization of the mobile robot group strategy using the ant algorithm. *Proc. of 16th Intern. Conf. Electromechanics and Robotics “Zavalishin’s Readings”*, Saint-Petersburg, April 14–17, 2021. Springer, Singapore, 2022, vol. 232, pp. 97–108. doi:10.1007/978-981-16-2814-6_9
- Novikova K. O., Fetisov V. S., Ovchinnikov A. V. Automatic service stations for maintenance of unmanned aerial vehicles. *Materialy 7 Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii “Nauchnyye issledovaniya, razrabotki i prakticheskiye unedreniya”* [Materials of the VII Intern. Scient. and Pract. Conf. “Scientific research, development and practical implementation”]. Stavropol, 2022, pp. 332–335 (In Russian).
- Yu K., Budhiraja A., Tokekar P. Algorithms for routing of unmanned aerial vehicles with mobile recharging stations and for package delivery. *arXiv preprint arXiv:1704.00079*, 2017, vol. 15. Available at: <https://arxiv.org/abs/1704.00079> (accessed 15 May 2023).
- Seyedi S., Yazicioğlu Y., Aksaray D. Persistent surveillance with energy-constrained UAVs and mobile charging stations. *IFAC-PapersOnLine*, 2019, vol. 52, iss. 20, pp. 193–198. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896319320087> (accessed 20 May 2023).
- Akhmerov Sh. R., Fetisov V. S. Selection of a sequence of multicopter departures for duty over an object using various technologies. *Problemy polucheniya, obrabotki i peredachi izmeritel’noy informatsii: Materialy II Mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii* [Materials of the 2nd Intern. Scient. and Tech. Conf. “Problems of obtaining, processing and transmitting measurement information”], 2019, pp. 408–413 (In Russian).
- Booth K. E., Piacentini C., Bernardini S., Beck, J. C. Target search on road networks with range-constrained UAVs and

- ground-based mobile recharging vehicles. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2020, vol. 5, no. 4, pp. 6702–6709. doi:10.1109/LRA.2020.3015464
17. Medvedev M. Yu., Kostyukov V. A., Butenko M. Yu., Gistsov V. G., Evdokimov I. D. The concept of creating a promising system for recharging an autonomous group of UAVs. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2022, no. 5 (229), pp. 230–243 (In Russian).
 18. Ramasamy S., Reddinger J. P. F., Dotterweich J. M., Childers M. A., Bhounsule P. A. Cooperative route planning of multiple fuel-constrained Unmanned Aerial Vehicles with recharging on an Unmanned Ground Vehicle. *Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2021, pp. 155–164. doi:10.1109/ICUAS51884.2021.9476848
 19. Zakharov K., Saveliev A., Sivchenko O. Energy-efficient path planning algorithm on three-dimensional large-scale terrain maps for mobile robots. *Proc. V Intern. Conf. "Interactive Collaborative Robotics" (ICR 2020)*, Saint-Petersburg, October 5–7, 2020, vol. 12336, pp. 319–330. doi:10.1007/978-3-030-60337-3_31
 20. Medvedev M. Yu., Brosalin D. O. Study of global route planning algorithms. *Mekhatronika, avtomatika i robototekhnika*, 2023, no. 11, pp. 58–61 (In Russian). doi:10.26160/2541-8637-2023-11-58-61
 21. Krestovnikov K., Cherskikh E., Saveliev A. Structure and circuit solution of a bidirectional wireless power transmission system in applied robotics, *Radioengineering*, 2021, vol. 30, no. 1, pp. 142–149. doi:10.13164/re.2021.0142
 22. Krestovnikov K. D., Cherskikh E. O. Development of the structure and circuit solution of a bidirectional wireless energy transmission system for swarm robots. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, 2021, vol. 18, no. 2, pp. 171–192. doi:10.2298/SJEE2102171K
 23. Krestovnikov K. D., Erashov A. A. Development of architecture and generalized structure of modules for a distributed control system for robotic complexes for various purposes. *Robotics and Technical Cybernetics*, 2022, vol. 10, no. 3, pp. 201–212 (In Russian). doi:10.31776/RTCJ.10305
-



Программный инструментарий для исследования задач асимптотической комбинаторики диаграмм и таблиц Юнга

В. С. Дужин^а, канд. физ.-мат. наук, доцент, orcid.org/0000-0001-8399-284X, vsduzhin@etu.ru

^аСанкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, Профессора Попова ул., 5, Санкт-Петербург, 197376, РФ

Введение: решение многих фундаментальных задач асимптотической комбинаторики зачастую оказывается невозможным без проведения массивных компьютерных экспериментов, требующих, как правило, существенных вычислительных затрат. В этой связи актуальна задача разработки эффективного программного инструментария. **Цель:** создать программный пакет для работы с диаграммами и таблицами Юнга. **Результаты:** реализован программный пакет на языке C++, позволяющий работать с двумерными и трехмерными диаграммами и таблицами Юнга, а также моделировать различные марковские процессы на градуированных графах. Реализованы различные операции над таблицами Юнга, в частности алгоритм Робинсона – Шенстеда – Кнута и преобразование Шютценберже. Программный инструментарий в том числе включает в себя богатый функционал для визуализации различных комбинаторных объектов. **Практическая значимость:** то, что программный пакет написан на языке C++, дает преимущество в эффективности над традиционными подходами с использованием систем компьютерной алгебры, учитывая специфику многих задач асимптотической комбинаторики. Разработанный программный пакет использовался для проведения многочисленных компьютерных экспериментов в процессе моделирования динамики поведения разнообразных объектов асимптотической комбинаторики. Результаты моделирования легли в основу ряда научных публикаций.

Ключевые слова – диаграммы Юнга, таблицы Юнга, алгоритм Робинсона – Шенстеда – Кнута, соответствие RSK, преобразование Шютценберже, асимптотическая комбинаторика.

Для цитирования: Дужин В. С. Программный инструментарий для исследования задач асимптотической комбинаторики диаграмм и таблиц Юнга. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 6, с. 35–45. doi:10.31799/1684-8853-2023-6-35-45, EDN: XHNLMB

For citation: Duzhin V. S. A software package for studying problems of asymptotic combinatorics of Young diagrams and Young tableaux. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 35–45 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-35-45, EDN: XHNLMB

Введение

Асимптотическая комбинаторика – современный, динамично развивающийся раздел математики, в котором изучаются предельные свойства комбинаторных объектов. Решение многих задач асимптотической комбинаторики зачастую оказывается невозможным без проведения массивных компьютерных экспериментов. При этом проведение таких экспериментов, как правило, сопряжено с существенными вычислительными затратами. В этой связи разработка эффективного программного инструментария становится актуальной задачей. Настоящая работа посвящена описанию программного пакета, включающего в себя многочисленные функции для работы с диаграммами и таблицами Юнга.

Диаграммы Юнга и таблицы Юнга [1] являются популярными комбинаторными объектами, имеющими приложения в том числе в асимптотической теории представлений [2, 3], теории базисов Гребнера [4], построении точных решений интегрируемых гамильтоновых систем [5], в статистической физике [6] и квантовой механике [7, 8].

Одной из открытых задач асимптотической комбинаторики является поиск диаграмм Юнга с наибольшими размерностями среди всех диаграмм некоторого фиксированного размера [9]. Известно [10], что в пределе форма этих диаграмм описывается кривой Вершика – Керова, однако до сих пор неизвестен непереборный алгоритм для построения таких диаграмм. Аналогичная задача на графе плоских разбиений (трехмерном графе Юнга) оказывается еще более сложной, поскольку в этом случае неизвестен даже аналог формулы крюков: не существует эффективного алгоритма вычисления размерности трехмерной диаграммы Юнга. Поэтому поиск трехмерных диаграмм Юнга с максимальными размерностями подразумевает перебор как форм диаграмм, так и таблиц, которые могут быть вписаны в эти формы. Соответственно, становится актуальной задача разработки эвристических алгоритмов поиска двумерных и трехмерных диаграмм Юнга с большими и максимальными размерностями.

На градуированных графах, в том числе на графе Юнга, графе Шура, а также их обобщениях, можно построить марковские процессы, если назначить каждому ребру положительные веса

(вероятности) таким образом, чтобы для каждой фиксированной вершины сумма исходящих вероятностей была равна единице. Изучение предельных свойств таких процессов является актуальной задачей асимптотической комбинаторики, которую можно исследовать с помощью компьютерного моделирования. Здесь можно выделить такие задачи, как исследование асимптотического поведения функции нормализованной размерности в различных последовательностях диаграмм Юнга, исследование свойств последовательностей диаграмм Юнга, полученных с помощью жадного ветвления, изучение геометрических свойств трехмерных диаграмм Юнга при построении их различными случайными процессами и др.

Описание центральных мер на градуированных графах — открытая задача асимптотической комбинаторики [11]. На двумерном графе Юнга особое место занимает центральная мера Планшереля [10], соответствующая марковскому процессу с медленным ростом диаграмм Юнга вдоль координатных осей. На трехмерном графе Юнга аналог центральной меры Планшереля неизвестен. Тем не менее был предложен [12] так называемый псевдопланшерелевский марковский процесс на трехмерном графе Юнга. Для исследования его свойств необходимо проведение массивных вычислительных экспериментов.

Также интерес представляет разработка эффективного алгоритма, генерирующего случайные трехмерные таблицы Юнга заданной формы с равной вероятностью. Поскольку количество таблиц с ростом их размера увеличивается экспоненциально, их перечисление оказывается невозможным, и требуется разработка эффективного алгоритмического решения. В двумерном случае существует алгоритм hook walk [13], но его трехмерное обобщение не дает равномерной меры на таблицах.

В работе [14] были получены точные формулы, описывающие форму путей выталкиваний в записывающих таблицах Юнга в алгоритме Робинсона — Шенстеда — Кнута (RSK). Однако открытой проблемой остается характер стремления путей выталкиваний к данным кривым. К другим задачам, связанным с алгоритмом RSK, можно отнести исследование динамики значений, перемещаемых в записывающей таблице, изучение свойств деревьев выталкиваний, исследование распределения концов путей выталкиваний на фронте записывающей таблицы и др.

Другая важная задача, связанная с алгоритмом RSK, состоит в исследовании классов перестановок, эквивалентных (двойственно эквивалентных) по Кнуту, т. е. таких, которым соответствует одинаковая записывающая (нумерующая) таблица Юнга [1]. Это включает в себя

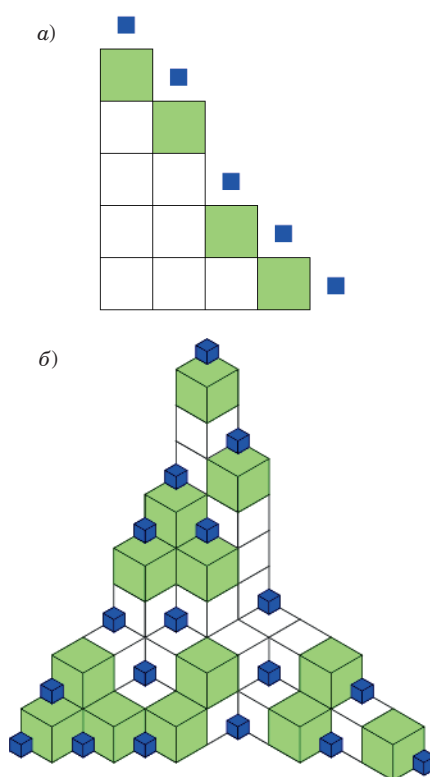
в том числе изучение распределения значений первого элемента перестановки от угла наклона пути Шютценберже нумерующей таблицы.

Алгоритмы, реализованные в программном пакете

В разработанном программном пакете были реализованы как базовые функции для работы с диаграммами и таблицами Юнга, так и большое количество различных программ для проведения вычислительных экспериментов.

Каждая диаграмма Юнга представлена в виде массивов длин строк (rows), длин столбцов (cols), а также координат внутренних (icorners) и внешних (ocorners) угловых клеток (рисунок, а).

В классе трехмерных диаграмм Юнга дополнительно также хранятся высоты столбцов, ориентированных вдоль оси z (bars). Пример трехмерной диаграммы Юнга приведен на рисунке, б. Заметим, что любого из вышеперечисленных способов хватило бы, чтобы однозначно определить диаграмму Юнга, однако такая избыточность позволяет эффективно выполнять различные операции над диаграммами. Двумерные (трех-



■ Пример диаграммы Юнга: а — двумерной; б — трехмерной. Синие клетки — внешние угловые; зеленые клетки — внутренние угловые
 ■ An example of a Young diagram: а — two-dimensional; б — three-dimensional. Outer corner boxes are marked in blue; inner corner boxes are marked in green

мерные) таблицы Юнга хранятся в памяти в виде двумерного (трехмерного) массива целых чисел, а также в виде одномерного списка координат клеток в порядке возрастания их значений.

В качестве примера приведем описание нескольких функций, реализованных в программном пакете.

Вычисление переходной вероятности в процессе Планшереля

Процесс Планшереля [15] – единственный центральный марковский процесс на графе Юнга с медленным ростом размеров диаграмм вдоль координатных осей. Свойство центральности состоит в том, что вероятности путей, соединяющих произвольную фиксированную пару диаграмм, одинаковы.

Для вычисления планшерелевских переходных вероятностей необходимо эффективно вычислять длины крюков клеток, т. е. подсчитывать количество клеток, расположенных выше в той же строке и правее в том же столбце. Эта операция имеет константную сложность благодаря хранению избыточной информации о диаграмме (листинг 1).

Листинг 1. Вычисление длины крюка клетки двумерной диаграммы Юнга

```
Listing 1. Calculating the hook length of a 2D Young diagram box
hook2D(x, y) {
    return rows[y] + cols[x] - x - y - 1;
}
```

Переходная вероятность или, другими словами, вероятность добавления клетки (x, y) в процессе Планшереля вычисляется как произведение длин крюков всех клеток, лежащих на обратном крюке клетки (x, y) , деленное на произведение этих же длин крюков, увеличенных на единицу (листинг 2).

Листинг 2. Вычисление планшерелевской переходной вероятности

```
Listing 2. Calculating the Plancherel transition probability
pprob(x, y) {
    prob = 1;
    for (i = 1; i < x; ++i) {
        hook = hook2D(i, y);
        prob *= hook / (hook + 1);
    }
    for (i = 1; i < y; ++i) {
        hook = hook2D(x, i);
        prob *= hook / (hook + 1);
    }
    return prob;
}
```

Вычисление переходной вероятности в псевдопланшерелевском процессе

Псевдопланшерелевский процесс случайного блуждания на трехмерном графе Юнга, предложенный в работе [12], является обобщением процесса Планшереля на двумерном графе Юнга. Псевдопланшерелевский процесс не обладает свойством центральности, однако, по всей видимости, является асимптотически центральным [12].

При вычислении переходных вероятностей вычисляются длины крюков клеток в трехмерной диаграмме Юнга, являющиеся естественным обобщением двумерных крюков (листинг 3).

Листинг 3. Вычисление длины крюка клетки трехмерной диаграммы Юнга

```
Listing 3. Calculating the hook length of a 3D Young diagram box
hook3D(x, y, z) {
    return rows[z][y] +
        cols[z][x] +
        bars[x][y] - x - y - z - 2;
}
```

Перед вычислением переходной вероятности добавления новой клетки в псевдопланшерелевском процессе необходимо вычислить сумму значений функции весов во всех внешних угловых клетках диаграммы. В листинге 4 приведен код функции вычисления веса в одной конкретной клетке. Вес клетки равен произведению длин трехмерных крюков, лежащих на трех лучах обратного трехмерного крюка с вершиной в данной клетке, деленному на произведение этих же длин крюков, увеличенных на единицу.

Листинг 4. Вычисление значения псевдопланшерелевской весовой функции

```
Listing 4. Calculating the value of the pseudo-Plancherel weighting function
pweight(x, y, z) {
    w = 1;
    for (i = 1; i < x; ++i) {
        hook = hook3D(i, y, z);
        w *= hook / (hook + 1);
    }
    for (i = 1; i < y; ++i) {
        hook = hook3D(x, i, z);
        w *= hook / (hook + 1);
    }
    for (i = 1; i < z; ++i) {
        hook = hook3D(x, y, i);
        w *= hook / (hook + 1);
    }
    return w;
}
```

Сначала вычисляется сумма псевдопланшерелевских весов всех внешних угловых клеток трехмерной диаграммы (листинг 5).

Листинг 5. Вычисление суммы псевдопланшерелевских весов

Listing 5. Calculating the sum of pseudo-Plancherel weights

```
psum() {
    sum = 0;
    for each (x, y, z) from ocorners {
        sum += pweight(x, y, z);
    }
    return sum;
}
```

Затем каждая псевдопланшерелевская вероятность клетки вычисляется как отношение псевдопланшерелевского веса в этой клетке к сумме весов (листинг 6).

Листинг 6. Вычисления псевдопланшерелевских вероятностей

Listing 6. Calculating pseudo-Plancherel probabilities

```
pprobs3D() {
    sum = psum();
    for each (x, y, z) from ocorners {
        probs[x, y, z] = pweight(x, y, z) / sum;
    }
}
```

Сравнение размерностей двумерных диаграмм Юнга

Вычисление точных размерностей диаграмм Юнга – чрезвычайно трудоемкий процесс. Однако в некоторых случаях возникает необходимость лишь сравнить размерности двух диаграмм, не вычисляя их точные значения. Например, это необходимо при работе алгоритмов поиска диаграмм с большими размерностями. Для того чтобы сравнить размерности, достаточно вычислить их отношение. В данной работе сравнение размерностей диаграмм *diag1* и *diag2* реализовано следующим образом (листинг 7):

1) вычисляется диаграмма-пересечение *cross_diag*, все клетки которой принадлежат как *diag1*, так и *diag2*;

2) из полученной диаграммы строятся пути в *diag1* и *diag2*;

3) вычисляется отношение планшерелевских вероятностей данных путей, которое равно отношению размерностей диаграмм *diag1* и *diag2*.

Листинг 7. Сравнение размерностей диаграмм Юнга

Listing 7. Comparing the dimensions of Young diagrams

```
comp_dim(diag1, diag2) {
    diag = cross_diag; i = 1;
    while (diag != diag1) {
        diag += (x, y);
        ratios[i++] = pprob(x, y);
    }
    diag = cross_diag; i = 1; ratio = 1;
    while (diag != diag2) {
        diag += (x, y);
        ratio *= ratios[i++] / pprob(x, y);
    }
    return ratio;
}
```

Преобразование Шютценберже

Преобразование Шютценберже преобразует таблицу Юнга размера n в другую таблицу размера $n - 1$ [16]. В предлагаемой реализации алгоритма таблица Юнга представлена в виде одномерного списка *tab* координат клеток в порядке возрастания их значений. Эти координаты обрабатываются последовательно. Вначале первая клетка с координатами (1, 1) удаляется из таблицы. Координаты клетки сохраняются в переменных *delX*, *delY*. Удаленная клетка будет возвращена в таблицу сразу после обработки соседней клетки, примыкающей к удаленной сверху или справа. В этот момент из таблицы удаляется эта соседняя клетка. Она будет возвращена в таблицу при обработке клетки, примыкающей к ней сверху или справа, и т. д. При этом все остальные клетки таблицы не удаляются и никак не изменяются. Алгоритм завершает работу после обработки всех клеток таблицы. Псевдокод алгоритма представлен в листинге 8.

Листинг 8. Преобразование Шютценберже
Listing 8. Schützenberger’s jeu de taquin

```
schutz(tab) {
    tab.remove(1, 1);
    delX = 1; delY = 1;
    for each (x,y) from tab {
        if ((x == delX) AND (y == delY + 1)) OR
            ((x == delX + 1) AND (y == delY)) {
            tab.remove(x, y);
            tab.insert(delX, delY);
            delX = x; delY = y;
        }
    }
}
```

Преимуществом такой реализации является то, что при работе алгоритма большинство элементов списка не меняется, а количество изменений равно длине пути Шютценберже. Такой подход позволяет легко реализовать преобразование Шютценберже на произвольном градуи-

рованном графе. Также были представлены две модификации классического преобразования Шютценберже: преобразование с сохранением формы и рандомизированное преобразование.

Преобразование с сохранением формы отличается от классического лишь тем, что в конце работы алгоритма в таблицу добавляется последняя удаленная клетка. Благодаря этому форма таблицы не меняется после итерации преобразования Шютценберже, что делает его обратимым.

В рандомизированном преобразовании Шютценберже последняя удаленная клетка также добавляется в таблицу. Кроме того, в случае, если начало таблицы равно (1, 1), (1, 2), (2, 1) или (1, 1), (2, 1), (1, 2), с вероятностью $\frac{1}{2}$ таблица либо остается неизменной, либо ее клетки (1, 2) и (2, 1) меняются местами.

Преобразование Робинсона – Шенстеда – Кнута

Преобразование RSK задает биекцию между численными последовательностями и парами таблиц Юнга одинаковой формы [17]: записываемыми P и нумерующими Q . В рамках настоящей работы было разработано несколько реализаций алгоритма RSK. Скорость работы алгоритма RSK в значительной степени определяется способом поиска ближайшего большего значения в столбце записываемой таблицы. Поиск проводится в диапазоне от первой строки до строки, из которой было вытолкнуто значение в соседнем столбце. Были реализованы три варианта поиска: линейный, двоичный и поиск с удвоением [18], являющийся гибридом первых двух подходов.

В листинге 9 приведен псевдокод алгоритма RSK с линейным поиском. Значения s последовательности $sequence$ обрабатываются по очереди. Вначале выполняется бинарный поиск ближайшего к s значения в первом столбце таблицы P (функция `nearest_greater`). Если s оказывается больше всех значений, то s помещается сверху первого столбца. Иначе s записывается на место ближайшего большего значения, которое помещается в буфер buf . Если buf оказывается больше всех значений следующего столбца, то buf записывается сверху этого столбца. В противном случае buf записывается на место ближайшего большего значения в соседнем столбце, которое в свою очередь помещается в buf . Поиск такого значения начинается с той же строки, из которой было вытолкнуто значение в предыдущем столбце, и продолжается вниз, вплоть до первой строки: перебирать значения выше не имеет смысла, так как они заведомо не будут ближайшими большими к вытолкнутому. Процесс продолжается, пока очередное вытолкнутое значение не запишется сверху какого-либо столбца.

Листинг 9. Алгоритм RSK с линейным поиском

Listing 9. RSK algorithm with linear search

```
for each s from sequence {
    buf = s;
    j = nearest_greater(P[1]);
    P[1,j] = buf;
    if (j == height(P[1]) + 1)
        continue;
    col = 2;
    while (buf < max(P[col])) {
        while(buf >= P[col,j])
            j--;
        j++;
        P[col,j] = buf;
        col++;
    }
    P[col, height(P[col]) + 1] = buf;
}
```

Также был разработан вариант алгоритма RSK, основанный на так называемом лесе выталкиваний. Лес выталкиваний – объединение путей выталкиваний в записываемой таблице Юнга, т. е. последовательностей клеток записываемой таблицы, участвующих в выталкивании при обработке очередного значения последовательности. При такой реализации алгоритма отпадает необходимость в поиске позиции для выталкивания очередного значения в записываемой таблице. С другой стороны, нужно постоянно поддерживать корректную структуру леса выталкиваний. Данный подход востребован в том числе потому, что такой комбинаторный объект, как лес выталкиваний, представляет самостоятельный исследовательский интерес. Помимо стандартного алгоритма RSK, был также реализован алгоритм обратного преобразования RSK, в котором по заданной паре таблиц Юнга восстанавливается соответствующая им числовая последовательность.

Программная реализация

В качестве языка разработки программного инструментария был выбран C++, средства которого позволяют эффективно реализовывать сложные операции над двумерными и трехмерными диаграммами и таблицами Юнга, а также моделировать различные марковские процессы на градуированных графах. Программный пакет включает в себя функции, которые позволяют добавлять и удалять клетки диаграмм, вычислять пересечения пары диаграмм, вычислять переходные вероятности в используемых марковских процессах и т. д. Для выполнения не-

которых сложных задач были реализованы параллельные вычисления с помощью технологии OpenMP. Визуализация графиков, анимаций и пр. для наглядной демонстрации результатов вычислений выполнялась с помощью утилиты `gnuplot`.

Программный пакет активно использовался в ходе работы над проектом по исследованию комбинаторики двумерных и трехмерных диаграмм Юнга с помощью компьютерного моделирования, что способствовало постоянному увеличению его функциональности. В настоящее время пакет включает в себя реализацию нескольких сотен методов, содержит более 20 тысяч строк кода. Ниже приведено краткое описание самых основных классов.

Diagram — двумерная диаграмма Юнга.

Основные функции: добавление/удаление клеток, вычисление планшерелевских вероятностей, вычисление точных и нормализованных размерностей, сравнение размерностей диаграмм, вычисление расстояния от кривой Вершика — Керова, визуализация диаграмм и др.

StrictDiagram — двумерная строгая диаграмма Юнга.

Функционал, близкий к классу `Diagram`, но адаптированный для строгих диаграмм Юнга, т. е. диаграмм, все столбцы которых имеют разную высоту.

Diagram3D — трехмерная диаграмма Юнга.

Основные функции: добавление/удаление клеток, вычисление псевдопланшерелевских вероятностей, перебор всех трехмерных таблиц Юнга заданной формы (вычисление размерности), вычисление расстояния между трехмерными диаграммами, вычисление расстояния до усредненной формы псевдопланшерелевского процесса, функции для визуализации диаграмм и др.

Process — марковский процесс.

Реализованы марковские процессы случайного блуждания на графе Юнга, графе Шура и на трехмерном графе Юнга: процесс Ричардсона, процесс Планшереля, псевдопланшерелевский процесс, семейство обобщенных процессов Ричардсона. Также реализованы версии этих процессов с фиксированной целевой формой диаграммы Юнга. Реализовано лексикографическое заполнение формы диаграммы.

RSK — алгоритм Робинсона — Шенстеда — Кнута.

Представлены три варианта реализации алгоритма `RSK` с различными методами поиска мест вставляемых и выталкиваемых элементов (линейный, бинарный и поиск с удвоением), обратный `RSK`, вычисление предельных путей выталкиваний, вычисление различных статистик

для путей выталкиваний, быстрая генерация случайных планшерелевских таблиц Юнга заданной формы и др.

Schutzenberger — алгоритм Шютценберже.

Реализованы классический алгоритм Шютценберже, алгоритм с сохранением формы и рандомизированный алгоритм, функции поиска длин циклов Шютценберже, а также функции вычисления копереходных вероятностей на трехмерном графе Юнга.

Также реализован ряд отдельно компилируемых консольных утилит, использующих методы вышеперечисленных классов. Среди разработанных утилит можно выделить в том числе следующие.

exhaustive — переборные алгоритмы на двумерном графе Юнга.

Перебор всех двумерных диаграмм на первых n этажах графа Юнга, поиск среди них диаграмм с максимальной размерностью, вычисление количества таблиц Юнга размера n .

merging — утилита для проверки гипотезы о слиянии жадных планшерелевских последовательностей.

От пары двумерных (трехмерных) диаграмм Юнга строятся жадные планшерелевские (псевдопланшерелевские) последовательности. Программа завершает работу при слиянии последовательностей. Есть возможность выбрать различные начальные формы диаграмм.

tab_generator — генератор случайных таблиц Юнга с помощью марковских процессов.

Параметры: тип диаграмм (двумерные или трехмерные), тип марковского процесса (процесс Планшереля: случайная или жадная последовательности, процесс Ричардсона, обобщенный процесс Ричардсона), целевой размер таблиц, количество таблиц. Таблицы генерируются без ограничения на форму, с произвольной одинаковой формой или с заданной пользователем формой. Для ускорения процесса генерации таблиц применяются параллельные вычисления.

RSKgen — алгоритм `RSK` (линейный поиск).

Генерация случайной равномерно распределенной последовательности чисел заданной длины, обработка ее с помощью алгоритма `RSK`. Записывающая и нумерующая таблицы сохраняются в файлы. Реализована возможность генерации таблиц Юнга заданной формы.

RSKForest — алгоритм `RSK` (основан на лесе выталкиваний).

Интерфейс аналогичен `RSKgen`, но алгоритм основан на использовании леса выталкиваний, корректная структура которого поддерживается во время итераций алгоритма.

invRSK — обратный алгоритм `RSK`.

На вход подаются два файла (с записывающей и нумерующей таблицами Юнга). В вы-

ходной файл записывается соответствующая им числовая последовательность. Опционально можно выводить только первые k элементов последовательности.

antichains – построение антицепей для заданной перестановки.

На вход подается файл с целочисленной перестановкой. Вычисляется структура антицепей, выводится в текстовом формате, а также в виде изображения (файл в формате PNG).

schutzberger – преобразование Шютценберже.

Заданная пользователем таблица преобразуется в другую таблицу с помощью преобразования Шютценберже и записывается в файл. Есть возможность выбора типа преобразования (классическое или с сохранением формы), вывода промежуточных таблиц, получаемых в течение одной итерации, а также вывода координат концов путей Шютценберже.

sch_invol – утилита, поддерживающая разнообразные компьютерные эксперименты для исследования инволюции Шютценберже.

Итеративно генерируются пары случайных таблиц (двумерных или трехмерных), у которых совпадают k последних элементов. К таблицам применяется инволюция Шютценберже. Полученные таблицы сохраняются в файл.

diag2img – визуализатор двумерных диаграмм Юнга.

Заданное пользователем в виде текстового файла целочисленное разбиение сохраняется в виде файла изображения (в формате PNG или EPS) двумерной диаграммы Юнга. Возможна также визуализация кривой Вершика – Керова, выбор цвета фона, толщины линий и т. д.

3Ddiag2img – визуализатор трехмерных диаграмм Юнга.

По заданному текстовому файлу с плоским разбиением генерируется изображение трехмерной диаграммы Юнга. Есть возможность вывода угловых клеток диаграммы, псевдопланшерелевской формы и др.

tab2img – визуализатор двумерных таблиц Юнга.

На вход подается таблица Юнга в текстовом виде. Генерируется файл изображения таблицы (в формате PNG или EPS). Возможна визуализация как стандартных, так и полустандартных таблиц. Реализован вывод пути Шютценберже, пути выталкиваний RSK, леса выталкиваний, длин крючков клеток, планшерелевских вероятностей, нормированной предельной формы процесса Планшереля. Можно выбирать размер шрифта, толщину линий, цвета различных элементов таблицы и др.

3Dtab2img – визуализатор трехмерных таблиц Юнга.

На вход подается трехмерная таблица Юнга в текстовом виде. Генерируется файл изображения таблицы (в формате PNG или EPS). Трехмерную таблицу можно выводить в том числе в виде последовательности изображений двумерных таблиц (для каждого значения координаты z). Возможна визуализация внешних и внутренних угловых клеток, путей Шютценберже, псевдопланшерелевских вероятностей и др.

2Dgraph2img – визуализатор начала двумерного графа Юнга.

Изображение первых k уровней графа сохраняется в виде векторного изображения (в формате PDF). Реализовано выделение различными цветами размерностей диаграмм (в рамках одного уровня графа). Можно задавать толщину линий, ребер, выбирать различные цвета.

Применение программного инструментария для компьютерного исследования динамики объектов асимптотической комбинаторики

С помощью разработанного программного пакета проведены многочисленные компьютерные эксперименты, в которых были задействованы диаграммы и таблицы Юнга, состоящие из миллионов клеток. Результаты экспериментов легли в основу ряда публикаций.

Исследовалась задача поиска диаграмм Юнга с максимальными размерностями, т. е. диаграмм, содержащих наибольшее количество таблиц Юнга (при фиксированном количестве клеток). С помощью переборных алгоритмов были получены первые 170 диаграмм с максимальными размерностями на графе Юнга и первые 250 на графе Шура. Перебор диаграмм Юнга больших размеров осложнен из-за экспоненциального роста их количества. Благодаря стратегиям поиска, реализованным в настоящем программном пакете, построены последовательности двумерных диаграмм Юнга с большими и максимальными размерностями на графах Юнга [19] и Шура [20]. Анализ полученных данных позволил высказать предположения о геометрических свойствах стандартных [21] и строгих [20] диаграмм Юнга с максимальными размерностями. Переборным алгоритмом получены трехмерные диаграммы Юнга с максимальными размерностями с размерами до 25 клеток включительно [22].

Отдельно исследовались свойства жадных планшерелевских последовательностей диаграмм Юнга [20]. На основе проведенных численных экспериментов сформулирована гипотеза о слиянии жадных последовательностей, построенных от произвольной пары диаграмм Юнга. Также были обнаружены любопытные

свойства первого ряда разностей нормализованных размерностей диаграмм Юнга в жадных последовательностях.

Проведена серия компьютерных экспериментов на трехмерном обобщении графа Юнга [23]. Предложена формула для нормализованной размерности трехмерных диаграмм Юнга. Исследовались асимптотические свойства диаграмм из случайной и жадной псевдопланшерелевских последовательностей. Изучалось асимптотическое поведение их нормализованных размерностей, количества угловых клеток, длин поперечников и пр. Аналогично двумерному случаю, обнаружены интересные закономерности в первом ряде разностей нормализованных размерностей. Экспериментально получены оценки предельных распределений планшерелевских и псевдопланшерелевских вероятностей на фронте двумерной и трехмерной диаграмм Юнга соответственно. В результате проведенной компьютерной симуляции было обнаружено, что формы трехмерных диаграмм в жадных и случайных псевдопланшерелевских последовательностях сходятся с ростом размера диаграмм.

В работе [22] приведены результаты моделирования рандомизированной версии преобразования Шютценберже над трехмерными таблицами Юнга. Экспериментально установлено, что такой алгоритм позволяет получать близкое к равномерному случайное распределение трехмерных таблиц заданной формы. С помощью этого генератора были получены оценки для копереходных вероятностей неизвестного центрального процесса на трехмерном графе Юнга.

В работе [24] доказано, что при стремлении размера нумерующей таблицы Юнга, распределенной по мере Планшереля, к бесконечности, угол θ наклона ее пути Шютценберже стремится к некоторому пределу. Другим результатом статьи является то, что по значению θ однозначно восстанавливается первый элемент последовательности случайных равномерно распределенных чисел. С использованием представленного в настоящей статье программного инструментария изучался характер зависимости между координатами концов путей выталкиваний нумерующих таблиц, состоящих из миллионов клеток, и соответствующих им первых значений числовых последовательностей. Обнаружено [25], что «при фиксированной записываемой таблице значение первого элемента перестановки зависит только от координат конца нерва нумерующей таблицы».

Характер сходимости путей выталкиваний алгоритма RSK к их предельным формам иссле-

довался с помощью компьютерной симуляции в работах [26, 27]. Было получено близкое соответствие теоретическому результату из статьи [14]. Получена оценка для скорости сходимости, которая оказалась достаточно медленной, с главным членом, пропорциональным $n^{-1/4}$. Также в [27] подробно изучалось распределение координат концов путей выталкиваний: было установлено, что оно хорошо согласуется с нормальным распределением. Заметим, что при проведении вычислительных экспериментов выяснилось, что наибольшую скорость при работе с планшерелевскими таблицами Юнга показала реализация алгоритма RSK с линейным поиском, что, однако, не исключает применимость других разработанных в данном пакете подходов при исследовании таблиц Юнга, типичных для других случайных распределений.

Заключение

Приведено краткое описание разработанного программного пакета для работы с диаграммами и таблицами Юнга. Востребованность данного пакета продиктована спецификой задач асимптотической комбинаторики, многие из которых могут быть решены лишь с помощью компьютерной симуляции. Пакет состоит из нескольких сотен методов, включает в себя более 20 тысяч строк исходного кода. Реализованы многие функции для работы с диаграммами и таблицами Юнга (добавление/удаление клеток, сравнение размерностей, вычисление нормализованных размерностей и пр.), марковские процессы на градуированных графах (процесс Планшереля, процесс Ричардсона и др.), операции над таблицами Юнга (преобразование RSK, преобразование Шютценберже и т. д.), инструменты для визуализации различных комбинаторных объектов и пр. В статье для примера приведено лишь краткое описание нескольких реализованных функций.

С помощью разработанного программного инструментария проведены многочисленные компьютерные эксперименты, в результате которых получены новые научные результаты [19–23, 25–27], что подтверждает эффективность данного инструментария.

Финансовая поддержка

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 22-21-00669.

Литература

1. Stanley R. P. *Enumerative Combinatorics*. Vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. 595 p.
2. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотическая теория характеров симметрической группы. *Функциональный анализ и его приложения*, 1981, т. 15, вып. 4, с. 15–27.
3. Вершик А. М. Спектр и абсолют графа двустрочечных диаграмм Юнга. *Зап. научн. сем. ПОМИ «Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXXIV»*, 2022, т. 517, с. 55–69.
4. Mora T., Robbiano L. The Gröbner fan of an ideal. *Journal of Symbolic Computation*, 1988, vol. 6, iss. 2-3, pp. 183–208. doi:10.1016/S0747-7171(88)80042-7
5. Okounkov A., Reshetikhin N. Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram. *Journal of the American Mathematical Society*, 2003, vol. 16, iss. 3, pp. 581–603. doi:10.1090/S0894-0347-03-00425-9
6. Cerf R., Kenyon R. The low-temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 2001, vol. 222, iss. 1, pp. 147–179. doi:10.1007/s002200100505
7. Боголюбов Н. М. Перечисление плоских разбиений и алгебраический анзац Бете. *Теоретическая и математическая физика*, 2007, т. 150, вып. 2, с. 193–203. doi:10.4213/tmf5973
8. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill College, 1965. 365 p.
9. Baer R. M., Brock P. Natural sorting over permutation spaces. *Mathematics of Computation*, 1968, vol. 22, iss. 102, pp. 385–410. doi:10.2307/2004668
10. Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotic of the largest and the typical dimensions of irreducible representations of a symmetric group. *Functional Analysis and its Applications*, 1985, vol. 19, iss. 1, pp. 21–31. doi:10.1007/BF01086021
11. Thoma E. Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe. *Mathematische Zeitschrift*, 1964, vol. 85, pp. 40–61.
12. Vasiliev N. N., Terentjev A. B. Modelling of almost central measures generated by Markov processes in the three-dimensional case. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 29, iss. 6, pp. 851–859. doi:10.1007/s10958-015-2532-0
13. Greene C., Nijenhuis A., Wilf H. S. A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape. *Advances in Mathematics*, 1979, vol. 31, iss. 1, pp. 104–109. doi:10.1016/0001-8708(79)90023-9
14. Romik D., Śniady P. Limit shapes of bumping routes in the Robinson – Schensted correspondence. *Random Structures & Algorithms*, 2016, vol. 48, iss. 1, pp. 171–182. doi:10.1002/rsa.20570
15. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга. *Докл. АН СССР*, 1977, т. 233, вып. 6, с. 1024–1027.
16. Schützenberger M. P. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Mathematica Scandinavica*, 1963, vol. 12, iss. 1, pp. 117–128.
17. Knuth D. E. Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific Journal of Mathematics*, 1970, vol. 34, iss. 3, pp. 709–727.
18. Bentley J. L., Yao A. C. An almost optimal algorithm for unbounded searching. *Information Processing Letters*, 1976, vol. 5, iss. 3, pp. 82–87. doi:10.1016/0020-0190(76)90071-5
19. Дужин В. С., Чудновская А. А. Поиск диаграмм Юнга с большими размерностями. *Компьютерные инструменты в образовании*, 2019, вып. 4, с. 33–43. doi:10.32603/2071-2340-2019-4-33-43
20. Duzhin V. S., Vasilyev N. N. Asymptotic behavior of normalized dimensions of standard and strict Young diagrams – growth and oscillations. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 2016, vol. 25, iss. 12, pp. 19–34. doi:10.1142/S0218216516420025
21. Duzhin V., Smirnov-Maltsev E. On Young diagrams of maximum dimension. *Communications in Mathematics*, 2023, vol. 31, iss. 3. <https://cm.episciences.org/volume/view/id/664>
22. Duzhin V., Vassiliev N. Randomized Schützenberger’s jeu de taquin and approximate calculation of the cotransition probabilities of a central Markov process on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 251, iss. 3, pp. 363–374. doi:10.1007/s10958-020-05097-1
23. Vasiliev N. N., Duzhin V. S. Numerical study of the asymptotics of path probabilities in a Markov process close to a central one on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 224, iss. 2, pp. 214–220. doi:10.1007/s10958-017-3406-4
24. Romik D., Śniady P. Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles. *The Annals of Probability*, 2015, vol. 43, iss. 2, pp. 682–737. doi:10.1214/13-AOP873
25. Васильев Н. Н., Дужин В. С., Кузьмин А. Д. Исследование свойств классов эквивалентности перестановок с помощью обратного преобразования Робинсона – Шенстеда – Кнута. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 11–22. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22
26. Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. On the convergence of bumping routes to their limit shapes in the RSK algorithm. Numerical experiments. *Информационно-управляющие системы*, 2021, № 6, с. 2–9. doi:10.31799/1684-8853-2021-6-2-9
27. Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. Modeling of bumping routes in the RSK algorithm and analysis of their approach to limit shapes. *Информационно-управляющие системы*, 2022, № 6, с. 2–9. doi:10.31799/1684-8853-2022-6-2-9, EDN: WRCOSH
15. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предель-

UDC 519.165, 519.688

doi:10.31799/1684-8853-2023-6-35-45

EDN: XHNLMB

A software package for studying problems of asymptotic combinatorics of Young diagrams and Young tableauxV. S. Duzhin^a, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0001-8399-284X, vsduzhin@etu.ru^aSaint-Petersburg Electrotechnical University «LETI», 5, Prof. Popov St., 197376, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: It is often impossible to solve fundamental problems of asymptotic combinatorics without conducting massive computer experiments. However, carrying out such experiments usually requires significant computational costs. In this regard, the task of developing effective software tools is relevant. **Purpose:** To develop a software package for working with Young diagrams and Young tableaux.

Results: A software package has been implemented in C++ which makes it possible to work with two- and three-dimensional Young diagrams and Young tableaux, as well as model various Markov processes on graded graphs. Numerous operations on Young tableaux have been implemented, including the Robinson-Schensted-Knuth algorithm and the Schützenberger's jeu de taquin. The software tools also include rich functionality for visualizing various combinatorial objects. **Practical relevance:** The software package is written in C++, which gives an advantage over traditional approaches using computer algebra systems in terms of efficiency, with the specifics of many problems of asymptotic combinatorics taken into account. The developed software package was used to conduct numerous computer experiments in the process of modeling the dynamics of the behaviour of various objects of asymptotic combinatorics. The modeling results have formed the basis for a number of scientific publications.

Keywords – Young diagrams, Young tableaux, Robinson-Schensted-Knuth algorithm, RSK correspondence, jeu de taquin, asymptotic combinatorics.

For citation: Duzhin V. S. A software package for studying problems of asymptotic combinatorics of Young diagrams and Young tableaux. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 35–45 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-35-45, EDN: XHNLMB

Financial support

The work was supported by the Russian Science Foundation grant 22-21-00669.

References

- Stanley R. P. *Enumerative Combinatorics*. Vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. 595 p.
- Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotic theory of characters of the symmetric group. *Functional Analysis and its Applications*, 1981, vol. 15, iss. 4, pp. 246–255 (In Russian).
- Vershik A. M. Spectrum and absolute of the graph of two-row Young diagrams. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI "Teoriya predstavlenij, dinamicheskie sistemy, kombinatornye metody. XXXIV"* [Notes of scientific seminars POMI "Representation theory, dynamical systems, combinatorial methods. XXXIV"], 2022, vol. 517, pp. 55–69 (In Russian).
- Mora T., Robbiano L. The Gröbner fan of an ideal. *Journal of Symbolic Computation*, 1988, vol. 6, iss. 2-3, pp. 183–208. doi:10.1016/S0747-7171(88)80042-7
- Okounkov A., Reshetikhin N. Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram. *Journal of the American Mathematical Society*, 2003, vol. 16, iss. 3, pp. 581–603. doi:10.1090/S0894-0347-03-00425-9
- Cerf R., Kenyon R. The low-temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 2001, vol. 222, iss. 1, pp. 147–179. doi:10.1007/s002200100505
- Bogoliubov N. M. Enumeration of plane partitions and the algebraic Bethe ansatz. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2007, vol. 150, pp. 165–174 (In Russian). doi:10.1007/s11232-007-0012-5
- Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill College, 1965. 365 p.
- Baer R. M., Brock P. Natural sorting over permutation spaces. *Mathematics of Computation*, 1968, vol. 22, iss. 102, pp. 385–410. doi:10.2307/2004668
- Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotic of the largest and the typical dimensions of irreducible representations of a symmetric group. *Functional Analysis and its Applications*, 1985, vol. 19, iss. 1, pp. 21–31. doi:10.1007/BF01086021
- Thoma E. Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe. *Mathematische Zeitschrift*, 1964, vol. 85, pp. 40–61 (In German).
- Vasiliev N. N., Terentjev A. B. Modelling of almost central measures generated by Markov processes in the three-dimensional case. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 29, iss. 6, pp. 851–859. doi:10.1007/s10958-015-2532-0
- Greene C., Nijenhuis A., Wilf H. S. A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape. *Advances in Mathematics*, 1979, vol. 31, iss. 1, pp. 104–109. doi:10.1016/0001-8708(79)90023-9
- Romik D., Śniady P. Limit shapes of bumping routes in the Robinson – Schensted correspondence. *Random Structures & Algorithms*, 2016, vol. 48, iss. 1, pp. 171–182. doi:10.1002/rsa.20570
- Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1977, vol. 233, iss. 6, pp. 1024–1027 (In Russian).
- Schützenberger M. P. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Mathematica Scandinavica*, 1963, vol. 12, iss. 1, pp. 117–128 (In French).
- Knuth D. E. Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific Journal of Mathematics*, 1970, vol. 34, iss. 3, pp. 709–727.
- Bentley J. L., Yao A. C. An almost optimal algorithm for unbounded searching. *Information Processing Letters*, 1976, vol. 5, iss. 3, pp. 82–87. doi:10.1016/0020-0190(76)90071-5
- Duzhin V. S., Chudnovskaya A. A. Search for Young diagrams with large dimensions. *Computer Tools in Education*, 2019, iss. 4, pp. 33–43. doi:10.32603/2071-2340-2019-4-33-43 (In Russian).
- Duzhin V. S., Vasilyev N. N. Asymptotic behavior of normalized dimensions of standard and strict Young diagrams – growth and oscillations. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 2016, vol. 25, iss. 12, pp. 19–34. doi:10.1142/S0218216516420025
- Duzhin V., Smirnov-Maltsev E. On Young diagrams of maximum dimension. *Communications in Mathematics*, 2023, vol. 31, iss. 3. <https://cm.episciences.org/volume/view/id/664>
- Duzhin V., Vassiliev N. Randomized Schützenberger's jeu de taquin and approximate calculation of the cotransition probabilities of a central Markov process on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2020,

- vol. 251, iss. 3, pp. 363–374. doi:10.1007/s10958-020-05097-1
23. Vasiliev N. N., Duzhin V. S. Numerical study of the asymptotics of path probabilities in a Markov process close to a central one on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 224, iss. 2, pp. 214–220. doi:10.1007/s10958-017-3406-4
 24. Romik D., Sniady P. Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles. *The Annals of Probability*, 2015, vol. 43, iss. 2, pp. 682–737. doi:10.1214/13-AOP873
 25. Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. Investigation of properties of equivalence classes of permutations by inverse Robinson – Schensted – Knuth transformation. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 11–22 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22
 26. Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. On the convergence of bumping routes to their limit shapes in the RSK algorithm. Numerical experiments. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2021, no. 6, pp. 2–9. doi:10.31799/1684-8853-2021-6-2-9
 27. Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. Modeling of bumping routes in the RSK algorithm and analysis of their approach to limit shapes. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2022, no. 6, pp. 2–9. doi:10.31799/1684-8853-2022-6-2-9, EDN: WRCOSH
-

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научные базы данных, включая Scopus и Web of Science, обрабатывают данные автоматически. С одной стороны, это ускоряет процесс обработки данных, с другой — различия в транслитерации ФИО, неточные данные о месте работы, области научного знания и т. д. приводят к тому, что в базах оказывается несколько авторских страниц для одного и того же человека. В результате для всех по отдельности считаются индексы цитирования, что снижает рейтинг ученого.

Для идентификации авторов в сетях Thomson Reuters проводит регистрацию с присвоением уникального индекса (ID) для каждого из авторов научных публикаций.

Процедура получения ID бесплатна и очень проста, есть возможность провести регистрацию на 12 языках, включая русский (чтобы выбрать язык, кликните на зеленое поле сверху справа на стартовой странице): <https://orcid.org>



Метод защищенной передачи информации для передвижения автономных транспортных средств

Р. Р. Фаткиева^а, канд. техн. наук, доцент, orcid.org/0000-0003-4065-9611, rikki2@yandex.ru

^аСанкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Профессора Попова ул., 5, Санкт-Петербург, 197376, РФ

Введение: существующие в настоящее время системы мониторинга и управления состоянием автотранспортных средств, а также методы построения оптимального маршрута передвижения не позволяют моделировать информационные атаки на инфраструктуру транспортных сетей и осуществлять оценку нарушения функционирования автотранспортных средств. **Цель:** разработать метод передачи информационных сообщений с использованием аппарата дискретной ситуационной сети для повышения безопасности передвижения автономных транспортных средств. **Результаты:** разработаны модели построения маршрута и передвижения автономных транспортных средств. По сравнению с традиционными алгоритмами нахождения кратчайших путей оптимальный маршрут передвижения автономных транспортных средств формируется динамически за счет оценки характеристик сегмента пути, встречающегося на маршруте, и времени, которое затрачивается на достижение пункта назначения. Это обеспечивается при помощи предложенного метода передачи информационных сообщений в дискретной ситуационной сети, где корректировка маршрутной информации осуществляется на базе активных и пассивных решателей с формированием информационных сообщений о нарушениях текущей дорожной обстановки и управляющих сообщений для изменения маршрута передвижения. Для повышения безопасности при передаче информационных сообщений разработаны алгоритмы обеспечения конфиденциальности и достоверности переданных сообщений. **Практическая значимость:** результаты исследования могут быть использованы при проектировании и построении систем управления автономными транспортными средствами, а также для моделирования их передвижения в условиях информационных атак. Благодаря возможности программной реализации алгоритма обеспечения достоверности переданных сообщений достигается практический результат защиты от атак отказа в обслуживании.

Ключевые слова – дискретная ситуационная сеть, децентрализованная сеть, информационная атака, функциональная безопасность, оптимизация маршрута передвижения, алгоритм Дейкстры.

Для цитирования: Фаткиева Р. Р. Метод защищенной передачи информации для передвижения автономных транспортных средств. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 6, с. 46–56. doi:10.31799/1684-8853-2023-6-46-56, EDN: QFOYQC

For citation: Fatkueva R. R. Secure data transmission method for the movement of autonomous vehicles. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 46–56 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-46-56, EDN: QFOYQC

Введение

Процесс моделирования транспортных сетей позволяет оптимизировать маршруты передвижения и сократить задержки, тем самым улучшить эффективность транспортных операций. «...транспортное моделирование широко применяется в процессе создания новых дорожно-транспортных узлов и процессов передвижения автотранспортных средств и представляет собой создание рабочей модели дорожного движения, соответствующего движению в реальных условиях на автомобильных дорогах. Как правило, имитационное моделирование производится в специализированном программном обеспечении и является быстрым и удобным способом оценки эффективности организации дорожного движения» [1]. Однако существующие на рынке средства не допускают возможности моделировать передачу информационных сообщений для оптимизации маршрута передвижения автономных транспортных средств (АТС).

Применяемые в настоящее время системы для отслеживания и управления состоянием АТС включают методы:

– анализа функционирования датчиков и CAN-шин, а также бортовых диагностических систем [2–6], которые оценивают работу транспортного средства и на основе отклонений от нормальных параметров функционирования в том числе выявляют потенциальные поломки и предсказывают их возникновение [7, 8]. В рамках этого же направления можно назвать и оценку рисков при использовании АТС [9];

– мониторинга и управления АТС и дорожным движением, которые включают использование средств наблюдения, камер и устройств, установленных на автомобилях [10, 11]. Они также позволяют создать цифровую модель функционирования дороги [12, 13], на основе которой выявляются отклонения при помощи машинного обучения или нейронных сетей [14, 15], что способствует прогнозированию уровня трафика и загрузки дорожных сетей;

— оптимизации передачи сообщений, основывающиеся на поиске функций, с минимизацией уровня потерь. Алгоритмы, заложенные в них, используются как в управлении маршрутами автотранспорта, так и в распределении нагрузки между вычислительными ресурсами и сетями [16, 17].

Однако рассмотренные модели и методы не позволяют осуществлять моделирование информационных атак на инфраструктуру транспортных сетей и нарушение их безопасности. В этих условиях необходимость разработки систем обеспечения информационной безопасности обусловлена как ростом числа АТС с одной стороны, так и возрастанием потенциальных уязвимостей к информационным атакам [18–20] за счет увеличения количества компонентной базы (датчиков, коммуникационных модулей, автопилотов и т. д.) с другой стороны, поскольку нарушение безопасности любого из этих компонентов может иметь серьезные последствия, включая аварии и угрозы жизни.

С учетом перспектив развития АТС и их значимости для общества исследование в области моделирования информационных атак и защиты инфраструктуры АТС являются актуальной и неотъемлемой частью обеспечения их безопасности и надежности. Результаты таких исследований могут привести к разработке эффективных мер по предотвращению и защите от информационных угроз в сфере транспортных сетей.

Модель построения маршрута передвижения АТС

С ростом количества АТС их взаимодействие в сетевой инфраструктуре становится все более сложным и требует эффективной оптимизации маршрутов передвижения для обеспечения безопасного движения. Одним из инструментов решения этой задачи является метод моделирования транспортной инфраструктуры на основе дискретной ситуационной сети (ДСС) [21]. Этот метод позволяет отобразить сложные сценарии взаимодействия АТС в виде графа, где вершины представляют узловые точки транспортной инфраструктуры, а ребра — возможные пути связи между ними. В этих условиях требуется осуществить разработку способа оптимизации маршрута передвижения АТС в децентрализованной сети при информационных воздействиях. Тогда можно утверждать, что АТС перемещаются «по неориентированному графу маршрута с определенной скоростью и могут обмениваться информационными сообщениями о текущей дорожной обстановке. Это требует сформировать описание структуры сети, позволяющей осуществлять

передачу информационных сообщений, которые содержат сведения о состоянии АТС и особенностях его функционирования, а также отражают изменение окружающей обстановки при передвижении транспортного средства по неориентированному графу» [21]. С учетом этого для построения маршрута разработаем модель карты, на основании которой формируется маршрут. Одним из вариантов представления карты является граф (сеть), который отвечает следующему виду:

$$K = \langle S, D, Cr, Sl, M \rangle, \quad (1)$$

где S — площадь карты (максимальные параметры графа); D — площадь дорожных покрытий; Cr — множество пересечений (промежуточные вершины графа); Sl — множество решателей (выбор передвижения по графу); M — множество маршрутов передвижения (направление ребер графа).

Алгоритм построения карты можно сформировать в виде шагов.

Шаг 1. Инициализация карты. Карта задается через известные параметры ширины и высоты. В общем виде площадь

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad (2)$$

где $f(x)$ — функция искривления полотна.

Будем считать, что на границах карты допускается формирование стоков и истоков дорог.

Шаг 2. Оценка площади дорожного полотна. При формировании площади дорожного полотна примем также допущение, что оно является прямолинейным, тогда площадь всех дорог, входящих в дорожное полотно, можно представить как сумму площадей всех дорожных полотен, участвующих в формировании маршрута от истока к стоку:

$$D = \sum_{i=1}^N d_i, \quad (3)$$

где D — размер полотна; $d_i = a_i \cdot b_i$, a_i — ширина i -го дорожного полотна, b_i — длина i -го дорожного полотна, ограниченного истоком и стоком; i — идентификатор дороги.

Использование (3) позволяет выявить площадь участков полотна, не задействованных в движении, как разность площадей ($S - D$), что дает возможность осуществить сегментацию участков, не задействованных в движении.

Шаг 3. Построение набора свойств дорожной разметки для каждого d_i -го дорожного полотна:

$$R = (r_1(\text{type}, v), r_2(\text{type}, v), \dots, r_M(\text{type}, v)), \quad (4)$$

где r_i — элемент дорожной разметки; $type$ — вид разметки; v — объем нанесения.

Шаг 4. Нахождение и построение пересечений дорожных полотен, для чего осуществляется:

4.1. Разбиение площади дорожного полотна (3), располагающегося между истоком и стоком, на множество интервалов длиной

$$L = (l_1^{d_i}, l_2^{d_i}, \dots, l_c^{d_i}), \quad (5)$$

где $l_c^{d_i}$ — количество интервалов разбиения для i -го дорожного полотна.

4.2. Вычисление на площади карты (2) контрольной точки K с координатами (x, y) , позволяющей задать координаты i -го интервала относительно данной точки.

4.3. Формирование множества идентификаторов пересечения дорог (перекрестков)

$$Cr = (Cr_1, Cr_2, \dots, Cr_N) \quad (6)$$

с помощью сравнения попадания в границы координат интервалов:

$$Cr_n = d_i \cap d_j = \{l_c^d \mid l_c^d \in d_i \cap l_c^d \in d_j\}. \quad (7)$$

Шаг 5. Нахождение сегмента дорожного полотна, заключенного между идентификаторами пересечения дорог:

$$d_{(Cr_n, Cr_{n+1})} = U_c l_c^d. \quad (8)$$

Это дает возможность построить множество сегментов маршрута и присвоить каждому сегменту весовой коэффициент γ , позволяющий определить свойства сегмента маршрута (например, задержки в пути):

$$C = (d_{(Cr_n, Cr_{n+1})}(\gamma_1), d_{(Cr_{n+1}, Cr_{n+2})}(\gamma_2), \dots, d_{(Cr_{N-1}, Cr_N)}(\gamma_N)). \quad (9)$$

Шаг 6. Назначение уникального идентификатора ID каждому сегменту дорожного полотна: $d_{(Cr_n, Cr_{n+1})}^{ID}$.

Шаг 7. Формирование множества пассивных решателей, для этого:

7.1. Определение координаты нахождения пассивного решателя, в частном случае можно использовать равноудаленное позиционирование пассивного решателя относительно центра дороги.

7.2. Присваивание множеству пассивных решателей уникальных идентификационных номеров:

$$Slp = (Slp_1^{d_i}, Slp_2^{d_i}, \dots, Slp_G^{d_i}), \quad (10)$$

где $Slp_G^{d_i}$ — количество пассивных решателей на d_i -м дорожном полотне.

7.3. Присваивание пассивного решателя подмножеству элементов дорожной разметки r_m из множества R (4):

$$Slp^{d_i} \in r_m. \quad (11)$$

Шаг 8. Формирование множества активных решателей, для этого:

8.1. Определение координаты нахождения активного решателя, который находится в границах пересечения дорог согласно (7).

8.2. Присваивание множеству активных решателей уникальных идентификационных номеров:

$$Sla = (Sla_1^{d_i}, Sla_2^{d_i}, \dots, Sla_g^{d_i}), \quad (12)$$

где $Sla_g^{d_i}$ — количество активных решателей на d_i -м дорожном полотне.

8.3. Присваивание активного решателя подмножеству элементов дорожной разметки r_m из множества R (4):

$$Sla^{d_i} \in r_m. \quad (13)$$

Шаг 9. Построение кратчайших путей в графе (сети). Учитывая в расчете значение весового коэффициента γ (9) при построении сети, основанного на различных известных характеристиках дороги, например: образование пробок, нахождение лежащего полицейского на конкретном участке дороги, — активный решатель формирует решение о дальнейшем движении автомобиля. В частном случае целесообразно рассмотреть построение маршрута с учетом в качестве весового коэффициента времени прохождения пути, тогда:

9.1. Представление множества сегментов дорог в виде графа с учетом введенных весов γ (9), ребер и выделенных вершин.

9.2. Определение первой ближайшей к стоку вершины как вершины истока.

9.3. Выбор подмножества v вершин, принадлежащих множеству V , ближайших к вершине-истоку, с учетом значений веса расстояния $d(\gamma)$. Определение их как непомяченных $v^*(d)$.

9.4. Для найденных вершин расчет времени задержки в них как $t = d/s + z$, где d — расстояние; s — скорость АТС, развиваемая на данном расстоянии; z — временные задержки, вызванные пассивными решателями на указанном пути.

9.5. Среди непомяченных вершин зафиксировать вершину с наименьшим весом, т. е. $v^*(d)$. Дальнейшее рассмотрение начинается с нее, с повторением шагов 9.2–9.5. Зафиксировать ре-

бра из вершины, найденной на шаге 9.2, в вершину, найденную на шаге 9.5. При этом зафиксированную на шаге 9.2 вершину считать помеченной и исключить из рассмотрения.

9.6. В случае если все вершины графа окажутся помеченными, алгоритм свою работу завершает.

Модель передвижения АТС

Передвижение АТС осуществляется с учетом информационных сообщений, полученных от решателей. Найдем близлежащий к АТС решатель из множества доступных решателей (12) за счет выявления максимального сигнала $signal(Sla_n)$, исходящего от решателей, находящихся в подмножестве видимости:

$$Sla = (signal(Sla_1), (signal(Sla_2), \dots, (signal(Sla_g))), \quad (14)$$

или по оценке местонахождения ближайшего решателя исходя из его координат.

Для выявленных решателей совершаем следующие действия:

1. Формируем сообщения об идентификации АТС в сетевой инфраструктуре ДСС. Для этого выделим сообщение M_w , позволяющее определить местонахождение АТС:

$$M_w = \langle t, w, d_{stock}, k \rangle, \quad (15)$$

где t – время появления АТС в истоке; w – уникальный идентификатор АТС отправителя; d_{stock} – место назначения АТС (идентификатор стока); k – координаты нахождения АТС.

2. На основании полученных координат от АТС фиксируем пункт места назначения и задаем функцию передвижения. Решатель осуществляет данную процедуру, проведя следующие мероприятия:

2.1. Построение наикратчайшего пути согласно шагу 9.

2.2. Формирование управляющего сообщения о передвижении АТС для последующей оптимизации маршрута с учетом информации о нарушениях и (или) препятствиях, которые могут произойти на его пути:

$$M_j = \langle w, l \rangle, \quad (16)$$

где M_j – уникальный идентификатор сообщения; l – управляющее сообщение с маршрутом передвижения.

2.3. Построение маршрута передачи сообщений о АТС на основе информации о количестве тактов ДСС с использованием информации, по-

лученной в (2) и (3), и распространение его по ДСС:

$$M_M = \langle w, l, p \rangle, \quad (17)$$

где M_M – уникальный идентификатор сообщения о маршрутизации сообщений; p – технические характеристики АТС.

3. Регистрируем оперативную информацию о прохождении АТМ контрольных точек маршрута. Для этого по маршруту сети АТС передвигается с передачей оперативной информации близлежащему решателю о времени прохождения контрольных точек маршрута для возможности построить новый маршрут с учетом вероятных нарушений в траектории движения:

$$M_{oi} = \langle w, l, oi \rangle, \quad (18)$$

где M_{oi} – оперативная информация о времени прохождения контрольных точек маршрута; oi – время прохождения контрольных точек маршрута АТС.

4. На основании (18) решателем осуществляется коррекция:

– маршрутизации транспортных средств, находящихся в пути, с использованием сообщений согласно (16);

– маршрута передачи сообщений о передвижении автономного наземного транспортного средства между решателями в ДСС.

Метод защищенной передачи информационных сообщений в ДСС

Как было упомянуто ранее, активным решателям известна информация о весах дороги, но ничего не известно о препятствиях, возникающих во время движения на дорогах. Это приводит к тому, что активный решатель не может правильно предложить оптимальный маршрут до получения соответствующей информации о возможных нарушениях передвижения. Тогда для коррекции маршрутной информации АТС формируют информационные сообщения о нарушениях, учитывая текущую дорожную обстановку. Это позволяет скорректировать и выбрать оптимальный маршрут других АТС.

Рассмотрим метод передачи информационных сообщений в ДСС со стороны АТС.

1. Пусть АТС движется с скоростью $V(t)$. При обнаружении препятствий или нарушений движения на дорогах АТС изменяет скорость передвижения с формированием для активного решателя информационного сообщения, содержащего характеристику, подлежащую коррекции (например, в частном случае это скорость или

необходимость перестроиться на соседнюю полосу), и описание сегмента дороги, на котором происходит изменение характеристики функционирования АТС. Для этого сформируем сообщение, аналогичное сообщению (18):

$$M_{oi} = \langle w, l, p(V(t)) \rangle, \quad (19)$$

где l – сообщение о сегменте маршрута на пути передвижения АТС.

Тогда возникает задача минимизации количества сообщений в условиях максимизации скорости:

$$V(M) \Rightarrow \min_n \sum_{i=1}^n M_{oi}, \quad (20)$$

где $V(M)$ – максимальная скорость АТС при получении сообщения; n – количество сообщений для формирования маршрутной информации.

2. Анализ оптимального маршрута передачи информационных сообщений предполагает три случая.

Случай 1 – в системе управления АТС присутствует аппарат для построения топологии сети передачи информационных сообщений. Тогда по запросу от АТС с активного решателя загружается информационное сообщение (17), которое позволяет сформировать граф, хранящий информацию о количестве ребер, которые может обойти сообщение. На основании полученного сообщения выполняется построение и заполнение структур данных в модели передачи данных (матрица смежности, инцидентности с построением матрицы маршрутизации).

Случай 2 – анализ топологии выполнить невозможно. В общем случае сообщение планируется к передаче близлежащему решателю.

Случай 3 – имеется информация о всех активных решателях, которые были пройдены на пути движения АТС, актуальная для тех АТС, которым предстоит пройти препятствие. При данных условиях информационное сообщение формируется для всех пройденных АТС решателей (т. е. информация передается в направлении, противоположном движению АТС).

3. Отправка сформированного пакета всем активным решателям, которые находятся от АТС на расстоянии, не превышающем возможное для получения сообщения.

Теперь рассмотрим метод передачи информационных сообщений в ДСС со стороны активного решателя.

При получении сообщения от АТС на стороне активного решателя возникает две задачи:

– формирование маршрута передачи информационного сообщения о нарушениях в дорожной обстановке для соседних активных решате-

лей с широковещательной рассылкой данного сообщения по найденным маршрутам;

– формирование сообщения для АТС, находящихся в сегменте дороги, под влиянием активного решателя, содержащего управляющее воздействие, для оптимизации маршрута передвижения.

4. Для решения задачи 1 со стороны активного решателя осуществляется:

4.1. Проверка достоверности полученного от АТС информационного сообщения и анализ количества сообщений от данного АТС или соседних АТС, движущихся по данному маршруту, для защиты от атак отказа в обслуживании.

4.2. Формирование таблицы маршрутизации указанного сообщения на основании графа топологии активных решателей при условии достоверности сообщения на шаге 4.1. Это позволяет уменьшить загруженность каналов связи ДСС при передаче информационных сообщений.

4.3. Широковещательная рассылка информационных сообщений о нарушении дорожной обстановки.

5. Для решения задачи 2 со стороны активного решателя осуществляется формирование маршрута передвижения АТС, для этого производится:

5.1. Вычисление всех АТС из множества АТС, находящихся в заданном сегменте дороги, для которых требуется изменение маршрута.

5.2. Изменение весового коэффициента, присвоенного каждому сегменту, или исключение данного ребра в зависимости от вида нарушения дорожной обстановки.

5.3. Перерасчет оптимального кратчайшего пути при помощи алгоритма Дейкстры на основании измененных весовых коэффициентов.

5.4. Формирование для АТС управляющего сообщения с новым маршрутом передвижения.

5.5. Передача активным решателям информации об оптимальном маршруте передвижения для АТС, найденных на шаге 5.1, или широковещательная рассылка для всех АТС.

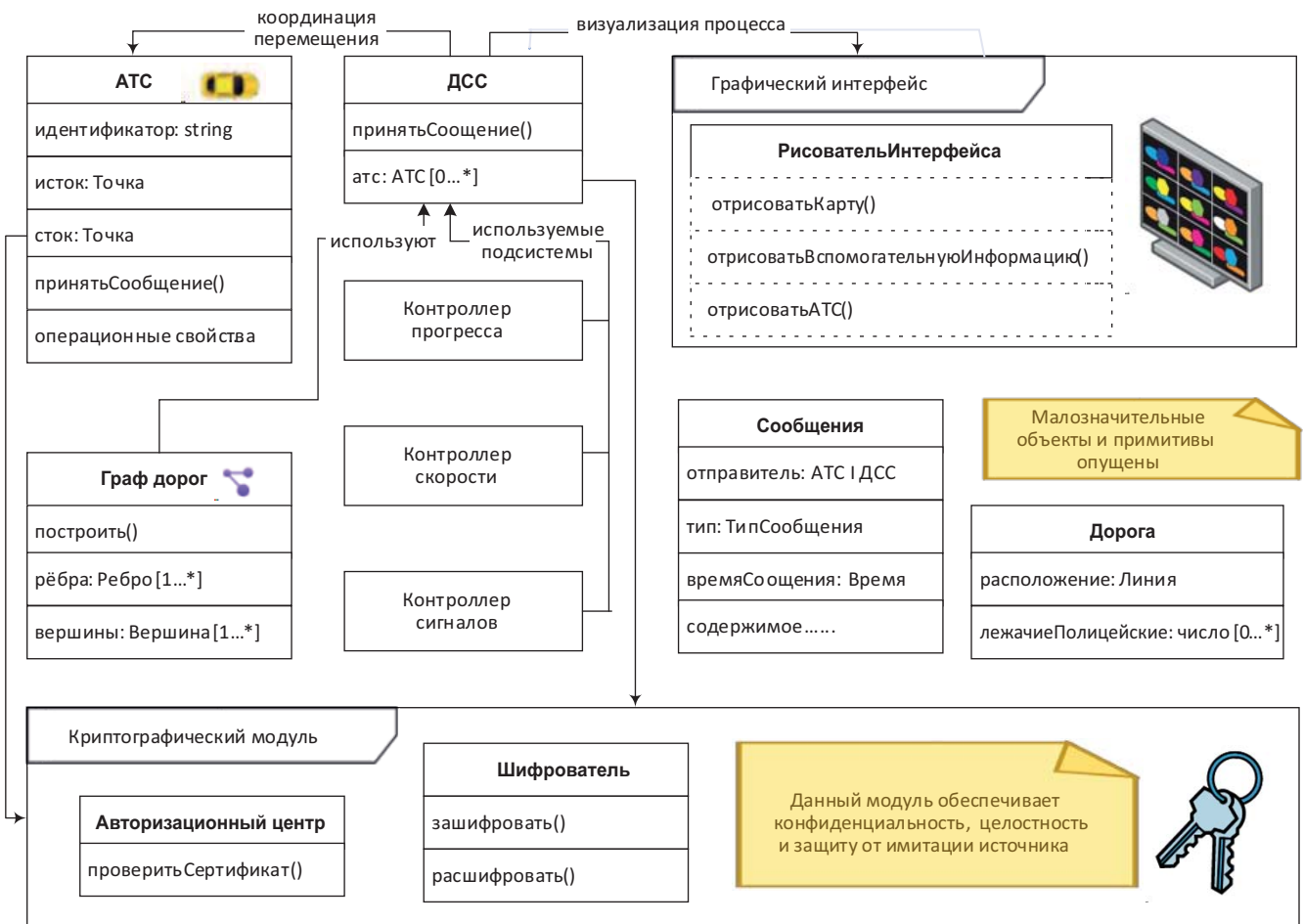
Практическое применение метода

Практическое применение метода защищенной передачи информации для передвижения АТС реализовано в программном комплексе на основе моделирования движения АТС на участке дорожного полотна. АТС движутся из одной точки карты в другую. При этом центральный орган управления АТС отсутствует. Оптимизация движения маршрута идет в определенных узлах данной сети (решателях) и обеспечивается при помощи алгоритма Дейкстры и обмена сообщениями о текущей дорожной обстановке между АТС и решателями. Для разработки програм-

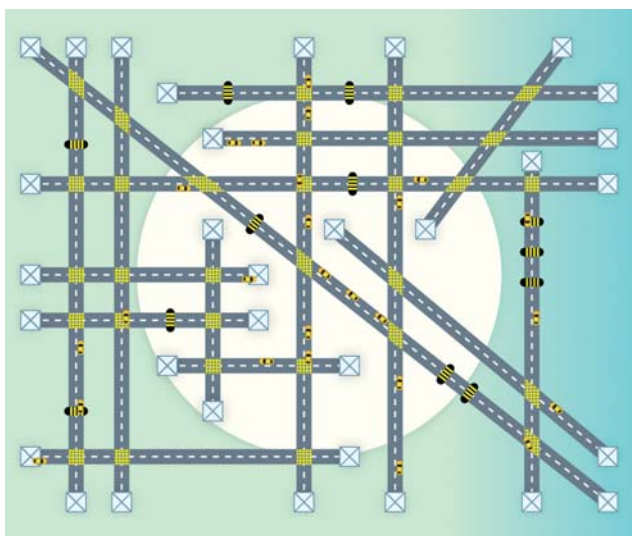
много комплекса был выбран язык программирования TypeScript, для отрисовки карты и создания анимации используются элемент Canvas и библиотеки с открытым исходным кодом React. Программный комплекс оптимизирован, увеличение производительности достигается за счет предварительной индексации данных, которая подразумевает под собой расчет данных из входных параметров. Доступны различные конфигурации окружения для симуляции разнообразных условий улично-дорожной сети. Ядром программы является ДСС-модуль, который работает в дискретные такты и контролирует передвижение АТС, их скорость, а также осуществляет передачу информационных сообщений в каждый рабочий такт. Он обеспечивает работу всей системы при помощи контроллера прогресса, контроллера скорости, контроллера сигналов и криптографического модуля. Архитектура программного комплекса продемонстрирована на рис. 1.

На вход программы поступают данные о множестве дорог и препятствий на них, кото-

рые образуют карту. Структура программы позволяет в любой момент сгенерировать любую другую карту, подав на вход иные параметры. В качестве дальнейшего развития программного комплекса может быть использована процедурно-генерируемая карта. Возможно нанесение двух типов препятствий: пешеходных переходов и лежачих полицейских. Конфигурации заданы по умолчанию, однако их можно модифицировать в процессе работы программы. Они включают в себя загруженность дорог, количество препятствий, количество ребер для передачи информационного сообщения, наличие или отсутствие АТС, включение и отключение режима безопасных сообщений. С учетом их происходит процесс запуска и координация перемещения АТС. После предобработки карты получен граф всех возможных путей следования АТС. Вершинами графа карты являются точки начала и конца каждого перекрестка, стоки и истоки, а участки дороги, находящиеся между вершинами, будут являться ребрами графа (рис. 2).



■ **Рис. 1.** Архитектура программного комплекса
 ■ **Fig. 1.** Architecture of the software package



■ **Рис. 2.** Демонстрация работы программного комплекса
 ■ **Fig. 2.** Demonstration of the software package

Каждый такт основного цикла программы — это такт работы ДСС. В работе основного цикла ДСС использует ядро программы, которое, пользуясь различными контроллерами, координирует передвижение, скорость АТС и контролирует состояние сети в целом. При появлении в сети АТС ему назначается маршрут исходя из стока, в который оно направляется. Каждый такт ДСС проверяет, сколько прошло времени с предыдущего такта, и пересчитывает пройденное АТС расстояние с учетом дорожной обстановки и скоростного индекса карты. Контроллер сигналов (см. рис. 1) координирует перемещение сообщений по сети и реагирует на эти сообщения, внося корректировки в маршрутную информацию и скорость передвижения с учетом обеспечения информационной безопасности АТС. Для этого в каждом АТС предусмотрен криптографический модуль. При включенном криптографическом модуле АТС обмениваются секретным ключом при помощи алгоритма Диффи — Хеллмана. Это позволяет обеспечивать безопасность при перехвате сообщений, т. е. АТС-злоумышленник не сможет использовать информацию о возможных препятствиях, и вектор атаки будет гораздо меньше. Для защиты от атаки отказа в обслуживании проводится анализ трафика. При обнаружении подозрительного трафика, исходящего от какого-либо АТС, активный решатель перестает принимать от него сообщения. Для защиты от модификации данных и имитации источника применен алгоритм электронной цифровой подписи. При запуске АТС по умолчанию получает сертификат условного удостоверяющего цен-

тра, АТС-злоумышленник, напротив, данного сертификата не удостоится.

Для анализа результативности работы разработанного комплекса и проверки достижения поставленной цели повышения безопасности при обмене сообщениями об оптимизации маршрута необходимо оценить уровень функциональной безопасности, достигнутый при разработке. Под функциональной безопасностью в данном программном комплексе подразумевается корректное функционирование системы. Например, за счет уменьшения количества принятых сообщений и увеличения истинности информации. Коэффициент, влияющий на безопасность передвижения:

$$K = \frac{S}{t}, \quad (21)$$

где S — расстояние, пройденное АТС; t — время, затраченное на преодоление расстояния S . Для оценки произведенного эффекта сравним два коэффициента — с использованием и без использования безопасных сообщений:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{S}{t_s} \div \frac{S}{t_u} \cdot 100 - 100 = \frac{t_u}{t_s} \cdot 100 - 100,$$

где t_u, t_s — время, затраченное на преодоление расстояния S без использования и с использованием безопасных сообщений соответственно.

На первом этапе оценено время в пути АТС с использованием безопасных сообщений и без них. Следует учитывать, что показатели будут равны, если в системе не будут присутствовать АТС-злоумышленники. Поэтому надо проанализировать программный комплекс, внедрив АТС-злоумышленников, приносящих различные информационные угрозы. Фиксирование показателей времени в пути АТС произведено при различных условиях: на коротких и длинных дистанциях, при большей и меньшей загруженности дороги.

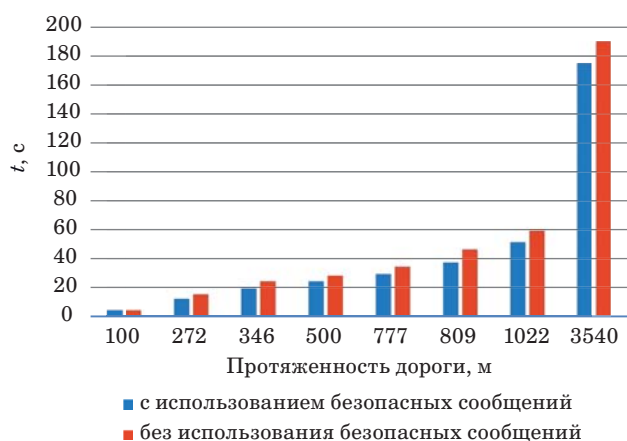
График зависимости времени от протяженности дороги представлен на рис. 3. Данные были получены при неизменной загруженности дороги (табл. 1).

Для оценки загруженности дороги необходимо воспользоваться пространственной характеристикой, определяющей степень стесненности движения, а именно плотность транспортного потока:

$$N_{\text{авт/км}} = \frac{L}{l_d},$$

где

$$l_d = \sum \frac{l_{d_i}}{n}.$$



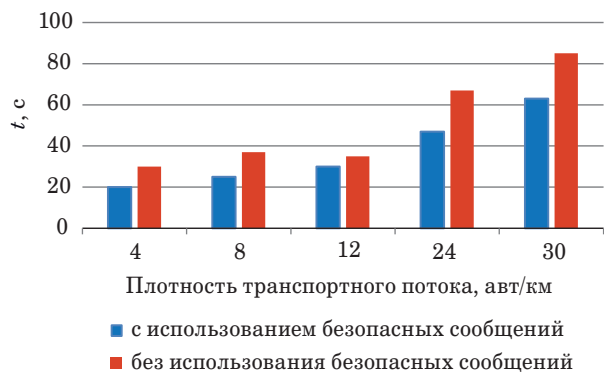
■ **Рис. 3.** Зависимость времени передвижения АТС от протяженности дороги

■ **Fig. 3.** Graph of time dependence on the length of the road

Здесь L — длина оцениваемого участка дороги; $l_{дi}$ — расстояние от начала одного АТС до начала впереди идущего АТС; n — количество участков между двумя АТС на заданной длине дороги.

График зависимости среднего времени в пути от плотности транспортного потока представлен на рис. 4. Данные были получены при направлении АТС по конкретному маршруту следования (табл. 2).

По первой выборке получено, что коэффициент безопасности функционирования (21) увеличился на 13 % при различной протяженности дорог при использовании безопасных сообщений. Вторая выборка показала увеличение коэффициента функциональной безопасности на 37 %, что свидетельствует об эффективности предложенных мер.



■ **Рис. 4.** Зависимость времени передвижения АТС от плотности транспортного потока

■ **Fig. 4.** Graph of time dependence on traffic flow density

■ **Таблица 1.** Зависимость времени в пути от протяженности дорог

■ **Table 1.** Dependence of travel time on the length of roads

Протяженность дороги, м	Время в пути, с	
	с использованием безопасных сообщений	без использования безопасных сообщений
100	5	5
272	13	16
346	20	25
500	25	29
777	30	35
809	38	47
1022	52	60
3540	175	190
Среднеквадратичное отклонение	54,6	58,7

■ **Таблица 2.** Зависимость времени в пути от плотности транспортного потока

■ **Table 2.** Dependence of travel time on the length of roads

Плотность потока, авт/км	Время в пути, с	
	с использованием безопасных сообщений	без использования безопасных сообщений
4	20	30
8	25	37
12	30	35
24	47	67
30	63	85
Среднеквадратичное отклонение	17,73	24

Заключение

В исследовании был разработан и реализован программный комплекс для обеспечения безопасности и оптимизации маршрута передвижения АТС. В ходе работы рассмотрены различные аспекты безопасности, включая криптографическую защиту, анализ трафика и алгоритмы электронной цифровой подписи. Для оценки эффективности предложен коэффициент безопасности, учитывающий расстояние, пройденное АТС, и время, затраченное на преодоление этого расстояния. Сравнение этого коэффициента с использованием защищенных сообщений и без их

использования позволило оценить достижение поставленной цели — повышение безопасности при обмене сообщениями об оптимизации маршрута. К дальнейшему направлению исследования целесообразно отнести усовершенствование криптографических методов, анализа трафика и

системы обнаружения атак для более надежной защиты от различных видов угроз, а также проведение более широкого анализа и тестирования в различных условиях и сценариях функционирования.

Литература

1. Кольшкина Д. В., Дрогачева Я. А., Шевцова А. Г. Обзор программ имитационного моделирования движения транспортных потоков. *Воронежский научно-технический вестник*, 2019, т. 3, № 3(29), с. 111–117. EDN: SBZGHF
2. Zeina A., Qutaiba A. I. Examining the effects of exteroceptive sensors of autonomous vehicles (AV) on CAN bus. *International Journal of Sensors, Wireless Communications and Control*, 2023, vol. 13, no. 4, pp. 270–283. <https://dx.doi.org/10.2174/2210327913666230824145823>
3. Campos-Ferreira A. E., Lozoya-Santos J. d. J., Tudon-Martinez J. C., Mendoza R. A. R., Vargas-Martinez A., Morales-Menendez R., Lozano D. Vehicle and driver monitoring system using on-board and remote sensors. *Sensors*, 2023, no. 2: 814. <https://doi.org/10.3390/s23020814>
4. Song H. M., Kim H. K. Discovering CAN specification using on-board diagnostics. *IEEE Design & Test*, 2021, vol. 38, no. 3, pp. 93–103. doi:10.1109/MDAT.2020.3011036
5. Abhinand K. K., Bavos A., Achankunju T. A., Joseph J., John S., Kumar S. N. *IoT-based driving pattern analysis and engine sensor damage prediction using onboard diagnostics*. Mobile Radio Communications and 5G Networks. Lecture Notes in Networks and Systems. Springer, 2023, vol. 588, pp. 425–432. https://doi.org/10.1007/978-981-19-7982-8_35
6. Kumar R., Jain A. Classification by vehicle OBD data using machine learning. *J Supercomputer*, 2023, vol. 79, pp. 18800–18819. <https://doi.org/10.1007/s11227-023-05364-3>
7. Rimpas D., Papadakis A. Driving events identification and operational parameters correlation based on the analysis of OBD-II timeseries. *Proc. of the 8th Intern. Conf. on Vehicle Technology and Intelligent Transport Systems*, 2022, pp. 257–264. <https://doi.org/10.5220/0011036400003191>
8. Meenakshi, Nandal R., Awasthi N. OBD-II and big data: A powerful combination to solve the issues of automobile care. *Computational Methods and Data Engineering. Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2021, vol. 1257, pp. 172–189. https://doi.org/10.1007/978-981-15-7907-3_14
9. Yang T., Murguia C., Lv C. Risk assessment for connected vehicles under stealthy attacks on vehicle-to-vehicle networks. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2023, pp. 1–12. doi:10.1109/TITS.2023.3292188
10. Redmill K. A., Yurtsever E., Mishalani R. G., Coifman B., McCord M. R. Automated traffic surveillance using existing cameras on transit buses. *Sensors*, 2023, no. 11: 5086. <https://doi.org/10.3390/s23115086>
11. Choudhary A., Mian T., Fatima S., Panigrahi B. K. Deep transfer learning based fault diagnosis of electric vehicle motor. *IEEE Intern. Conf. on Power Electronics, Drives and Energy Systems (PEDES)*, 2022, pp. 1–6. doi:10.1109/PEDES56012.2022.10080274
12. Zhao M., Zhao N. Method for the construction of urban road digital elevation models integrated with semantic information. *Applied Sciences*, 2023, vol. 13, no. 7: 4210. <https://doi.org/10.3390/app13074210>
13. Svaty Z., Vrtal P., Kouhout T., Nouzovsky L. Automated detection and vectorization of road elements in high resolution orthographic images. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 2023, vol. XLVI-II-5/W2-2023, pp. 111–116. <https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLVI-II-5-W2-2023-111-2023>
14. Sharma H., Shrivastava V., Bharti K. K., Wang L. Smart city: Road traffic monitoring system based on the integration of IoT and ML. *Communication and Intelligent Systems*, 2022, vol. 686, pp. 177–189. https://doi.org/10.1007/978-981-99-2100-3_12
15. Zhong W., Du L. Predicting traffic casualties using support vector machines with heuristic algorithms: A study based on collision data of urban roads. *Sustainability*, 2023, vol. 15, no. 4: 2944. <https://doi.org/10.3390/su15042944>
16. Annu P., Rajalakshmi P., Praveen Tammana. Optimizing latency for real-time traffic and road safety applications through MEC-based V2X system. *Intern. Conf. on Smart Applications, Communications and Networking (SmartNets)*, Istanbul, Turkiye, 2023, pp. 1–8. doi:10.1109/SmartNets58706.2023.10215515
17. Nafi N. S., Khan R. H., Khan J. Y., Gregory M. A predictive road traffic management system based on vehicular ad-hoc network. *Australasian Telecommunication Networks and Applications Conference (ATNAC)*, Southbank, VIC, Australia, 2014, pp. 135–140. doi:10.1109/ATNAC.2014.7020887
18. Fatkiewa R. R. Application of attack graphs to simulate the violation of the movement of vehicles in the convoy. *XXVI Intern. Conf. on Soft Computing and Measurements (SCM)*, Saint-Petersburg, Russian Federation, 2023, pp. 248–251. doi:10.1109/SCM58628.2023.10159111
19. Kong H. K., Hong M. K., Kim T. S. Security risk assessment framework for smart car using the attack

tree analysis. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 2018, vol. 9, pp. 531–551. <https://doi.org/10.1007/s12652-016-0442-8>

20. Wang Y., Huang A., Yang F., Bian N., Zhang J., Guo L. Systematic assessment of cyber-physical security of lane keeping control system for autonomous vehicles. *Security and Safety*, 2023, vol. 2, 2023027, pp. 6. <https://doi.org/10.1051/sands/2023027>

21. Fatkueva R. R., Korytov P. V. Assessment of applicability of discrete situational networks for information transmission in intelligent transport networks. *Automatic Documentation and Mathematical Linguistics*, 2022, vol. 56, pp. 70–75. <https://doi.org/10.3103/S0005105522020029>

UDC 656.021, 004.75

doi:10.31799/1684-8853-2023-6-46-56

EDN: QFOYCC

Secure data transmission method for the movement of autonomous vehicles

R. R. Fatkueva^a, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0003-4065-9611, rikki2@yandex.ru

^aSaint-Petersburg Electrotechnical University «LETI», 5, Prof. Popov St., 197376, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Current vehicle monitoring and management systems, as well as methods for route optimization do not permit modeling cyberattacks on the transportation infrastructure nor assessing the disruption of traffic flow. **Purpose:** To develop a method for transmitting information messages using a discrete situational network device to improve the safety of autonomous vehicles. **Results:** We develop models of route construction and autonomous vehicle movement. Compared with traditional algorithms for finding the shortest paths, the route optimization for autonomous vehicles is carried out dynamically by evaluating the characteristics of the segment of the path encountered on the route and the time it takes to reach the destination. This is ensured by the proposed method of transmitting information messages in a discrete situational network, where the correction of route information is carried out on the basis of active and passive solvers accompanied by the formation of information messages about the disruptions of the current traffic situation as well as control messages for changing the route of movement. To improve the security of the transmission of information messages, we develop algorithms that ensure the confidentiality and reliability of the transmitted messages. **Practical relevance:** The results of the study can be used in the design and construction of control systems for autonomous vehicles, as well as for modeling their movement under the conditions of cyberattacks. Owing to the possibility of software implementation of the algorithm to ensure the reliability of transmitted messages, a practical result of protection against denial-of-service attacks is achieved.

Keywords – discrete situational network, decentralized network, cyberattack, functional security, route optimization, Dijkstra algorithm.

For citation: Fatkueva R. R. Secure data transmission method for the movement of autonomous vehicles. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 46–56 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-46-56, EDN: QFOYCC

References

- Kolyshkina D. V., Drogacheva Y. A., Shevtsova A. G. Overview of traffic flow simulation programs. *Voronezh Scientific and Technical Journal*, 2019, vol. 3, no. 3(29), pp. 111–117 (In Russian). EDN: SBZGHH
- Zeina A., Qutaiba A. I. Examining the effects of exteroceptive sensors of autonomous vehicles (AV) on CAN bus. *International Journal of Sensors, Wireless Communications and Control*, 2023, vol. 13, no. 4, pp. 270–283. <https://dx.doi.org/10.2174/2210327913666230824145823>
- Campos-Ferreira A. E., Lozoya-Santos J. d. J., Tudon-Martinez J. C., Mendoza R. A. R., Vargas-Martinez A., Morales-Menendez R., Lozano D. Vehicle and driver monitoring system using on-board and remote sensors. *Sensors*, 2023, no. 2: 814. <https://doi.org/10.3390/s23020814>
- Song H. M., Kim H. K. Discovering CAN specification using on-board diagnostics. *IEEE Design & Test*, 2021, vol. 38, no. 3, pp. 93–103. doi:10.1109/MDAT.2020.3011036
- Abhinand K. K., Bavos A., Achankunju T. A., Joseph J., John S., Kumar S. N. *IoT-based driving pattern analysis and engine sensor damage prediction using onboard diagnostics*. In: *Mobile Radio Communications and 5G Networks. Lecture Notes in Networks and Systems*. Springer, 2023, vol. 588, pp. 425–432. https://doi.org/10.1007/978-981-19-7982-8_35
- Kumar R., Jain A. Classification by vehicle OBD data using machine learning. *J Supercomputer*, 2023, vol. 79, pp. 18800–18819. <https://doi.org/10.1007/s11227-023-05364-3>
- Rimpas D., Papadakis A. Driving events identification and operational parameters correlation based on the analysis of OBD-II timeseries. *Proc. of the 8th Intern. Conf. on Vehicle Technology and Intelligent Transport Systems*, 2022, pp. 257–264. <https://doi.org/10.5220/0011036400003191>
- Meenakshi, Nandal R., Awasthi N. OBD-II and big data: A powerful combination to solve the issues of automobile care. *Computational Methods and Data Engineering. Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2021, vol. 1257, pp. 172–189. https://doi.org/10.1007/978-981-15-7907-3_14
- Yang T., Murguia C., Lv C. Risk assessment for connected vehicles under stealthy attacks on vehicle-to-vehicle networks. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2023, pp. 1–12. doi:10.1109/TITS.2023.3292188
- Redmill K. A., Yurtsever E., Mishalani R. G., Coifman B., McCord M. R. Automated traffic surveillance using existing cameras on transit buses. *Sensors*, 2023, no. 11: 5086. <https://doi.org/10.3390/s23115086>
- Choudhary A., Mian T., Fatima S., Panigrahi B. K. Deep transfer learning based fault diagnosis of electric vehicle motor. *IEEE Intern. Conf. on Power Electronics, Drives and Energy Systems (PEDES)*, 2022, pp. 1–6. doi:10.1109/PEDES56012.2022.10080274
- Zhao M., Zhao N. Method for the construction of urban road digital elevation models integrated with semantic information. *Applied Sciences*, 2023, vol. 13, no. 7: 4210. <https://doi.org/10.3390/app13074210>
- Svaty Z., Vrtal P., Kouhout T., Nouzovsky L. Automated detection and vectorization of road elements in high resolution orthographic images. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 2023, vol. XLVIII-5/W2-2023, pp. 111–116. <https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLVIII-5-W2-2023-111-2023>
- Sharma H., Shrivastava V., Bharti K. K., Wang L. Smart city: Road traffic monitoring system based on the integration of IoT and ML. *Communication and Intelligent Systems*, 2022, vol. 686, pp. 177–189. https://doi.org/10.1007/978-981-99-2100-3_12
- Zhong W., Du L. Predicting traffic casualties using support vector machines with heuristic algorithms: A study based on

- collision data of urban roads. *Sustainability*, 2023, vol. 15, no. 4: 2944. <https://doi.org/10.3390/su15042944>
16. Annu P., Rajalakshmi P., Praveen Tammana. Optimizing latency for real-time traffic and road safety applications through MEC-based V2X system. *Intern. Conf. on Smart Applications, Communications and Networking (SmartNets)*, Istanbul, Turkiye, 2023, pp. 1–8. doi:10.1109/SmartNets58706.2023.10215515
 17. Nafi N. S., Khan R. H., Khan J. Y., Gregory M. A predictive road traffic management system based on vehicular ad-hoc network. *Australasian Telecommunication Networks and Applications Conference (ATNAC)*, Southbank, VIC, Australia, 2014, pp. 135–140. doi:10.1109/ATNAC.2014.7020887
 18. Fatkiewa R. R. Application of attack graphs to simulate the violation of the movement of vehicles in the convoy. *XXVI Intern. Conf. on Soft Computing and Measurements (SCM)*, Saint-Petersburg, Russian Federation, 2023, pp. 248–251. doi:10.1109/SCM58628.2023.10159111
 19. Kong H. K., Hong M. K., Kim T. S. Security risk assessment framework for smart car using the attack tree analysis. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 2018, vol. 9, pp. 531–551. <https://doi.org/10.1007/s12652-016-0442-8>
 20. Wang Y., Huang A., Yang F., Bian N., Zhang J., Guo L. Systematic assessment of cyber-physical security of lane keeping control system for autonomous vehicles. *Security and Safety*, 2023, vol. 2, 2023027, pp. 6. <https://doi.org/10.1051/sands/2023027>
 21. Fatkiewa R. R., Korytov P. V. Assessment of applicability of discrete situational networks for information transmission in intelligent transport networks. *Automatic Documentation and Mathematical Linguistics*, 2022, vol. 56, pp. 70–75. <https://doi.org/10.3103/S0005105522020029>
-
-

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научная электронная библиотека (НЭБ) продолжает работу по реализации проекта SCIENCE INDEX. После того как Вы регистрируетесь на сайте НЭБ (<http://elibrary.ru/defaultx.asp>), будет создана Ваша личная страничка, содержание которой составят не только Ваши персональные данные, но и перечень всех Ваших печатных трудов, имеющихся в базе данных НЭБ, включая диссертации, патенты и тезисы к конференциям, а также сравнительные индексы цитирования: РИНЦ (Российский индекс научного цитирования), h (индекс Хирша) от Web of Science и h от Scopus. После создания базового варианта Вашей персональной страницы Вы получите код доступа, который позволит Вам редактировать информацию, помогая создавать максимально объективную картину Вашей научной активности и цитирования Ваших трудов.



Достаточные условия устойчивости локально допустимой динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления

А. А. Ефремов^а, канд. физ.-мат. наук, доцент, orcid.org/0000-0002-0224-2412

В. Н. Козлов^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-1552-8097, kozlov_vn@spbstu.ru

^аСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251, РФ

Введение: синтез систем стабилизации программных движений объектов является актуальной задачей теории управления. Проекционно-операторные методы математического программирования служат адекватными методами синтеза управлений для указанного класса задач. **Цель:** развитие методов синтеза локально допустимых управлений для стабилизации программных движений линейных и нелинейных динамических объектов с ограничениями. **Результаты:** линейный стационарный объект управления задан в виде разностного, управляемого по Р. Калману, оператора. Для указанного объекта управления выполнены преобразования проекционного оператора решения задач стабилизации программных движений с ограничениями и синтезированы уравнения переходных и стационарного состояний исследуемой системы. Условие сжатия получено из оценки нормы отклонения фазовых координат системы от стационарного состояния. На основе принципа сжимающих отображений получено достаточное условие устойчивости проекционно-операторной динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления. Вывод достаточного условия устойчивости позволил определить параметр проекционно-операторной обратной связи и обеспечить устойчивость проекционного оператора динамической системы, полученного ранее. В качестве объекта управления для вычислительного эксперимента использована векторно-матричная модель синхронного генератора в форме Коши. Вычислительный эксперимент подтвердил теоретические результаты, полученные в работе. **Практическая значимость:** выполнение условия неравенства для определения параметра обратной связи гарантирует устойчивость исследуемой в работе проекционно-операторной динамической системы.

Ключевые слова — достаточные условия устойчивости, динамические системы, проекционные операторы, оптимизация, стабилизация программных движений, локально допустимые управления, ограничения на фазовые координаты и управления, синхронный генератор, математическая модель, SimInTech.

Для цитирования: Ефремов А. А., Козлов В. Н. Достаточные условия устойчивости локально допустимой динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 6, с. 57–65. doi:10.31799/1684-8853-2023-6-57-65, EDN: UFBFDT

For citation: Efremov A. A., Kozlov V. N. Sufficient conditions for the stability of a locally admissible dynamic system with constraints on phase coordinates and controls. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 57–65 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-57-65, EDN: UFBFDT

Введение

Актуальность задач стабилизации программных движений динамических объектов подтверждена большим количеством публикаций. Например, в работе [1] решается задача посадки летательного аппарата без шасси на подвижную платформу. В [2] осуществляется координация движений модулей механизмов относительного манипулирования с тремя степенями свободы. В работе [3] исследуется развитие алгоритма построения уравнений движения материальной системы по заданной программе. В [4] решается задача синтеза программных движений квадрокоптера с тросовой подвеской переменной длины для транспортировки грузов. В работе [5] приведены результаты вычислительного эксперимента по стабилизации программных движений электроэнергетической системы. Многообразие методов,

применяемых для решения задач программных движений, представлено в работах [6–14].

Исследование устойчивости динамических систем, рассмотренных в качестве примера выше, как правило, связано с построением функции Ляпунова [15–19] и требует дополнительного анализа. В данной статье предлагается вывод достаточного условия устойчивости проекционно-операторной динамической системы, синтезированной в работе [5], на основе принципа сжимающих отображений [20].

Оператор решения задач стабилизации программных движений линейного объекта с ограничениями

Ранее авторами синтезирован проекционный оператор динамической системы для задач ста-

билизации программных движений линейного объекта с ограничениями на векторы фазовых координат и управлений [5].

Пусть линейный стационарный управляемый по Р. Калману объект управления определен разностным оператором

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{F}\mathbf{u}_k; \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{c}_y \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ – область притяжения. Векторы и матрицы разностного оператора (1) имеют вид $\mathbf{x}_{k+1} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^l$, $\mathbf{c}_y \in \mathbf{R}^{l \times n}$; $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ – линейный матричный оператор размера $n \times n$.

Задача вычисления локально допустимых управлений имеет вид: вычислить вектор состояний-управлений

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^* \\ \mathbf{u}_k^* \end{bmatrix} = \\ &= \arg \min \left\{ \varphi(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}_k\|^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{z}_k = [\mathbf{E} \mid -\mathbf{F}] \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k; \\ [\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k]^T \times [\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k] &\leq r^2 \in \mathbf{R}^{n+m}, k \in \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{C}_k = [\mathbf{C}_{xk} \mid \mathbf{C}_{uk}]^T$ – вектор допустимых программных движений координат-управлений линейного объекта.

Оператор динамической системы с проекционно-операторной обратной связью для задач стабилизации программных движений линейного объекта с ограничениями на векторы фазовых координат и управлений имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \hat{\mathbf{z}}_k(\mathbf{x}_k, \sigma_1, \sigma_2, \theta); \\ \hat{\mathbf{z}}_k(\mathbf{x}_k, \sigma_1, \sigma_2, \theta) &= \\ &= \left[\theta \left(\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \sigma_1 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k \right) + (1-\theta) \left(\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \sigma_2 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k \right) \right], \\ \theta &\in [0; 1] \subset \mathbf{R}; \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{c}_y \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma \in \mathbf{R}$ – параметр проекционно-операторной обратной связи; \mathbf{P}^0 и \mathbf{P}^+ – проекционные операторы; $\sigma_1 = 1 - \sqrt{\alpha/g}$, $\sigma_2 = 1 + \sqrt{\alpha/g}$, $\alpha_k = \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k + r^2$, $g = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}$; θ – параметр «допустимости»; \mathbf{c}_y – матрица связи между выходными координатами \mathbf{y}_k и координатами состояния \mathbf{x}_k .

Достаточные условия устойчивости системы с ограничениями на векторы фазовых координат и управлений

Для формулировки достаточных условий устойчивости динамической системы (3) использован принцип сжимающих отображений [20]. Указанный принцип использует понятие неподвижной точки оператора \mathbf{x}_* , удовлетворяющей условию $\mathbf{x}_* = \mathbf{A}(\mathbf{x}_*)$.

Единственная неподвижная точка сжимающего оператора в соответствии с теоремой С. Банаха является пределом последовательности приближений, определенной равенством [20]

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_k), k = 1, 2, \dots$$

Уравнение динамической системы с проекционно-операторной динамической обратной связью (3) определено уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \times \\ &\times \left[\theta \left(\mathbf{P}^+ \mathbf{H}\mathbf{x}_k + (1 - \sqrt{\alpha/g}) \mathbf{P}^0 \mathbf{C} \right) + \right. \\ &\left. + (1-\theta) \left(\mathbf{P}^+ \mathbf{H}\mathbf{x}_k + (1 + \sqrt{\alpha(\mathbf{x}_k)/g}) \mathbf{P}^0 \mathbf{C} \right) \right]. \end{aligned}$$

В результате преобразований уравнения переходных и стационарного состояний примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \times \left[\mathbf{P}^+ \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + \right. \\ &\left. + (1-2\theta) \alpha (x_k)^{1/2} \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k / \|\mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k\|_2 \right]; \\ \mathbf{x}_* &= \mathbf{H}\mathbf{x}_* + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \times \left[\mathbf{P}^+ \mathbf{H}\mathbf{x}_* + \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + \right. \\ &\left. + (1-2\theta) \alpha (x_*)^{1/2} \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k / \|\mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k\|_2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Отклонения координат от стационарного состояния определяются разностью уравнений переходного и стационарного состояний системы

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_* &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*) + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \times \\ &\times \left[\mathbf{P}^+ \mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*) + (1-2\theta) \times \right. \\ &\left. \times \left(\alpha (\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha (\mathbf{x}_*)^{1/2} \right) \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k / \|\mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k\|_2 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычисление евклидовых норм правой и левой частей равенства с последующей оценкой нормы правой части уравнения приводит к неравенству вида

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_*\|_2 &\leq \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2 + \\ &+ |\gamma| \times \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ |1 - 2\theta| \times \left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2. \quad (6)$$

Далее выполним оценку нормы разности радикалов правой части неравенства (6)

Лемма 1. Имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2 &\leq L_{1/2} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2 \leq \\ &\leq L_{1/2} L_\alpha \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2, \end{aligned}$$

где постоянные Липшица имеют вид

$$\begin{aligned} L_{1/2} &= 1, \\ L_\alpha &= 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2 - 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2^2 \times \\ &\times \left\| \mathbf{H} \right\|_2^2 \times (r + \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2). \end{aligned}$$

Доказательство: Оценка модуля разности двух радикалов выполнена в [21] и имеет вид

$$\left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2 \leq L_{1/2} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2, \quad (7)$$

где $L_{1/2} = 1$ – постоянная Липшица для функции разности «квадратных корней».

Рассмотрим норму разности, стоящую в правой части неравенства (7). Запишем функции $\alpha(\mathbf{x}_k)$ и $\alpha(\mathbf{x}_*)$ в явном виде:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) + \\ &+ \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k + r^2; \\ \alpha(\mathbf{x}_*) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}_*)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}(\mathbf{x}_*)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_*) + \\ &+ \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_*) + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k + r^2. \end{aligned}$$

Подстановка $\alpha(\mathbf{x}_k)$ и $\alpha(\mathbf{x}_*)$ в норму правой части неравенства (7) определяет равенство

$$\begin{aligned} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2 &= \left\| \mathbf{b}(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \right. \\ &- \mathbf{b}(\mathbf{x}_*)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) + \\ &+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_*)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_*) + \\ &+ \left. \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_*) \right\|_2. \quad (8) \end{aligned}$$

После преобразований оценка нормы разности правой части неравенства (7) примет вид

$$\left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2 \leq 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2 \times$$

$$\times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2 - \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2^2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2^2 \times \left\| \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_* \right\|_2 \times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2.$$

Оценку нормы суммы фазовых координат в правой части неравенства с учетом условий задачи проекционной операторной оптимизации $\left\| \mathbf{x}_k \right\|_2 \leq r + \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2$ и $\left\| \mathbf{x}_* \right\|_2 \leq r + \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2$ [5] можно записать в виде

$$\left\| \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_* \right\|_2 \leq \left\| \mathbf{x}_k \right\|_2 + \left\| \mathbf{x}_* \right\|_2 \leq 2r + 2 \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2. \quad (9)$$

С учетом (9) искомая оценка нормы разности двух радикалов примет вид

$$\left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2 \leq L_\alpha \times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2,$$

где

$$L_\alpha = 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2 - 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2^2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2^2 \times (r + \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2).$$

После подстановки полученной оценки в (7) получим

$$\begin{aligned} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2 &\leq \\ &\leq L_{1/2} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2 \leq L_{1/2} L_\alpha \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2, \end{aligned}$$

где $L_{1/2} = 1$, $L_\alpha = 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2 - 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2^2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2^2 \times (r + \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2)$ – постоянные Липшица для функции «квадратного корня» и проекционного оператора.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Справедлив следующий результат:

$$\left\| \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_* \right\|_2 \leq \alpha_P \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2, \quad (10)$$

где

$$\alpha_P = \left\| \mathbf{H} \right\|_2 + |\gamma| \times \left\| \mathbf{F} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{T}_u \right\|_2 \times \left\langle \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right\rangle$$

– коэффициент сжатия.

Доказательство: В силу неравенства (7) и результатов леммы 1 справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_* \right\|_2 &\leq \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2 + |\gamma| \times \left\| \mathbf{F} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{T}_u \right\|_2 \times \\ &\times \left\langle \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2 + |1 - 2\theta| \times \right. \\ &\times \left. \left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2 \right\rangle \leq \left(\left\| \mathbf{H} \right\|_2 + |\gamma| \times \left\| \mathbf{F} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{T}_u \right\|_2 \times \right. \\ &\times \left. \left\langle \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right\rangle \right) \times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2. \end{aligned}$$

Полученные выше оценки норм разностей вида $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|_2$ и $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_2$ определяют достаточное условие сжатия в виде

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \alpha_P \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_2,$$

где коэффициент сжатия определен равенством

$$\alpha_P = \|\mathbf{H}\|_2 + |\gamma| \times \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right\rangle.$$

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует условие сжатия для оператора динамической системы (3). По определению сжимающего оператора [20], коэффициент сжатия должен быть меньше единицы:

$$\alpha_P = \|\mathbf{H}\|_2 + |\gamma| \times \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right\rangle < 1. \quad (11)$$

Тогда, при выполнении условия (11), условие устойчивости примет вид

$$|\gamma| < \left(\|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right\rangle \right)^{-1} (1 - \|\mathbf{H}\|_2). \quad (12)$$

Условие (12) является достаточным условием устойчивости оператора (3).

Вычислительный эксперимент

Далее продемонстрированы результаты решения задачи стабилизации программных движений синхронного генератора с допустимыми ограничениями на частоту ω , напряжение обмотки возбуждения u_f и механический момент M_{mx} . Указанные ограничения заданы обобщенным вектором программных движений

$$\mathbf{C}_k = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1,002 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0,5 \ 0 \ 0 \ 0,035 \ 0]^T \in \mathbf{R}^{14}.$$

Для вычислительного эксперимента выбрана математическая модель турбогенератора ТВВ-200-2 с техническими характеристиками, описанными в [22], представленная в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} i'_d \\ i'_q \\ i'_f \\ i'_{rd} \\ i'_{rq} \\ \omega' \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,07 & 11,72\omega & -0,1 & -2 & -5,56\omega & 0 & 0 \\ -7,46\omega & -2,59 & 3,54\omega & 3,54\omega & -4,74 & 0 & 0 \\ -0,99 & 2,85\omega & -2,32 & 5,77 & -1,34\omega & 0 & 0 \\ -6,87 & 19,78\omega & 2,1 & -10 & -9,37\omega & 0 & 0 \\ -13,63\omega & -4,73 & 6,46\omega & 6,46\omega & -10 & 0 & 0 \\ 79,9i_q & -79,9i_d & -37,8i_q & -37,8i_q & 37,8i_d & -3,78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_{rd} \\ i_{rq} \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5,56 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3,54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,35 & 0 & 2,32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9,37 & 0 & -2,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6,46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_f \\ 0 \\ 0 \\ M_{mx} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Дискретизация векторно-матричной модели (13) осуществлена разностными операторами, соответствующими неявному методу Эйлера [23], реализованными в среде SimInTech (<https://simintech.ru/>).

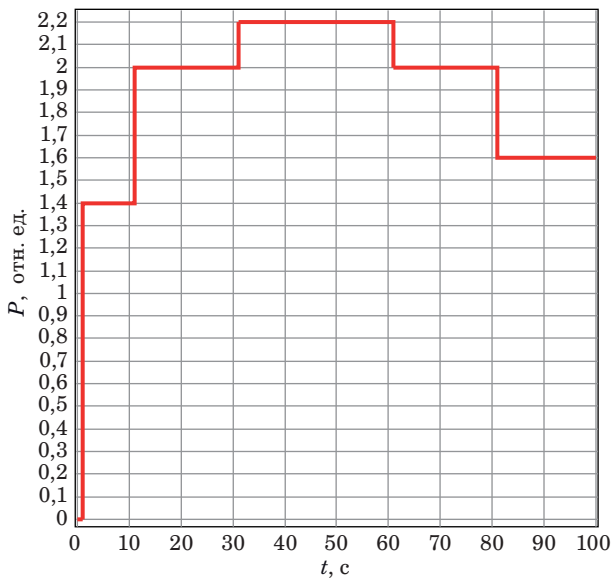
Упрощенная математическая модель нагрузки имеет вид [24]

$$u_d(t) = \frac{i_d(t)P_{act}(t) + i_q(t)P_{react}(t)}{i_d^2(t) + i_q^2(t)};$$

$$u_q(t) = \frac{i_d(t)P_{act}(t) - i_q(t)P_{react}(t)}{i_d^2(t) + i_q^2(t)}.$$

Параметры динамической системы (3) $\theta = 0,5017$ и $r = 1$ подобраны экспериментально.

Изменение мощности синхронного генератора задано кусочно-постоянной функцией и показано на рис. 1.



■ **Рис. 1.** Мощность синхронного генератора, заданная в виде кусочно-постоянной функции

■ **Fig. 1.** Synchronous generator power, specified as a piecewise constant function

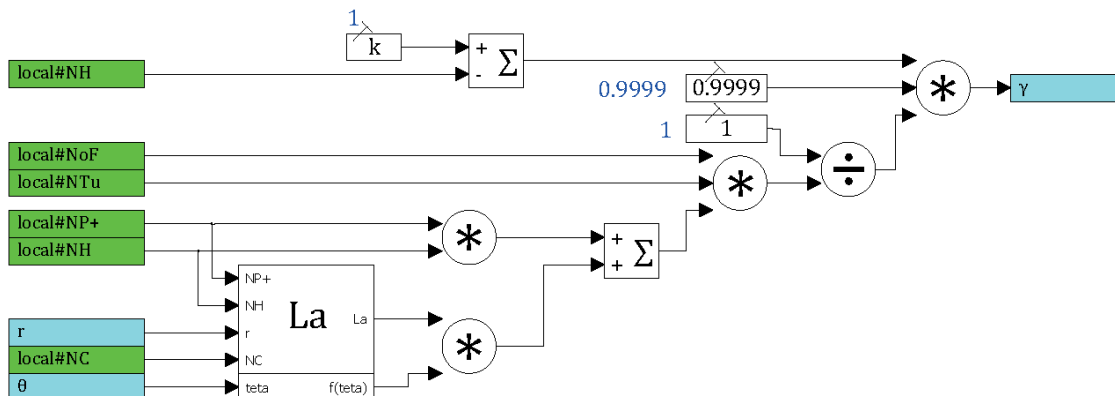
Схема, реализующая вычисление параметра обратной связи γ , приведена на рис. 2. Для обеспечения устойчивости динамической системы (3) достаточно выполнения неравенства (12), ограничивающего параметр проекционно-операторной обратной связи. Для выполнения неравенства (12) параметр γ можно умножить на константу, равную 0,9999. При нарушении условия (12), например, при умножении вычисленного параметра обратной связи γ на константу 1,25, происходит быстрый рост значений фазовых координат динамической системы.

С учетом изменения мощности синхронного генератора динамика параметра проекционно-операторной обратной связи γ для системы (13) иллюстрируется на рис. 3.

На основе данных рис. 1 и 3 можно сделать следующий вывод: кусочно-постоянное изменение нагрузки (см. рис. 2) приводит к соответствующему кусочно-постоянному изменению амплитуды параметра проекционно-операторной обратной связи γ (см. рис. 3). Указанное соответствие графика нагрузки также имеет место для фазовых координат и управлений исследуемой динамической системы. Объяснение сущности физических процессов, происходящих в синхронных генераторах, приведено, например, в работе [25].

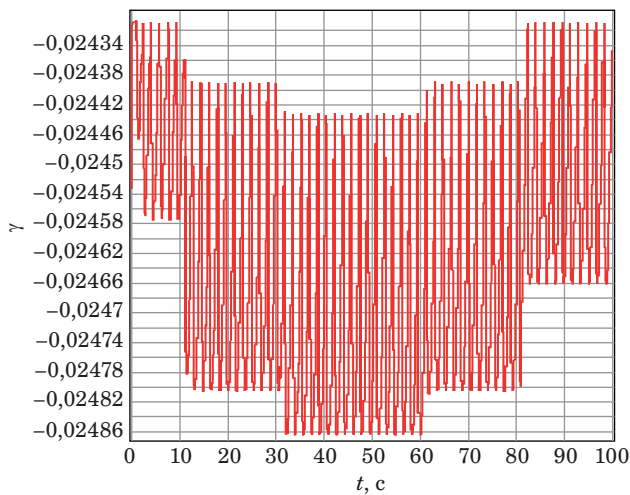
Ограниченные вектором допустимых программных управлений S_{uk} локально допустимые управляющие воздействия u_f и M_{mx} с учетом изменения нагрузки (см. рис. 1) и динамики параметра проекционно-операторной обратной связи γ (см. рис. 3) имеют вид, показанный на рис. 4.

Динамика токов синхронного генератора показана на рис. 5. Временная зависимость программно-ограниченной «частоты» синхронного генератора, учитывающая изменение мощности (см. рис. 1) и параметр обратной связи γ , изображена на рис. 6.



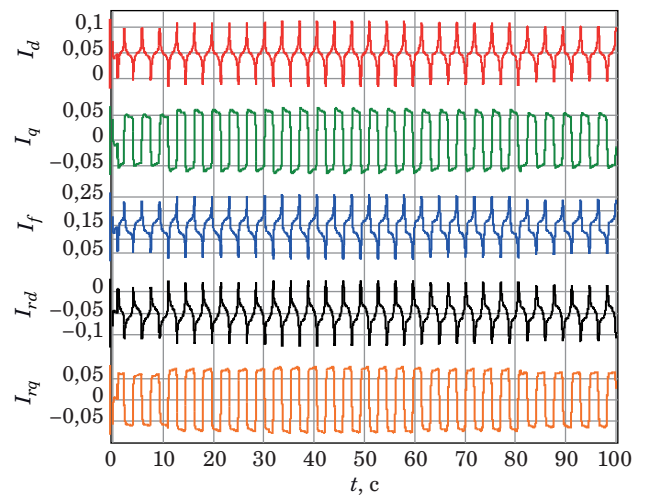
■ **Рис. 2.** Схема вычисления параметра обратной связи γ в SimInTech

■ **Fig. 2.** Scheme for calculating the feedback parameter γ in SimInTech



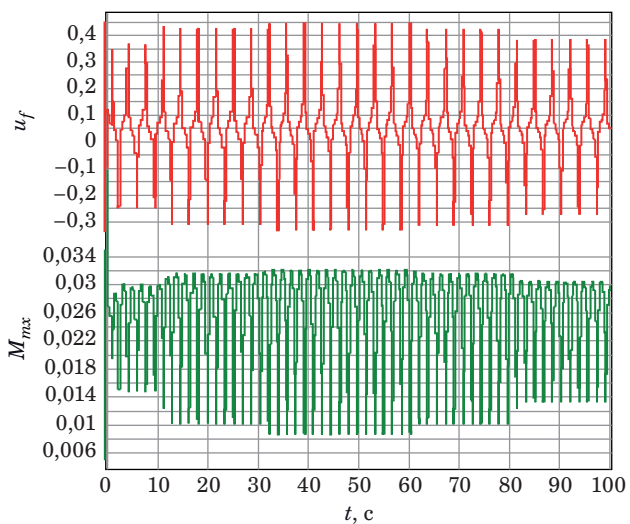
■ **Рис. 3.** Динамика параметра проекционно-операторной обратной связи γ

■ **Fig. 3.** Dynamics of the projection-operator feedback parameter γ



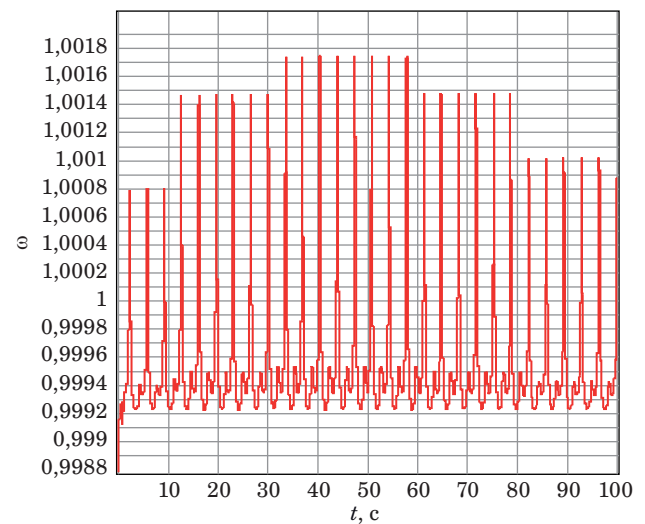
■ **Рис. 5.** Динамика токов синхронного генератора

■ **Fig. 5.** Dynamics of synchronous generator currents



■ **Рис. 4.** Графики ограниченных управлений u_f и M_{mx}

■ **Fig. 4.** Graphs of limited controls u_f and M_{mx}



■ **Рис. 6.** Временная зависимость программно-ограниченной «частоты» ω синхронного генератора

■ **Fig. 6.** Time dependence of the software-limited "frequency" ω of a synchronous generator

Из рис. 4 и 6 видно, что при изменении мощности (см. рис. 1) значения синтезированных управляющих воздействий u_f и M_{mx} , а также стабилизируемой фазовой координаты ω не превышают ограничений, заданных вектором допустимых программных движений S_k .

Выводы

Синтезировано достаточное условие устойчивости динамической системы (3) и определен параметр проекционно-операторной обратной связи, уточняющий результаты, полученные в работе [5].

Вычислительные эксперименты подтвердили достаточность синтезированного условия устойчивости исследуемой динамической системы.

Литература

1. Мещанов А. С., Бикмурзин А. М. Стабилизация программной посадки летательных аппаратов без шасси на подвижную платформу в атмосфере при неопределенных возмущения. Ч. 1. *Вестник технологического университета*, 2020, т. 23, № 12, с. 109–117. EDN: KOZLIY

2. Воробьев Е. И., Михеев А. В., Моргуненко К. О. Построение программных движений механизмов относительного манипулирования с тремя степенями свободы. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2019, № 6, с. 42–48. doi:10.1134/S0235711919060105/issn0235-7119
3. Alekseev A., Stukonog S. An algorithm for constructing an optimal ship's path with elements of the ship's program motion systems on the course. *Transp. Bus. Russ.*, 2022, no. 2, pp. 217–221. doi:10.52375/20728689_2022_2_217/issn2072-8689
4. Yu H., Liang X., Han J., Fang Y. Adaptive trajectory tracking control for the quadrotor aerial transportation system landing a payload onto the mobile platform. *IEEE Trans. Ind. Informatics*, 2023, pp. 1–12. doi:10.1109/TII.2023.3256374
5. Ефремов А. А., Козлов В. Н. Метод синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 4, с. 47–55. doi:10.31799/1684-8853-2023-4-47-55, EDN: DYULZH
6. Sachan K., Padhi R. Lyapunov function based output-constrained control of nonlinear Euler – Lagrange systems. *15th Intern. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, IEEE, Singapore, 2018, 18–21 Nov., 2018, pp. 686–691. doi:10.1109/ICARCV.2018.8581068
7. Wang X., Xu J., Lv M., Zhang L., Zhao Z. Barrier Lyapunov function-based fixed-time FTC for high-order nonlinear systems with predefined tracking accuracy. *Nonlinear Dyn.*, 2022, vol. 110, no. 1, pp. 381–394. doi:10.1007/s11071-022-07627-9/issn0924-090X
8. Голубев А. Е. Стабилизация программных движений механических систем с учетом ограничений. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2023, № 4, с. 153–167. doi:10.31857/S0002338823040054
9. Kozlov V. N., Efremov A. A. *Operators of bounded locally optimal controls for dynamic systems*. Lect. Notes Networks Syst. Springer, 2020, vol. 95, pp. 140–145. doi:10.1007/978-3-030-34983-7_14
10. Kozlov V. N., Efremov A. A. Projection-operator optimization of controls of dynamic objects. *J. Phys. Conf. Ser. IOP Publishing Ltd*, 2021, vol. 1864, no. 1, pp. 140–145. doi:10.1088/1742-6596/1864/1/012076/issn17426596
11. Александров О. В., Козик А. А. Минимаксная оптимизация параметров стабилизации программного полета. *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика*, 2019, т. 3, с. 45–49.
12. Котина Е. Д., Овсянников Д. А. Математическая модель совместной оптимизации программного и возмущенных движений в дискретных системах. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2021, т. 17, № 2, с. 213–224. doi:10.21638/11701/spbu10.2021.210
13. Голубев А. Е. Построение программных движений механических систем с учетом ограничений при помощи многочленов третьего порядка. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2021, № 2, с. 126–137. doi:10.31857/S0002338820060049/issn0002-3388
14. Andreev A. S., Kolegova L. V. PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic manipulators' desired motions. *Zhurnal Sredn. Mat. Obs.*, 2022, vol. 34, no. 3, pp. 267–279. doi:10.15507/2079-6900.24.202203.267-279/issn20796900
15. Иртегов В. Д., Титоренко Т. Н. Об одном подходе к качественному исследованию нелинейных динамических систем. *Сибирский журнал вычислительной математики*, 2022, № 1, с. 59–75. doi:10.15372/SJNM20220105/issn1560-7526
16. Yu M., Li J., Zhang S. Probabilistic stability of small disturbance in wind power system based on a variational Bayes and Lyapunov theory using PMU data. *IET Gener. Transm. Distrib.*, 2022. vol. 16, no. 23, pp. 4818–4829. doi: 10.1049/gtd2.12648/issn1751-8687
17. Efremov A. A., Karakchieva V. V., Kozlov V. N. Stability analysis of dynamical systems based on Lyapunov vector functions. *Intern. Conf. "System Analysis in Engineering and Control"*, 2022, pp. 177–186. doi:10.1007/978-3-030-98832-6_16
18. Schiller J. D., Muntwiler S., Kohler J., Zeilinger M. N., Muller M. A. A Lyapunov function for robust stability of moving horizon estimation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2023, pp. 1–16. doi:10.1109/TAC.2023.3280344. <https://ieeexplore.ieee.org/document/10136787> (дата обращения: 15.06.2023).
19. Barroso N. F., Ushirobira R., Efimov D. Control Lyapunov function method for robust stabilization of multistable affine nonlinear systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2023, vol. 33, no. 11, pp. 6354–6370. doi:10.1002/rnc.6700/issn1049-8923
20. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. 7-е изд. М., Физматлит, 2019. 572 с.
21. Козлов В. Н. *Проекционный метод синтеза ограниченных оптимальных управлений динамических систем энергетики*. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. 161 с. doi:10.18720/SPBPU/2/i19-277
22. Неклепаев Б. Н. *Электрическая часть электростанций и подстанций*. 2-е изд. М., Энергоатомиздат, 1986. 640 с.
23. Скворцов Л. М. *Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений*. М., ДМК Пресс, 2023. 236 с.
24. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Андриевский Б. Р., Юлдашев М. В., Юлдашев Р. В. Математическое моделирование переходных процессов гидроагрегата Саяно-Шушенской ГЭС. *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2018, т. 4, с. 80–105. doi:10.7868/s0869565216060086/issn0869-5652. https://diffjournal.spbu.ru/pdf/kuznetsov_5.pdf (дата обращения: 15.05.2023).
25. Веников В. А., Иванов-Смоленский А. В. *Физическое моделирование электрических систем*. Москва; Ленинград, Госэнергоиздат, 1956. 359 с.

UDC 681.51

doi:10.31799/1684-8853-2023-6-57-65

EDN: UFBFDT

Sufficient conditions for the stability of a locally admissible dynamic system with constraints on phase coordinates and controlsA. A. Efremov^a, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-0224-2412V. N. Kozlov^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0003-1552-8097, kozlov_vn@spbstu.ru^aPeter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, Politekhnicheskaya St., 195251, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The synthesis of systems for the stabilization of program motions of objects is an urgent task of control theory. Projection operator methods of mathematical programming are adequate methods of control synthesis for this class of problems. **Purpose:** To develop the methods for synthesizing locally admissible controls for stabilizing programmed motions of linear and nonlinear dynamic objects with restrictions. **Results:** The linear stationary control object is specified in the form of a difference operator controlled according to Kalman criterion. For the specified control object, transformations of the projection operator for solving problems of stabilization of program movements with restrictions have been carried out and equations for the transition and stationary states of the system under study have been synthesized. The compression condition is obtained from an estimate of the norm of deviation of the phase coordinates of the system from the stationary state. Based on the principle of compressive mappings, a sufficient condition for the stability of a projection-operator dynamic system with restrictions on phase coordinates and controls is obtained. The derivation of a sufficient stability condition made it possible to determine the projection operator feedback parameter and ensure the stability of the projection operator of the dynamic system obtained earlier. As a control object, a vector-matrix model of a synchronous generator in the Cauchy form was used for the computational experiment. A computational experiment confirmed the theoretical generalizations obtained in the study. **Practical relevance:** The fulfillment of the inequality condition to determine the feedback parameter guarantees the stability of the projection operator dynamic system.

Keywords – sufficient conditions for stability, dynamical systems, projection operators, optimization, stabilization of program motions, locally admissible controls, restrictions on phase coordinates and controls, synchronous generator, mathematical model, SimInTech.

For citation: Efremov A. A., Kozlov V. N. Sufficient conditions for the stability of a locally admissible dynamic system with constraints on phase coordinates and controls. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 57–65 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-57-65, EDN: UFBFDT

References

- Meshchanov A. S., Bikmurzin A. M. Stabilization of programmed landing of aircraft without chassis on mobile platform in atmosphere under uncertain perturbations: Part 1. *Herald of Technological University*, 2020, vol. 23, no. 12, pp. 109–117 (In Russian). EDN: KOZLIY
- Vorobyov E. I., Mikheev A. V., Morgunenko K. O. Construction of program movements of relative manipulation mechanisms with three degrees of freedom. *Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin*, 2019, no. 6, pp. 42–48 (In Russian). doi:10.1134/S0235711919060105/issn0235-7119
- Alekseev A., Stukonog S. An algorithm for constructing an optimal ship's path with elements of the ship's program motion systems on the course. *Transp. Bus. Russ.*, 2022, no. 2, pp. 217–221. doi:10.52375/20728689_2022_2_217/issn2072-8689
- Yu H., Liang X., Han J., Fang Y. Adaptive trajectory tracking control for the quadrotor aerial transportation system landing a payload onto the mobile platform. *IEEE Trans. Ind. Informatics*, 2023, pp. 1–12. doi:10.1109/TII.2023.3256374
- Efremov A. A., Kozlov V. N. Method of synthesis of locally permissible limited controls for the stabilization of program motions of dynamic objects. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 4, pp. 47–55 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-4-47-55, EDN: DYULZH
- Sachan K., Padhi R. Lyapunov function based output-constrained control of nonlinear Euler – Lagrange systems. *15th Intern. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, IEEE, Singapore, 2018, 18–21 Nov., 2018, pp. 686–691. doi:10.1109/ICARCV.2018.8581068
- Wang X., Xu J., Lv M., Zhang L., Zhao Z. Barrier Lyapunov function-based fixed-time FTC for high-order nonlinear systems with predefined tracking accuracy. *Nonlinear Dyn.*, 2022, vol. 110, no. 1, pp. 381–394. doi:10.1007/s11071-022-07627-9/issn0924-090X
- Golubev A. E. Stabilization of programmed motions of mechanical systems subject to constraints. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2023, no. 4, pp. 153–167 (In Russian). doi:10.31857/S0002338823040054
- Kozlov V. N., Efremov A. A. Operators of bounded locally optimal controls for dynamic systems. In: *Lect. Notes Networks Syst.* Springer, 2020, vol. 95, pp. 140–145. doi:10.1007/978-3-030-34983-7_14
- Kozlov V. N., Efremov A. A. Projection-operator optimization of controls of dynamic objects. *J. Phys. Conf. Ser. IOP Publishing Ltd*, 2021, vol. 1864, no. 1, pp. 140–145. doi:10.1088/1742-6596/1864/1/012076/issn17426596
- Aleksandrova O. V., Kozik A. A. Minimax optimization of stabilization parameters during the programmed flight. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 3, pp. 55–59. doi:10.3103/S0027133019030014
- Kotina E. D., Ovsyannikov D. A. Mathematical model of joint optimization of program and perturbed motions in discrete systems. *Vestnik of Saint Petersburg University Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, no. 2, pp. 213–224 (In Russian). doi:10.21638/11701/spbu10.2021.210
- Golubev A. E. Construction of program movements of mechanical systems, considering restrictions using third-order polynomials. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2021, no. 2, pp. 126–137 (In Russian). doi:10.31857/S0002338820060049/issn0002-3388
- Andreev A. S., Kolegova L. V. PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic manipulators' desired motions. *Zhurnal Sredn. Mat. Obs.*, 2022, vol. 34, no. 3, pp. 267–279. doi:10.15507/2079-6900.24.202203.267-279/issn20796900
- Irtegov V. D., Titorenko T. N. On one approach to the qualitative analysis of nonlinear dynamical systems. *Numerical Analysis and Applications*, 2022, no. 1, pp. 59–75 (In Russian). doi:10.15372/SJNM20220105/issn1560-7526
- Yu M., Li J., Zhang S. Probabilistic stability of small disturbance in wind power system based on a variational Bayes and Lyapunov theory using PMU data. *IET Gener. Transm. Distrib.*, 2022, vol. 16, no. 23, pp. 4818–4829. doi:10.1049/gtd2.12648/issn1751-8687
- Efremov A. A., Karakchieva V. V., Kozlov V. N. Stability analysis of dynamical systems based on Lyapunov vector functions. *Intern. Conf. "System Analysis in Engineering and Control"*, 2022, pp. 177–186. doi:10.1007/978-3-030-98832-6_16
- Schiller J. D., Muntwiler S., Kohler J., Zeilinger M. N., Muller M. A. A Lyapunov function for robust stability of moving

- horizon estimation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2023, pp. 1–16. doi:10.1109/TAC.2023.3280344. Available at: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10136787> (accessed 15 June 2023).
19. Barroso N. F., Ushirobira R., Efimov D. Control Lyapunov function method for robust stabilization of multistable affine nonlinear systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2023, vol. 33, no. 11, pp. 6354–6370. doi:10.1002/rnc.6700/issn1049-8923
 20. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza*. [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2019. 572 p. (In Russian).
 21. Kozlov V. N. *Proyeksionnyy metod sinteza ogranichennykh optimal'nykh upravleniy dinamicheskikh sistem energetiki* [Projection method for the synthesis of bounded optimal controls of dynamic energy systems]. Saint-Petersburg, Politekhnikeskij universitet Publ., 2019. 161 p. (In Russian).
 22. Neklepaev B. N. *Elektricheskaya chast' elektrostantsiy i podstantsiy* [Electrical part of power stations and substations]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1986. 640 p. (In Russian).
 23. Skvortsov L. M. *CHislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh i differentsial'no-algebraicheskikh uravnenij* [Numerical solution of ordinary differential and differential-algebraic equations]. Moscow, DMK Press Publ., 2023. 236 p. (In Russian).
 24. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Andrievsky B. R., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Matematicheskoye modelirovaniye perekhodnykh protsessov gidroagregata Sayano-Shushenskoy GES. *Differential Equations and Control Processes*, 2018, vol. 4, pp. 80–105. doi:10.7868/s0869565216060086/issn0869-5652. Available at: https://diffjournal.spbu.ru/pdf/kuznetsov_5.pdf (accessed 15 May 2023) (In Russian).
 25. Venikov V. A., Ivanov-Smolenskiy A. V. *Fizicheskoye modelirovaniye elektricheskikh sistem* [Physical modeling of electrical systems]. Moscow; Leningrad, Gosenergoizdat Publ., 1956. 359 p. (In Russian).

ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (ius.spb@gmail.com).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию.

Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.

АНДРИЯНОВА Наталья Романовна



Аспирант Санкт-Петербургского государственного университета. В 2020 году окончила с отличием Санкт-Петербургский государственный университет по специальности «Методы прикладной математики и информатики в задачах управления». Является автором девяти научных публикаций. Область научных интересов — теория управления, дифференциально-разностные системы, теория устойчивости, мульти-агентные системы. Эл. адрес: natasha23062@mail.ru

ЕФРЕМОВ Артем Александрович



Доцент, руководитель образовательных программ Санкт-Петербургского государственного политехнического университета Петра Великого. В 2002 году окончил Санкт-Петербургский государственный политехнический университет по специальности «Техническая физика». В 2005 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Является автором более 50 научных публикаций. Область научных интересов — теория управления и оптимизации, синтез управляемых динамических систем, информационные системы. Эл. адрес: artem.efremov@spbstu.ru

КРЕСТОВНИКОВ Константин Дмитриевич



Младший научный сотрудник лаборатории автономных робототехнических систем Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН. В 2019 году окончил магистратуру Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения по специальности «Мехатроника и робототехника». Является автором 40 научных публикаций и двух патентов на изобретения. Область научных интересов — модели и алгоритмы распределения энергетических ресурсов робототехнических средств путем двунаправленной беспроводной передачи энергии, мехатроника. Эл. адрес: krestovnikov.@iias.spb.su

ДУЖИН Василий Сергеевич



Доцент кафедры алгоритмической математики Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ». В 2010 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения по специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети». В 2020 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Является автором 26 научных публикаций. Область научных интересов — компьютерная алгебра, компьютерное моделирование, дискретная математика. Эл. адрес: vsduzhin@etu.ru

КОЗЛОВ Владимир Николаевич



Профессор, научный руководитель образовательной программы Санкт-Петербургского государственного политехнического университета Петра Великого, эксперт РАН, дважды лауреат премии Президента РФ, лауреат премии Правительства РФ, заслуженный работник высшей школы РФ. В 1970 году окончил Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина по специальности «Автоматика и телемеханика». В 1989 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором более 200 научных публикаций. Область научных интересов — теория управления и оптимизации, синтез управляемых динамических систем, теория устойчивости. Эл. адрес: kozlov_vn@spbstu.ru

ОРЕШКИНА Маргарита Валерьевна



Доцент кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств Новосибирского государственного технического университета. В 2015 году окончила Новосибирский государственный технический университет по специальности «Радиосвязь, радиовещание и телевидение». В 2022 году защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором 18 научных публикаций. Область научных интересов — полунатурное моделирование радиолокационной обстановки. Эл. адрес: oreshkina.m@yandex.ru

ФАТКИЕВА
Роза
Равильевна



Доцент кафедры вычислительной техники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина).

В 2000 году окончила Северо-Западный заочный политехнический институт по специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети».

В 2005 году защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором 88 научных публикаций и одного патента на изобретения.

Область научных интересов – системный анализ, информационная безопасность, моделирование технических систем, системы передачи данных.

Эл. адрес: rikki2@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ ЖУРНАЛА «ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ» ЗА 2023 г. [№ 1–6]

	№	Стр.
Burakov V. V., Borovkov A. I. Advanced metric analysis tool for Java source code	1	17
Burkov A. A. Comparison of the ways to reduce energy costs in stable massive machine-type communication systems	2	39
Kolesnikova S. I., Fomenkova A. A. Dynamic strategies for monitoring quality control at a complex bioengineering facility	2	51
Moldovyan A. A., Moldovyan N. A. Post-quantum algebraic signature algorithms with a hidden group	1	29
Moldovyan A. A., Moldovyan N. A. Post-quantum signature algorithms with a hidden group and doubled verification equation	3	59
Osipov D. S. Signal detection amid noise using order statistics: detector sensitivity analysis and parameter choice	1	61
Shirokova S. V., Rostova O. V., Bolsunovskaya M. V., Dmitrieva L. A., Almataev T. O. Information security audit for a manufacturing company	1	41
Андрянова Н. Р. Анализ устойчивости системы Лурье со скалярным запаздывающим управлением и переключениями	6	2
Арсеньев В. Н., Ядренкин А. А., Слатова Е. В. Принятие решения о наиболее опасном техногенном объекте космическим аппаратом мониторинга околоземного космического пространства	4	26
Балонин Н. А., Себерри Дж., Сергеев М. Б. Задачи разрешимые и неразрешимые. Алгоритм Прокруста получения матриц семейства Адамара	1	2
Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Максимум детерминанта бициклических матриц с каймой	3	2
Борисовская А. В., Тюрликов А. М. Оценка среднего возраста информации в системах со случайным доступом и множественным выходом	1	51
Величко А. Н., Карпов А. А. Методика и программная система интегрального анализа деструктивных паралингвистических явлений в разговорной речи	4	2
Гейдаров П. Ш. Исследование устойчивости многослойного перцептрона с вычисляемыми весами синапсов к меньшим объемам обучающей выборки	2	2
Дужин В. С. Программный инструментарий для исследования задач асимптотической комбинаторики диаграмм и таблиц Юнга	6	35
Ефремов А. А., Козлов В. Н. Достаточные условия устойчивости локально допустимой динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления	6	57
Ефремов А. А., Козлов В. Н. Метод синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов	4	47
Жильникова Н. А., Баранова А. А. Информационные технологии и автоматизация эколого-технологического управления территориальным природно-производственным комплексом	2	61
Иванов В. В., Воронков Г. С., Кузнецов И. В. Алгоритм синтеза нестационарного координированного многоканального кодека на основе построения интервальных одностипных многосвязных систем	5	22
Иванов М. Е., Езерский В. В. Применение нечеткого регулятора для устранения флуктуаций переходного процесса возмущенной системы автоматического управления углом тангажа летательного аппарата	3	51
Карандашев А. А., Оленев В. Л., Бритов Г. С. Моделирование динамики информационных потоков в маршрутах вычислительных сетей	3	39
Кипяткова И. С., Кагиров И. А. Система автоматического распознавания карельской речи	3	16

Крестовников К. Д., Ерашов А. А., Савельев А. И. Разработка аппаратного обеспечения и алгоритмов функционирования носимого сенсорного устройства для распознавания двигательной активности руки и жестов	4	35
Крестовников К. Д. Математическая модель и алгоритмы управления группой наземных роботов с перераспределением энергетических ресурсов	6	20
Кротов К. В. Алгоритм метода ветвей и границ оптимизации расписаний выполнения пакетов заданий в конвейерных системах	2	15
Мотыко А. А., Обухова Н. А. Метод перцептуальной цветокоррекции	3	26
Обухов А. Д., Коробова И. Л., Назарова А. О., Зайцева Д. В. Применение машинного обучения при анализе ЭЭГ для выявления фобической реакции в виртуальной реальности	4	56
Орешкина М. В. Метод минимизации объема вычислений при имитации отражений радиоволн от земной поверхности	6	12
Попов Д. И. Определение параметров физического взаимодействия между роботом и средой с использованием внутренних и внешних сенсоров	5	2
Синюк А. Д., Лепешкин О. М., Филимонов В. А., Остроумов О. А. Оптимизация профиля функционирования сложной технической системы	4	12
Солодуха Р. А. Стеганоанализ изображений, модифицированных алгоритмом Bit Plane Complexity Segmentation	2	27
Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф. Управление характеристиками системы массового обслуживания через сдвиг законов распределений	5	55
Типикин А. А. Методика расчета напряженности поля ионосферной волны в диапазоне очень низких частот на основе скачкового метода	5	12
Трофимов А. Н., Таубин Ф. А. Улучшенная граница вероятности ошибки при оптимальном приеме в канале с межсимвольной интерференцией	5	33
Фаткиева Р. Р. Метод защищенной передачи информации для передвижения автономных транспортных средств	6	46
Чертков В. М., Богуш Р. П., Адамовский Е. Р. Модель разделения данных пользователей в когнитивной системе связи на базе LTE	5	43
Сведения об авторах	1	71
Сведения об авторах	2	69
Сведения об авторах	3	70
Сведения об авторах	4	71
Сведения об авторах	5	64
Сведения об авторах	6	66

Уважаемые авторы!

При подготовке рукописей статей необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.

Статьи должны содержать изложение новых научных результатов. Название статьи должно быть кратким, но информативным. В названии недопустимо использование сокращений, кроме самых общепринятых (РАН, РФ, САПР и т. п.).

Текст рукописи должен быть оригинальным, а цитирование и самоцитирование корректно оформлено.

Объем статьи (текст, таблицы, иллюстрации и библиография) не должен превышать эквивалента в 20 страниц, напечатанных на бумаге формата А4 на одной стороне через 1,5 интервала Word шрифтом Times New Roman размером 13, поля не менее двух сантиметров.

Обязательными элементами оформления статьи являются: индекс УДК, заглавие, инициалы и фамилия автора (авторов), ученая степень, звание (при отсутствии — должность), полное название организации, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках, ORCID и электронный адрес одного из авторов. При написании аннотации не используйте аббревиатур и не делайте ссылки на источники в списке литературы. Предоставляйте подрисовочные подписи и названия таблиц на русском и английском языках.

Статьи авторов, не имеющих ученой степени, рекомендуется публиковать в соавторстве с научным руководителем, наличие подписи научного руководителя на рукописи обязательно; в случае самостоятельной публикации обязательно предоставляйте заверенную по месту работы рекомендацию научного руководителя с указанием его фамилии, имени, отчества, места работы, должности, ученого звания, ученой степени.

Простые **формулы** набирайте в Word, сложные с помощью редактора MathType или Equation. Для набора одной формулы не используйте два редактора; при наборе формул в формульном редакторе знаки препинания, ограничивающие формулу, набирайте вместе с формулой; для установки размера шрифта в MathType никогда не пользуйтесь вкладкой Other, Smaller, Larger, используйте заводские установки редактора, не подгоняйте размер символов в формулах под размер шрифта в тексте статьи, не растягивайте и не сжимайте мышью формулы, вставленные в текст; пробелы в формуле ставьте только после запятой при перечислении с помощью Ctrl+Shift+Space (пробел); не отделяйте пробелами знаки: + = - ×, а также пространство внутри скобок; для выделения греческих символов в MathType полужирным начертанием используйте Style → Other → bold.

Для набора формул в Word никогда не используйте вкладки: «Уравнение», «Конструктор», «Формула» (на верхней панели: «Вставка» — «Уравнение»), так как этот ресурс предназначен только для внутреннего использования в Word и не поддерживается программами, предназначенными для изготовления оригинал-макета журнала.

При наборе символов в тексте помните, что символы, обозначаемые латинскими буквами, набираются светлым курсивом, русскими и греческими — светлым прямым, векторы и матрицы — прямым полужирным шрифтом.

Подробнее см. <http://i-us.ru/index.php/ius/author-guide>

Иллюстрации:

— рисунки, графики, диаграммы, блок-схемы предоставляйте в виде отдельных исходных файлов, поддающихся редактированию, используя векторные программы: Visio (*.vsd, *.vsdx); Adobe Illustrator (*.ai); Coreldraw (*.cdr, версия не выше 15); Excel (*.xls); Word (*.docx); AutoCad, Matlab (экспорт в PDF, EPS, SVG, WMF, EMF); Компас (экспорт в PDF); веб-портал DRAW.IO (экспорт в PDF); Inkscape (экспорт в PDF);

— фото и растровые — в формате *.tif, *.png с максимальным разрешением (не менее 300 pixels/inch).

Наличие подрисовочных подписей и названий таблиц на русском и английском языках обязательно (желательно не повторяющих дословно комментарии к рисункам в тексте статьи).

В редакцию предоставляются:

— сведения об авторе (фамилия, имя, отчество, место работы, должность, ученое звание, учебное заведение и год его окончания, ученая степень и год защиты диссертации, область научных интересов, количество научных публикаций, домашний и служебный адреса и телефоны, e-mail), фото авторов: анфас, в темной одежде на белом фоне, должны быть видны плечи и грудь, высокая степень четкости изображения без теней и отблесков на лице, фото можно представить в электронном виде в формате *.tif, *.png, *.jpg с максимальным разрешением — не менее 300 pixels/inch при минимальном размере фото 40×55 мм;

— экспертное заключение;

— экспортное заключение.

Список литературы

 составляется по порядку ссылок в тексте и оформляется следующим образом:

— для книг и сборников — фамилия и инициалы авторов, полное название книги (сборника), город, издательство, год, общее количество страниц, doi;

— для журнальных статей — фамилия и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала, год издания, номер журнала, номера страниц, doi;

— ссылки на иностранную литературу следует давать на языке оригинала без сокращений;

— при использовании web-материалов указывайте адрес сайта и дату обращения.

Список литературы оформляйте двумя отдельными блоками по образцам lit.dot на сайте журнала (<http://i-us.ru/paperrules>): Литература и References.

Более подробно правила подготовки текста с образцами изложены на нашем сайте в разделе «Руководство для авторов» — <http://i-us.ru/index.php/ius/author-guide>.

Контакты

Куда: 190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, ГУАП, РИЦ

Кому: Редакция журнала «Информационно-управляющие системы»

Тел.: (812) 494-70-02

Эл. почта: ius.spb@gmail.com

Сайт: www.i-us.ru