

ISSN 1684-8853 (print); ISSN 2541-8610 (online)

# ИНФОРМАЦИОННО- УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

6(97)/2018

6(97)/2018

# INFORMATSIONNO- UPRAVLIAIUSHCHIE SISTEMY (INFORMATION AND CONTROL SYSTEMS)

REFEREED EDITION

**Founder**

«Information and Control Systems», Ltd.

**Publisher**Saint-Petersburg State University  
of Aerospace Instrumentation**Editor-in-Chief**M. Sergeev  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia**Deputy Editor-in-Chief**E. Krouk  
Dr. Sc., Professor, Moscow, Russia**Executive secretary**

O. Muravtsova

**Editorial Board**

S. Andreev  
PhD, Tampere, Finland

V. Anisimov  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

B. Bezruchko  
Dr. Sc., Professor, Saratov, Russia

N. Blaunstein  
Dr. Sc., Professor, Beer-Sheva, Israel

C. Christodoulou  
PhD, Professor, Albuquerque, New Mexico, USA

A. Dudin  
Dr. Sc., Professor, Minsk, Belarus

I. Dumer  
PhD, Professor, Riverside, USA

M. Favorskaya  
Dr. Sc., Professor, Krasnoyarsk, Russia

L. Fortuna  
PhD, Professor, Catania, Italy

A. Fradkov  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

A. Hramov  
Dr. Sc., Professor, Saratov, Russia

L. Jain  
PhD, Professor, Canberra, Australia

V. Khimenko  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

G. Maltsev  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

G. Matvienko  
Dr. Sc., Professor, Tomsk, Russia

V. Melekhin  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

A. Myllari  
PhD, Professor, Grenada, West Indies

Y. Podopyokin  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

J. Seberry  
PhD, Professor, Wollongong, Australia

A. Shalyto  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

A. Shelupanov  
Dr. Sc., Professor, Tomsk, Russia

A. Shepeta  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

Yu. Shokin  
RAS Academician, Dr. Sc., Novosibirsk, Russia

A. Smirnov  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

T. Sutikno  
PhD, Associate Professor, Yogyakarta, Indonesia

Z. Yuldashev  
Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

R. Yusupov  
RAS Corr. Member, Dr. Sc., Professor, Saint-Petersburg, Russia

A. Zeifman  
Dr. Sc., Professor, Vologda, Russia

**Editor:** A. Larionova**Proofreader:** T. Zvertanovskaia**Design:** M. Chernenko, Y. Umnitsina**Layout and composition:** Y. Umnitsina**Contact information**The Editorial and Publishing Center, SUAI  
67, B. Morskaya, 190000, St. Petersburg, Russia  
Website: <http://i-us.ru/en>, e-mail: [i.us.spb@gmail.com](mailto:i.us.spb@gmail.com)  
Tel.: +7 - 812 494 70 02**THEORETICAL AND APPLIED MATHEMATICS****Balonin N. A., Sergeev M. B.** *Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 1* 2**Vassiliev N. N., Parasidis I. N., Providas E.** *Exact solution method for Fredholm integro-differential equations with multipoint and integral boundary conditions. Part 1. Extension method* 14**Edneral V. F., Timofeevskaya O. D.** *Normal form method in search for periodic solutions of ordinary differential equations. Case of the fourth order* 24**INFORMATION PROCESSING AND CONTROL****Favorskaya M. N., Buryachenko V. V.** *Background extraction method for analysis of natural images captured by camera traps* 35**Voronin A. V., Maltsev G. N., Sokhen M. Yu.** *Data visualization quality in a geographic information system using golden ratio properties* 46**SYSTEM AND PROCESS MODELING****Maksimenko V. A., Kuc A. K., Pisarchik A. N., Hramov A. E.** *Mathematical modeling of visual sensory information processing using multi-channel EEG signals* 58**HARDWARE AND SOFTWARE RESOURCES****Sadovnikov S. A.** *Software system for numerical simulation of broadband laser gas analysis of the atmosphere* 66**INFORMATION SECURITY****Khlobystova A. O., Abramov M. V., Tulupyev A. L., Zolotin A. A.** *Search for the shortest trajectory of a social engineering attack between a pair of users in a graph with transition probabilities* 74**INFORMATION CHANNELS AND MEDIUM****Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.** *Evolution of multiple-access networks – cellular and non-cellular – in historical perspective. Part 3* 82**Shchekotov M. S.** *Method of indoor navigation and collaborative semi-automatic Wi-Fi radiomap construction* 95**CONTROL IN SOCIAL AND ECONOMIC SYSTEMS****Skobelev P. O., Lakhin O. I., Mayorov I. V., Simonova E. V.** *Adaptive multi-agent planning of industrial resources based on ontology* 105**INFORMATION ABOUT THE AUTHORS***Contents of the journal «Informatisionno-upravliaiushchie sistemy (Information and Control Systems)» for 2018* 123Submitted for publication 01.11.18. Passed for printing 14.12.18. Format 60×84<sub>1/8</sub>.  
Phototype SchoolBookC. Digital printing.

Layout original is made at the Editorial and Publishing Center, SUAI.

67, B. Morskaya, 190000, St. Petersburg, Russia

Printed from slides at the Editorial and Publishing Center, SUAI.

67, B. Morskaya, 190000, St. Petersburg, Russia

The journal is distributed by subscription. Subscription can be made in the Editorial and publishing center, SUAI as well as in any post office based on «Rospechat» catalogue:  
№ 15385 — semiannual subscript.

6(97)/2018

РЕЦЕНЗИРУЕМОЕ ИЗДАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННО-  
УПРАВЛЯЮЩИЕ  
СИСТЕМЫ

**Учредитель**  
ООО «Информационно-управляющие системы»

**Издатель**  
Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения

**Главный редактор**  
М. Б. Сергеев,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

**Зам. главного редактора**  
Е. А. Крук,  
д-р техн. наук, проф., Москва, РФ

**Ответственный секретарь**  
О. В. Муравцова

**Редакционная коллегия:**  
С. Д. Андреев,  
канд. техн. наук, Тампере, Финляндия  
В. Г. Анисимов,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ  
Б. П. Безручко,  
д-р физ.-мат. наук, проф., Саратов, РФ  
Н. Блаунштейн,  
д-р физ.-мат. наук, проф., Беэр-Шева, Израиль  
Л. С. Джайн,  
д-р наук, проф., Канберра, Австралия  
А. Н. Дудин,  
д-р физ.-мат. наук, проф., Минск, Беларусь  
И. И. Думер,  
д-р наук, проф., Риверсайд, США  
А. И. Зейфман,  
д-р физ.-мат. наук, проф., Вологда, РФ  
К. Кристодолу,  
д-р наук, проф., Альбукерке, Нью-Мексико, США  
Г. Н. Мальцев,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ  
Г. Г. Матвиенко,  
д-р физ.-мат. наук, проф., Томск, РФ  
В. Ф. Мелехин,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ  
А. А. Мюллери  
д-р наук, профессор, Гренада, Вест-Индия  
Ю. Ф. Подоплёкин,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ  
Т. Сутикну  
д-р наук, доцент, Джокарта, Индонезия  
Д. Себерри,  
д-р наук, проф., Волонгонг, Австралия  
А. В. Смирнов,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ  
М. Н. Фаворская,  
д-р техн. наук, проф., Красноярск, РФ  
Л. Фортуна,  
д-р наук, проф., Катания, Италия  
А. Л. Фрадков,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ  
В. И. Хименко,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ  
А. Е. Храмов,  
д-р техн. наук, проф., Саратов, РФ  
А. А. Шальто,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ  
А. А. Шелупанов,  
д-р техн. наук, проф., Томск, РФ  
А. П. Шепета,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ  
Ю. И. Шокин,  
акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф., Новосибирск, РФ  
Э. М. Юлдашев,  
д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ  
Р. М. Юсупов,  
чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

**Редактор:** А. Г. Ларионова  
**Корректор:** Т. В. Звертановская  
**Дизайн:** М. Л. Черненко, Ю. В. Умницына  
**Компьютерная верстка:** Ю. В. Умницына

**Адрес редакции:** 190000, Санкт-Петербург,  
Б. Морская ул., д. 67, ГУАП, РИЦ  
Тел.: (812) 494-70-02, эл. адрес: ius.spb@gmail.com,  
сайт: http://i-us.ru

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

- Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Часть 1 2
- Vassiliev N. N., Parasidis I. N., Providas E.** Exact solution method for Fredholm integro-differential equations with multipoint and integral boundary conditions. Part 1. Extension method 14
- Еднерал В. Ф., Тимофеевская О. Д.** Поиск периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода нормальной формы. Случай уравнений четвертого порядка 24

## ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЕ

- Favorskaya M. N., Buryachenko V. V.** Background extraction method for analysis of natural images captured by camera traps 35
- Воронин А. В., Мальцев Г. Н., Сохен М. Ю.** Наглядность визуализации данных в геоинформационной системе при использовании свойств золотого сечения 46

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

- Максименко В. А., Куц А. К., Писарчик А. Н., Храмов А. Е.** Математическое моделирование процессов обработки визуальной сенсорной информации по многоканальным сигналам ЭЭГ 58

## ПРОГРАММНЫЕ И АППАРАТНЫЕ СРЕДСТВА

- Садовников С. А.** Программно-алгоритмическая система для численного моделирования широкополосного лазерного газоанализа атмосферы 66

## ЗАЩИТА ИНФОРМАЦИИ

- Хлобыстова А. О., Абрамов М. В., Тулупьев А. Л., Золотин А. А.** Поиск кратчайшей траектории социоинженерной атаки между парой пользователей в графе с вероятностями переходов 74

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ КАНАЛЫ И СРЕДЫ

- Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.** Evolution of multiple-access networks – cellular and non-cellular – in historical perspective. Part 3 82
- Щекотов М. С.** Метод навигации и коллаборативного полуавтоматического построения карт сигналов Wi-Fi внутри помещений 95

## УПРАВЛЕНИЕ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

- Скобелев П. О., Лахин О. И., Майоров И. В., Симонова Е. В.** Адаптивное мультиагентное планирование производственных ресурсов на основе онтологии 105

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Содержание журнала «Информационно-управляющие системы» за 2018 г. [№ 1–6] 123

Журнал входит в БД SCOPUS, в RSCI на платформе Web of Science и в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

Сдано в набор 01.11.18. Подписано в печать 14.12.18. Формат 60 × 84<sup>1/8</sup>.  
Гарнитура SchoolBookC. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 14,7. Уч.-изд. л. 20,2. Тираж 1000 экз (1-й завод 120 экз.). Заказ № 547.  
Оригинал-макет изготовлен в редакционно-издательском центре ГУАП.  
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67.

Отпечатано с готовых диапозитивов в редакционно-издательском центре ГУАП.  
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67.  
Журнал распространяется по подписке. Подписку можно оформить через редакцию, а также в любом отделении связи по каталогу «Роспечать»:  
№ 15385 — полугодовой индекс.

## Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Часть 1

Н. А. Балонин<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0001-7338-4920](https://orcid.org/0000-0001-7338-4920), [korbendfs@mail.ru](mailto:korbendfs@mail.ru)

М. Б. Сергеев<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0002-3845-9277](https://orcid.org/0000-0002-3845-9277)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

**Введение:** гипотеза Адамара о существовании специфических квадратных матриц сформулирована не Адамаром, а математиками начала прошлого века. В середине века проблема подверглась ревизии в работах Райзера с Бруком и Човлом, а также одним из основателей дискретной математики Холлом. Она относится к задачам пограничного смешанного типа, в ней присутствует и непрерывная, и дискретная составляющие. Комбинаторный подход, используемый в рамках последней, за столетие исчерпал себя, в статье рассмотрена альтернатива, опирающаяся на обе образующие. **Цель:** рассмотреть причины, по которым гипотеза о существовании всех матриц Адамара на порядках  $n = 4t$  считается недоказанной, и предложить возможные варианты ее доказательства. **Методы:** переход понижением порядка  $n = 4t - 2$  к двухуровневым квазиортогональным матрицам с элементами 1 и  $-b$ , вопрос существования которых на всех указанных порядках не вызывает затруднений в силу возможной иррациональности их элементов, с последующим построением цепочки преобразований к матрицам порядков  $n = 4t - 1, n = 4t, n = 4t + 1$ . **Результаты:** доказано взаимно-однозначное соответствие точек Гаусса на сфероиде  $x^2 + 2y^2 + z^2 = n$  с симметричными матрицами Адамара (построенными на основе массивов Балонина – Себери), закрывающее известные в теории массивов Вильямсона пробелы неразрешимых порядков 140, 112 и т. п. Найдены и систематизированы таблицы решений, включающие так называемые «лучшие» трехблочные матрицы  $L(p, q), p \geq q$  – количество несопряженных симметричных матриц рассматриваемого порядка,  $q$  – количество блочно-симметричных матриц, совпадающих с решениями Вильямсона. Предложен итерационный метод Прокруста, понижающий норму максимального элемента матрицы, для получения матриц Адамара поиском локального и глобального условных экстремумов детерминанта. **Практическая значимость:** полученные матрицы Адамара и квазиортогональные матрицы порядков  $n = 4t - 2, n = 4t - 1, n = 4t + 1$  имеют непосредственное практическое значение для задач помехоустойчивого кодирования, шатя и маскирования видеoinформации.

**Ключевые слова** – ортогональные матрицы, матрицы Адамара, гипотеза Адамара, циклические матрицы, негациклические матрицы, бициклические матрицы, массив Вильямсона, массив Балонина – Себери, алгоритм Прокруста.

**Цитирование:** Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Ч. 1. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 2–13. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-2-13

**Citation:** Balonin N. A., Sergeev M. B. Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 1. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 2–13 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-2-13

### Введение

Матрицы Адамара — квадратные матрицы  $\mathbf{H}$  порядка  $n$  с элементами  $-1$  и  $1$  такие, что выполняется

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = n\mathbf{I}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$  — единичная матрица.

Помимо тривиальных размеров 1 и 2 матрицы Адамара ищут на порядках, делимых на 4 [1–3]. Содержание так называемой гипотезы Адамара состоит в том, что такие матрицы есть на всех  $4t$ , где  $t$  — натуральное число. Попробуем разобраться, почему возникло сомнение в существовании матриц Адамара, и рассмотрим возможные пути, как это сомнение преодолеть.

Матрицы вида (1) принято называть квазиортогональными [4], имея в виду, что нормированием  $\mathbf{H} = \mathbf{H} / \sqrt{n}$  их нетрудно свести к строго ортогональным матрицам  $\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{I}$ . Их элементами в таком случае будут и иррациональные числа. Поэтому рациональными матрицы Адамара можно счи-

тать весьма условно в силу тождества значений их элементов, позволяющего упростить матрицу. В общем случае ортогональные матрицы имеют несколько значений элементов, называемых уровнями [5, 6]. Трехуровневыми, например, являются конференц-матрицы (С-матрицы) или их обобщения в форме взвешенных матриц [2, 5].

Матрицы Адамара могут быть разными по конструкции, в том числе симметричными. Вильямсон [7], выбирая форму блочного массива, взял его кососимметричным (здесь и далее — с точностью до диагонали), но с симметричными блоками, совместив в одной матрице два качества. Потом с интервалом примерно в десять лет выходят две работы [8, 9] пионеров компьютерных поисков матриц Адамара для первого раскрытого при помощи вычислительной машины порядка 92 (рис. 1).

Попытки сформулировать условия существования матриц Адамара на всех порядках, кратных 4, предпринимались до этих работ в середине прошлого века усилиями Брука, Райзера и Човлы [10, 11], сформулировавших теорему,



■ *Рис. 1.* Голлоб, Баумерт и Холл с портретом матрицы порядка 92  
 ■ *Fig. 1.* Golomb, Baumert and Hall with matrix portrait for order 92

комментируемую в монографии [12] Маршаллом Холлом (соавтором [8]).

В работе [9] первая блочная матрица берется кососимметричной, а остальные разворачиваются так, чтобы их симметрия (и отсутствие ее) не мешали матрице в целом быть кососимметричной. Это породило гипотезу Себерри [3, 9] о том, что матрицы Адамара не только существуют на каждом порядке, кратном 4, но они еще и все могут быть кососимметричны. Едва ли симметрия может претендовать на меньшую роль. Поэтому позднее внимание исследователей сосредотачивается на возможности существования матриц Адамара в симметричной форме с одним или несколькими циклическими блоками, расширяющей границу Райзера [13] с 4-го порядка для моноциклов до 32-го порядка для бициклов [14, 15] и далее на все порядки  $4t$  при использовании не более трех блоков [16–19]. Два блока (а не три) достаточны для построения негациклической конструкции [20]. В работах [21, 22] рассматриваются трехуровневые взвешенные матрицы и последствия, к которым приводит несоответствие размера блока условию ортогональности. Структура матриц резко усложняется для размеров, не равных простым числам. На порядке 46 еще есть известные узоры, для порядков 66 и 86 решения не найдены.

### Предпосылки возникновения теории орнаментов

В отличие от теории чисел, с которой у рассматриваемой темы есть многочисленные пересече-

ния, первые сведения о матрицах Дж. Сильвестр начал собирать около полутора столетий назад [23]. Он является автором наиболее известного алгоритма нахождения цепочки ортогональных по строкам и столбцам матриц  $\mathbf{H}$ , итерационно

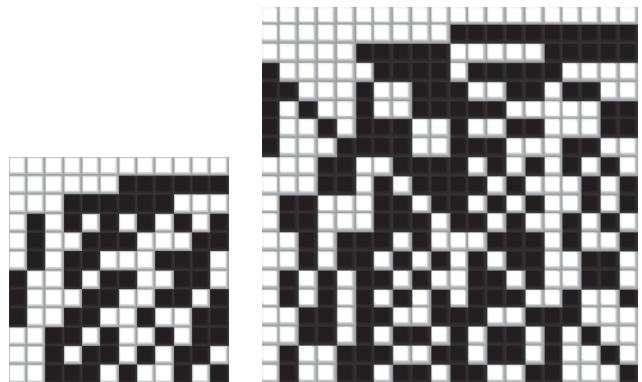
наращиваемых  $\begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H} & -\mathbf{H} \end{pmatrix}$ , где начальное  $\mathbf{H} = \mathbf{1}$ .

Инверсия знака в правом нижнем блоке составной матрицы обеспечивает наличие в ней двух элементов: 1 и  $-1$ . В данном алгоритме рекурсия идет по порядку и зависит от начального выбора, поэтому найти матрицы всех возможных порядков при его помощи невозможно.

Сильвестра удивили орнаменты (узоры) цепочки матриц порядков  $2^k$  и их свойство быть легко обрабатываемыми. В это время теория матриц только еще формировалась усилиями самого Сильвестра и Кэли. Было чему удивиться и написать подробнейший отчет с изображениями почти «морозных» ортогональных узоров. Далее пятьдесят лет ничего не происходило, что тоже обычно для задач, косвенно связанных с теорией чисел. Накануне нового столетия Адамар оживляет тему находкой матриц порядков 12 и 20, близких к сильвестровым [1], портреты которых приведены на рис. 2. Здесь и далее белая клетка соответствует значению элемента 1.

Адамар видит кратность порядков четырем и доказывает, что иных решений (кроме матриц порядков 1 и 2) не бывает. Он находит, что искомые матрицы достигают максимально возможного значения модуля детерминанта  $n^{n/2}$ .

Методов поиска матриц Адамар не предлагает, его собственный метод «проб и ошибок» несовершенен, орнаменты хаотичны. Правда, благодаря итерациям Сильвестра перечень достижимых вычислениям порядков заметно увеличился. Почти сразу вслед выходит статья специалиста по теории чисел Скарпи [24]. Он ищет ортогональные узоры иначе — вставками усеченных матриц



■ *Рис. 2.* Портреты матриц Адамара порядков 12 и 20  
 ■ *Fig. 2.* Hadamard matrix portraits for orders 12 and 20

в самих себя с добавками каймы и циклическими сдвигами столбцов или строк. Хитроумный «замок Скарпи» по настоящее время находит как новые комментарии, так и продолжения [25–27].

Начиная со Скарпи, с предложенными им циклическими сдвигами, в расчеты матриц Адамара начинают проникать методы конечных полей.

Большой вклад в теорию вносит немецкий математик Эрнст Якобсталь, ученик Фробениуса и Шура, работавший в начале прошлого века над диссертацией по квадратичным вычетам. Далее Гилман [28] в начале тридцатых годов систематизирует матрицы порядков, отличающихся простыми значениями  $n - 1$ . Отсюда недалеко и до конструкций Пэли [29], учитывающих более сложный характер полей, когда  $n - 1$  или  $n/2$  — простые числа или их степени.

Если усеченный на единицу или вдвое размер матрицы представляет собой нечетное число, простое, то это ведет к нахождению матриц в виде особо простого орнамента, в частности циклического (с одной каймой) или бициклического. Метод Сильвестра тоже эксплуатирует особенности простых чисел, он базируется на степенях простого числа 2. Пэли подводит итог поискам, констатируя, что вставками Скарпи достигает вычисления матриц некоторых недостижимых прочими методами порядков, связанных с составными числами.

Отсюда возникает представление, что матрицы Адамара порядков  $n = 4t$  можно найти как пересечения семейств, каждое из которых содержит ограниченное или неограниченное число составляющих. Начинается поиск как отдельных матриц [8, 9], так и семейств матриц, выделяемых благодаря некоторому систематически применяемому приему по образцам, которые дали Сильвестр, Скарпи и Пэли.

### Теорема Брука — Райзера — Човлы

Первые успехи в систематизации орнаментов матриц получены Райзером. Исследуя в шестидесятые годы прошлого века циклическую структуру [13], он замечает ее ограниченное порядком 4 применение (гипотеза Райзера). Впрочем, это простое наблюдение не имело бы такого резонанса, не продвинулся Райзер с коллегами дальше.

Брук, Райзер и Човла [10, 11] оперируют привычными для циклических матриц параметрами их бинарных орнаментов — размером строки  $v$ , количеством отрицательных (или положительных) элементов в каждой строке и столбце  $k$ , а также количеством пар выбранных одинаковых элементов в каждых двух строках или столбцах матрицы  $\lambda$ . Понятно, что выбор набора параметров  $\{v, k, \lambda\}$  не может быть произвольным, он стеснен

общим количеством мест, которые предоставляет для узора квадратная матрица. Связывающее допустимые значения параметров соотношение пришло из теории графов, поэтому его аббревиатура имеет невразумительное для матриц звучание — блочный дизайн. По смыслу — это диофантово уравнение реализуемого узора

$$k(k - 1) = \lambda(v - 1). \quad (2)$$

Если равенство не выполняется, то узор реализовать нельзя, а если выполняется — можно. Заметим, узор в равной степени может описывать как целочисленные, так и иные бинарные матрицы — матрицы с двумя элементами. Поэтому их надо различать дополнительными условиями. Бинарные матрицы, удовлетворяющие условию (2), приводят к матричному уравнению связи, напоминающему условие ортогональности

$$A^T A = (k - \lambda)I + \lambda J, \quad (3)$$

где  $J$  — матрица из единиц;  $k$  описывает положительные, не равные нулю элементы. Определитель левой части  $(k - \lambda)^{v-1}(k - \lambda + \lambda v) > 0$  [12] при нежестких ограничениях на параметры. Целочисленный корень этого матричного квадратичного уравнения с элементами 0 и 1 называется матрицей инцидентности.

Легко видеть, что в левой части (3) концентрируются суммы квадратов и взаимных произведений элементов искомого матрицы. Еще со времен исследований Эйлера и Лагранжа известно, что целое число раскладывается на сумму не менее четырех квадратов целых чисел. Иными словами, для квадратичных уравнений есть ограничения, когда они разрешимы. Углубленно этим занимались Хассе и Минковский, подробные комментарии приведены в обзоре Холла [12]. Между тем влиять на разрешимость уравнения (3) рациональными матрицами, к которым относится целочисленная матрица инцидентности  $A$ , возможно только двумя целочисленными параметрами  $k$  и  $\lambda$ .

Теорема Брука — Райзера — Човлы [10–12] констатирует, что для матриц со строками четной длины  $v$  значение  $(k - \lambda)$  должно быть квадратом некоторого числа. Для прочих матриц условие становится менее жестким и сводится к существованию наследующей у матричного аналога весовые коэффициенты квадратичной формы  $z^2 = (k - \lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2$  такой, чтобы ее можно было разрешить не только нулями. Райзер с коллегами и Холл приводят проблемные сочетания параметров проективного дизайна  $v = q^2 + q + 1$ ,  $k = q + 1$ ,  $\lambda = 1$  при  $q = 6$  и  $14$ , в первом случае имеем  $\{43, 7, 1\}$ , а также пример меньшего порядка  $\{29, 8, 2\}$ .

Теорема Брука — Райзера — Човлы оперирует сугубо целочисленной матрицей инцидентности с элементами 0 и 1, описывающей не столько ортогональные матрицы (с их возможно вещественными элементами), сколько графы и другие сходные с ними дискретные конструкции, где не целые элементы исключены по смыслу самой задачи. Столбцы наращиваемой дополнительной каймой матрицы инцидентности можно сделать ортогональными путем изменения значений прежде нулевых элементов, ограничивая их отрезком от 0 до  $-1$ , получая в конечном итоге «рациональную» матрицу Адамара.

Это обстоятельство, получение одного из другого, стало играть роль краеугольного камня в вопросе о существовании матриц Адамара на всем диапазоне выделенных для них порядков, кратных 4. Так как условия теоремы видятся всего лишь необходимыми, но не достаточными для положительного заключения о существовании рациональных матриц инцидентности, то и на матрицы Адамара, с ними связанные, перешло сомнение [30].

Это сомнение разделяет, в том числе, автор обзора [12], который предпринял ревизию работ [10, 11]. В итоге Холл склоняется к мысли, что условия теоремы не только необходимы, но и достаточны, но не может этого обосновать, поскольку они описывают рациональные матрицы, а не матрицы с ограниченным набором элементов 0 и 1. Если условия достаточны, то гипотеза Адамара получает статус теоремы. Разумеется, опытные математики, в том числе Вильямсон [7] и Холл, наделенные немалой интуицией (об интуиции писал Адамар), давно видели пересечение строго доказанных в теории чисел теорем о разложении чисел на квадраты с матричной тематикой.

Напрашивается естественный вывод, что разложение матриц на квадратные блоки — это всего лишь иллюстративный метод, позволяющий наглядно отразить содержание этих великих теорем о квадратах чисел.

Если матрицы низводятся до всего лишь иллюстраций доказанных разложений чисел на составляющие, то все необходимое для доказательства их существования на  $4t$  есть. Отметим, что неразрешимые сочетания параметров квадратичного дизайна, для которых равенство (2) соблюдается, но (3) неразрешимо матрицей инцидентности, несущественны для ортогональных матриц. Даже если целочисленные матрицы инцидентности есть, они не обязательно ведут (ограниченным изменением их нулевых элементов) к вещественным ортогональным матрицам.

Например, для проективных планов  $\{v, k, \lambda\}$ , в которых были обнаружены критические неразрешимые точки, ортогонализация матрицы инцидентности вариациями нуля (ограниченными по норме единицей) вполне возможна, но

она порождает матрицы с иррациональными элементами, к которым матрицы Адамара не относятся. Выходит, что и случаи, не вызывающие сомнения в разрешимости уравнения из теоремы Брука — Райзера — Човлы (3), не ведут к чему-либо приемлемому для построения целочисленных матриц с ортогональными столбцами.

Тем самым условия, столь тщательно исследуемые, к затронутой проблеме существования ортогональных конструкций имеют опосредованное отношение. Для полноценного исследования надо включать в сферу внимания матрицы с варьируемыми иррациональными элементами, а эта возможность не была использована.

### Уравнения составных узоров

Наше дополнительное замечание состоит в том, что значениями квадратичной матричной формы стоит интересоваться не только для корней в виде матрицы инцидентности с ее 0 и 1, но и при экстремальных значениях параметров. Для ортогональных матриц диофантово уравнение реализуемости узора (2) — условие необходимое, но недостаточное в силу дополнительного уравнения связи  $\mathbf{H}^T \mathbf{H} = n\mathbf{I}$ . Это условие можно выразить короче диофантовым уравнением ортогональности, задающим легко учитываемое ограничение на  $\lambda$ .

**Лемма 3.1.** Для квазиортогональных матриц с элементами  $-1$  и  $1$ , где  $k$  и  $\lambda$  ассоциированы с количеством отрицательных элементов, имеем

$$\lambda = k - n/4. \quad (4)$$

*Доказательство:* Скалярное произведение пары любых не совпадающих между собой строк (и столбцов) ортогональной матрицы равно 0. Поскольку часть отрицательных элементов ( $-1$ ) идут вместе попарно, сумма их взаимных произведений равна  $\lambda$ . В каждой из скалярно перемножаемых строк остается еще по  $(k - \lambda)$  не нашедших пары отрицательных элементов, дающих вклад  $-2(k - \lambda)$ . Остаток состоит из суммы пар произведений положительных элементов, дающей  $n - \lambda - 2(k - \lambda) = n - 2k + \lambda$ . Все вместе  $\lambda - 2(k - \lambda) + n - 2k + \lambda = 4\lambda - 4k + n = 0$  позволяет нам выразить значение целочисленного параметра ортогонального узора  $\lambda = k - n/4$ .

Лемма доказана.

Параметр  $k$  не может быть меньше четвертой части порядка, причем разность  $k - \lambda = n/4$ , что дает  $n = 4(k - \lambda)$ . Отсюда, кстати, видно, что для ортогональных матриц порядок должен делиться на четыре — необходимое условие, указанное Адамаром. Задачи, в которых  $(k - \lambda)$  равно квадрату некоторого числа, приходятся на хорошо изученные четные порядки  $n = 4u^2$ , отвечающие

цепочкам симметричных и (или) регулярных матриц Адамара.

**Лемма 3.2.** Диофантово уравнение реализуемого ортогонального узора имеет вид

$$x^2 = n, \tag{5}$$

где параметр  $k = (v - x)/2$ . Для одноблочных матриц, разумеется, длина строки блока  $v = n$ .

*Доказательство:* Подставив значение  $\lambda$  из леммы 3.1 в уравнение узора (2), имеем новое условие  $k(k - 1) = (k - n/4)(n - 1)$ , которое превращается в тождество тривиальной заменой переменных  $k = (v - x)/2 = x(x - 1)/2, n = x^2$ .

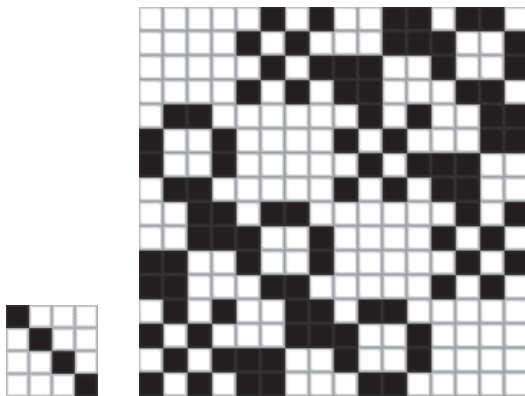
Лемма доказана.

**Следствие 3.2.1.** Регулярные матрицы Адамара, отличающиеся равными значениями сумм элементов строк и столбцов, порядков  $n = 4u^2$  существуют. Условие (5) для них выполняется, к тому же выполняется первое условие теоремы Брука — Райзера — Човлы, так как  $k - \lambda = n/4 = u^2$ . Поэтому регулярные матрицы Адамара с параметрами дизайна Менона  $\{v, k, \lambda\} = \{4u^2, u(2u - 1), u(u - 1)\}$  существуют.

**Пример 3.2.1.** Для порядка 4 регулярной является диагональная циклическая матрица с параметрами  $k = 1$  и  $\lambda = 0$ . Согласно гипотезе Райзера [13], для следующего порядка 16 ресурсов циклического узора не хватает.

Разность  $k - \lambda = n/4 = 4$  достигается при  $k = 6$  и  $\lambda = 2$ , характерных для орнаментов в форме матриц Буша с их  $n^{1/2} = 4$  клетками положительных элементов того же размера 4 на диагонали (рис. 3).

Переход к форме Буша усложнен концентрацией положительных элементов в ее крупных по размеру диагональных блоках, ввиду тривиальности которых узоры соседних блоков получаются довольно изощренными. В итоге орнамент промежуточной структуры порядка 196 не найден.



■ **Рис. 3.** Матрицы Райзера порядка 4 и Буша порядка 16

■ **Fig. 3.** Matrices of Ryser for order 4 and Bush for order 16

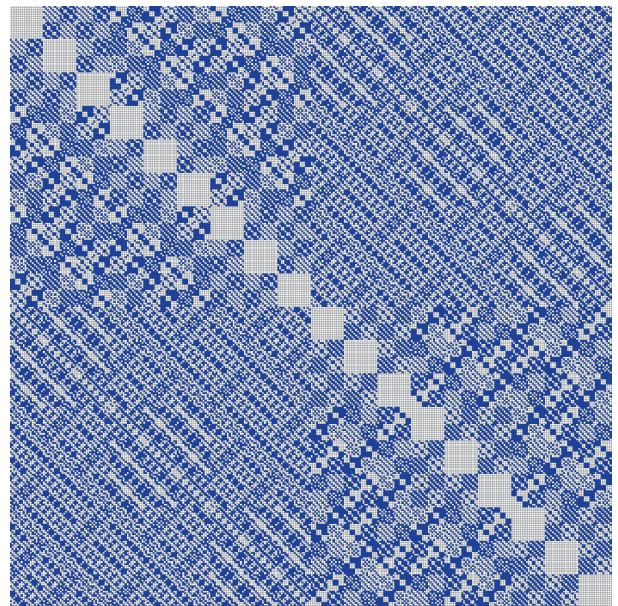
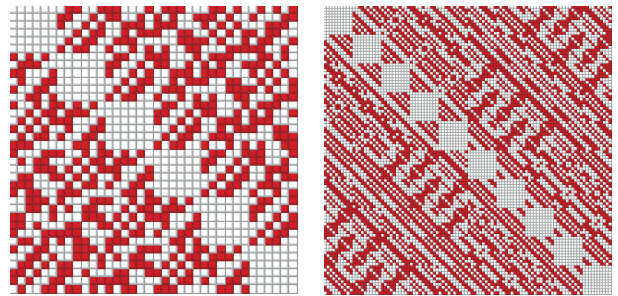
В качестве иллюстрации на рис. 4 представлены не приводившиеся ранее в виде орнаментов в литературе портреты матриц Буша порядков 36, 100 и 324 [31–33]. Второй орнамент найден первым автором данной статьи с помощью Владимира Тончева, одного из исследователей этих редких находок.

Для лучшей разрешимости узора в рассмотрении вводят два, три или четыре блока. Наиболее популярные блочные орнаменты матриц Адамара складываются в циклическую, бициклическую и т. п. конструкции, восходящие в своем содержании к более вариативному заполнению выделен-

ных еще Сильвестром блоков  $A, \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -A^T \end{pmatrix}, \dots$ ,

здесь транспонирование «помогает» конструкции быть ортогональной. Условие ортогональности (1) для матрицы с парой блоков сводится к требованию ортогональности суммы  $A^T A + B^T B = nI$ .

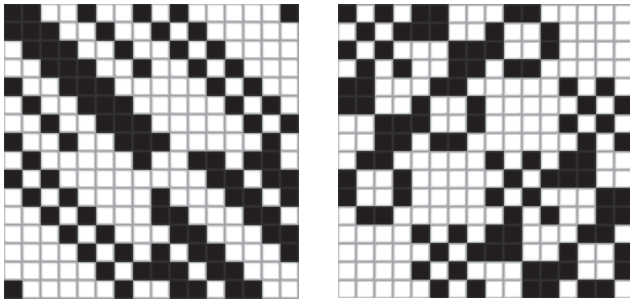
На рис. 5 приведена пара разных по своему характеру реализаций матриц с симметричными блоками  $A, B$  размера  $8 \times 8$  с параметрами  $k_1 = 4, \lambda_1 = 2$  и  $k_2 = 2, \lambda_2 = 0$ . Первая матрица более про-



■ **Рис. 4.** Матрицы Буша порядков 36, 100, 324

■ **Fig. 4.** Bush matrices for orders 36, 100, 324  
doi:10.31799/1684-8853-2018-6-6-fig4





■ *Рис. 5.* Орнаменты матриц Адамара порядков 16  
 ■ *Fig. 5.* Hadamard matrix ornaments for order 16

ста, поскольку в качестве блоков взяты циклические матрицы.

Вторая матрица построена на основе отраженной относительно центральной вертикальной линии матрицы Буша порядка 16. Каждый блок **A**, **B** размера  $8 \times 8$  состоит из трех разных по своему орнаменту субблоков. Так как это размер регулярной матрицы Адамара, структуру, напоминающую матрешку, порождает требуемый для реализации регулярной конструкции дизайн Менона с параметрами  $k = k_1 + k_2 = 6$ ,  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 2$ ,  $k - \lambda = n/4 = 4$ . Таким образом, если циклическая структура недостаточно гибка, чтобы быть ортогональной на рассматриваемом порядке, узор усложняется. Важно вовремя остановиться в измельчении матрицы.

Диофантово уравнение реализуемого составного узора из нескольких блоков не претерпевает сколь-нибудь заметного изменения:

$$\sum k_i(k_i - 1) = \lambda(v - 1), \quad (6)$$

суммирование здесь и далее идет по всем индексам блоков, которых может быть 1, 2 и 4 (3 при равенстве двух блоков). Так как параметр  $\lambda = \sum \lambda_i$  связан с условием ортогональности всей матрицы в целом, его можно не разделять на составляющие. Это общий коэффициент, условие ортогональности с ним не изменяется.

**Лемма 3.3.** Для ортогональных блочных матриц

$$\lambda = k - n/4, \quad (7)$$

где  $k = \sum k_i$ ,  $k_i$  — параметры блоков, каждый из которых представляет собой количество элементов  $-1$  строки блока;  $n$  — порядок матрицы.

*Доказательство:* При рассмотрении блочных конструкций, для которых выполняются тождество  $A^T A + B^T B = nI$  и сходные с ним для большего числа блоков, годятся все те же суждения, что и для леммы 3.1. Роль  $k$  выполняет суммарный коэффициент.

Разбиение всего массива на блоки фактически не сказывается на значениях суммарных параметров  $k = \sum k_i$  и  $\lambda = \sum \lambda_i$  первых  $v$  строк, где  $v$  — размер блока.

Ортогональность остальных строк всей матрицы гарантируется блочной ортогональностью массива.

Лемма доказана.

**Лемма 3.4.** Диофантово уравнение реализуемого ортогонального узора имеет вид

$$\sum x_i^2 = n, \quad (8)$$

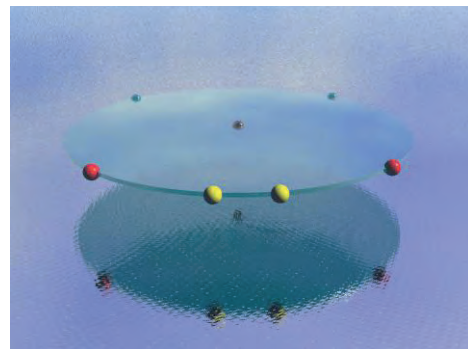
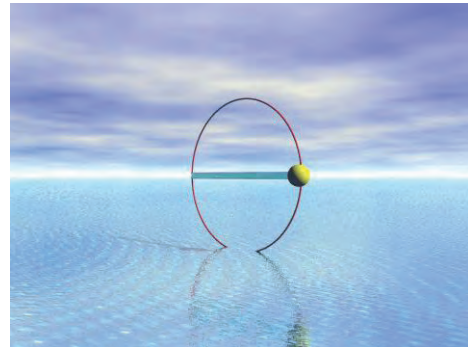
причем  $k_i = (v - x_i)/2$ . Для одноблочных матриц, разумеется, длина строки блока  $v = n$ .

*Доказательство:* Подставив значение  $\lambda$  из леммы 3.3 в уравнение узора, имеем новое условие  $\sum k_i(k_i - 1) = (k - n/4)(n - 1)$ , которое, как легко проверить, превращается в тождество заменой переменных  $k_i = (v - x_i)/2$ ,  $k = \sum k_i$ .

Лемма доказана.

С увеличением числа блоков узора проблемы, описываемые теоремой Брука — Райзера — Човлы для одноблочного дизайна, отходят на второй план. На первое место выдвигаются теоремы Эйлера и Лагранжа. Гауссовы точки (рис. 6) — точки с целыми координатами на линии, удовлетворяющие условию  $x^2 = n$ , и на окружности  $x^2 + y^2 = n$ . При дальнейшем увеличении числа блоков они имеют продолжение в виде точек на сфере (или сфероиде).

Для первого примера циклический орнамент исчерпывается на порядке  $x^2 = n = 4$ . Целые точки на окружности  $x^2 + y^2 = n$  помогают глубже понять логику орнаментов многоблочных матриц через бициклы.



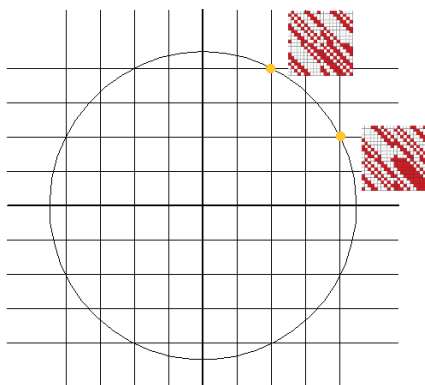
■ *Рис. 6.* Точки Гаусса на линии и на окружности  
 ■ *Fig. 6.* Gauss's points at line and circle

**Теорема Эйлера.** Любое число вида  $4t + 1$  разлагается на сумму двух квадратов.

Это касается также составных чисел, в которых нечетные множители вида  $4t + 3$  (или их нечетные степени) свидетельствуют о неразложимости числа на сумму двух квадратов. Содержимое теоремы, не раскрывая доказательства, Ферма описал математику Мерсенну. Кроме того, Ферма считал, что любое число последовательно представимо суммой трех треугольных чисел, четырех квадратов и т. п. Доказать последнее положение удалось Лагранжу.

Бициклический орнамент существует, соответственно, не всегда, а тогда, когда  $n = 4p$  разложимо на сумму двух квадратов, т. е. когда значение  $p$  — простое число (или степень его) вида  $p \equiv 1 \pmod 4$ . Точки идут парами, поскольку блоки бицикла всегда можно переставить местами. На рис. 6 пара красных точек соответствует регулярной бициклической матрице порядка 100. Если исключить из рассмотрения порядки регулярных матриц, то точек на окружности всего две. Например, для бициклической матрицы порядка 20 при  $x = 2, y = 4$  матрицы **A** и **B** имеют параметры  $k_1 = (v - x)/2 = 4, k_2 = (v - y)/2 = 3$ , матрицы можно переставить местами.

Если  $n = 4u^2, u = 3, 7, 11, \dots \equiv 3 \pmod 4$ , то сумма квадратов существует, но влияние множителя



■ Рис. 7. Точки Гаусса на окружности и бициклы

■ Fig. 7. Gauss's points at circle and two circulant matrices

$4t + 3$  даже в четной степени сказывается в том, что конструкция бициклической матрицы становится недостаточно гибка. Это порядки 36, 196, ... регулярных матриц, орнаменты которых должны существовать и в качестве моноблоков. Матрица Буша порядка 36 (см. рис. 5) дает представление о «заместителе» бициклической конструкции. Для удвоенного порядка 72 матрица разрешима блочным орнаментом, в блоках стоит сама регулярная структура. Если еще более увеличить размер, то добьемся разрешимости матрицы порядка 144 в бициклической конструкции — известное свойство матриц Адамара «вместить» более простые конструкции по мере роста их размера: квадрат радиуса разрешимой окружности пришлось увеличить в 4 раза.

Таким образом, отсутствие бициклических матриц порядка 36 и наличие двух реализаций бицикла 100, среди которых один регулярный, неожиданно находит объяснение положением точек на окружности и характером радиуса этой окружности (см. рис. 6, 7).

Обращаясь к теореме Лагранжа о разложимости любого числа на сумму четырех квадратов, Вильямсон в сороковые годы предложил использовать четырехблочную конструкцию [7]. Он сэкономил на числе независимых элементов матрицы Адамара, взяв симметричные блоки (матрицы Вильямсона) **A, B, C, D** вложенными в кососимметрическую конструкцию **W**, называемую с тех пор массивом Вильямсона. Построенная на двух типах симметрий, облегченная форма позволила Голомбу, Баумерту и Холлу найти первую компьютерную матрицу порядка 92 [8]. На настоящий день массив идет в паре со своим обобщением **S**, использованным [9] для поиска кососимметричной матрицы

$$W = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & B \\ -D & -C & -B & A \end{pmatrix};$$

$$S = \begin{pmatrix} A & BR & CR & DR \\ -BR & A & -RD & RC \\ -CR & RD & A & RB \\ -DR & -RC & -RB & A \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где **R** — обратная единичная матрица, т. е. матрица с единицами вдоль второй не главной диагонали квадрата. Если не обращать внимание на симметрию или кососимметрию блоков, то второй массив называют массивом Гетхальса — Зейделя.

Требование ортогональности матрицы в целом  $A^T A + B^T B + C^T C + D^T D = nI$  упрощается для симметричных блоков Вильямсона до вида  $A^T = A, B^T = B, C^T = C, D^T = D$ . Леммы 3.3 и 3.4 для таких

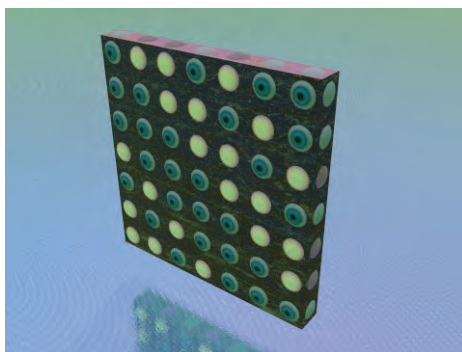
массивов применимы, число составляющих сумм возрастает до четырех. Ближе к завершению прошлого века Драгомир Джокович полным перебором доказал отсутствие матриц Адамара порядка 140, построенных на циклических матрицах Вильямсона [34]. Позднее было найдено еще несколько неразрешимых порядков [35]. Дженнифер Себерри, пожалуй, первой обратила внимание на то, что кососимметричная конструкция  $S$  наделена в мире орнаментов большим выживанием.

С тех пор она называется массивом Себерри или Себерри — Вайтмана. Далее будет показан путь к симметричной трехблочной конструкции, называемой массивом Балонина — Себерри [16]. Появилась она в работах по аппроксимации матриц Адамара, включая порядок 668, симметричными трехуровневыми матрицами, имеющими одинаковый узор всех четырех блоков. Задача легко разрешима, если центральный блок вместо  $-1$  имеет варьируемый уровень  $-b$ , он поднимается к  $-1$  при освобождении узоров пары крайних блоков  $A, D$ .

### Двухуровневые матрицы с варьируемым элементом

Посмотрим, что будет, если в силу возможного нормирования максимального элемента матрицы сохранить его равным  $a = 1$ . Отрицательный элемент обозначим как  $-b$ , полагая, что  $b$  свободно варьируется в диапазоне от 0 до 1, проходя, в том числе, и иррациональные значения. На рис. 8 элемент с плавающим значением обозначен монотонной окраской.

Так как бинарность матрицы этим назначением сохраняется, диофантово уравнение реализуемого узора не меняется. Узор матриц из двух блоков  $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -A^T \end{pmatrix}$  порядка  $n = 2v$  описывается, со-



■ **Рис. 8.** Циклический моноблок с плавающим значением элемента  
 ■ **Fig. 8.** Circulant monoblock with floating value of entry

гласно (6), уравнением относительно параметров парного дизайна  $k_1(k_1 - 1) + k_2(k_2 - 1) = \lambda(v - 1)$ . Идея заключается в том, чтобы выбором  $\lambda$  свести его к уравнению окружности, заведомо касающейся точки с целыми координатами. Поскольку значения уровней не фиксированы жестко, имеется возможность выбора желаемой  $\lambda$ .

**Лемма 4.1.** Диофантово уравнение реализуемого ортогонального узора для двухблочной конструкции порядка  $n = 2v = 4t - 2$  с длиной строки  $v = 2t - 1$  выбором  $\lambda = (v - 3)/2 = t - 2$  сводится к паре разрешимых уравнений, описывающих общую точку окружности и линии, представленную на рис. 9, выражается как

$$x^2 + y^2 = 2, \quad x + y = 2 \quad (10)$$

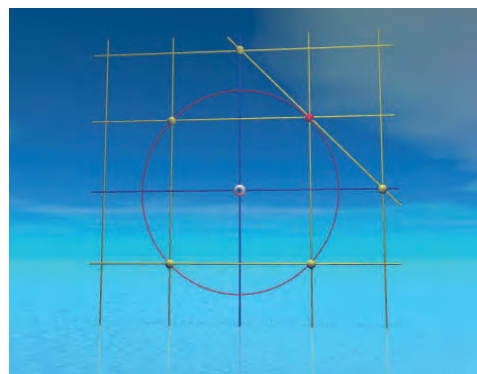
и получается после замены переменных  $k_1 = t - x$ ,  $k_2 = t - y$ , приводящей для точки решения  $x = 1$ ,  $y = 1$  к равенству  $k_1 = k_2 = t - 1 = (v - 1)/2$ .

*Доказательство* заключается в подстановке указанных значений параметров  $k_1 = k_2$ , следующих из (10), при длине строки  $v = n/2 = 2t - 1$  в уравнение ортогональности. Для случая  $A^T A + B^T B = nI$  имеем характеристическое уравнение  $\lambda b^2 - 2(k - \lambda)ab + (n - 2k + \lambda)a^2 = 0$ ,  $k = k_1 + k_2 = 2(t - 1)$ . Оно сводится к всегда разрешимому относительно «плавающего» значения элемента  $b$  уравнению  $(t - 2)b^2 - 2tb + t = 0$ .

*Доказательство закончено.*

Достижимый дизайн  $\{n = 2v; k_1, k_2; \lambda\} = \{n = 2v; (v - 1)/2, (v - 1)/2; (v - 3)/2\}$  назовем *эйлеровым*, поскольку разложениями чисел на сумму пары квадратов чисел занимался именно он. Попутно мы доказали важную теорему.

**Теорема 3.1.** Матрицы Эйлера, задаваемые *эйлеровым дизайном*, с уровнями  $a = 1$  и  $-b$ ,  $b = \frac{t}{t + \sqrt{2t}}$ , существуют для всех значений  $n = 2v = 4t - 2$ .



■ **Рис. 9.** Общая точка окружности и линии  
 ■ **Fig. 9.** Common point of circle and line

*Доказательство* сводится к нахождению положительного корня характеристического уравнения  $(t - 2)b^2 = 2tb + t = 0$ . Так как мы не связаны с требованием рациональности элемента, нам нет необходимости заботиться о рациональном решении.

*Доказательство закончено.*

Теорема эта была высказана сначала в виде предположения относительно существования матриц Мерсенна на всех нечетных порядках  $n = 4t - 1$  [36–38] и матриц Эйлера на  $4t - 2$ .

Ввиду инверсии знака блока в нижнем правом углу матрицы Эйлера  $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -A^T \end{pmatrix}$ , это матри-

ца с четырьмя элементами  $a, -b, -a, b$ . Добавим к ней составную кайму из строки и столбца, состоящих из 1, далее  $v$  отрицательных элементов и  $v$  положительных элементов, не обращая внимания на варьируемые элементы.

В таком случае значения параметров в каждой строке новой структуры порядка  $n = 4t - 1$  возрастут на 1, т. е.  $k = k_1 + k_2 + 1 = 2(t - 1) + 1 = 2t - 1$  и  $\lambda = (t - 2) + 1 = t - 1$ . Эта операция превращает бициклическую конструкцию в моноблок с двумя элементами  $a = 1, -b$  в каждой строке. Дизайн  $\{n = 4t - 1; k; \lambda\} = \{n = 4t - 1; 2t - 1; t - 1\}$  назовем *мерсенновым* по причине вхождения чисел Мерсенна  $M_p = 2^p - 1$  (с соответствующими решениями) в последовательность  $n = 4t - 1$ . Этот дизайн комплементарен так называемому адамарову дизайну  $\{4t - 1; 2t; t\}$ .

**Теорема 4.2.** Матрицы Мерсенна, задаваемые *мерсенновым дизайном* с уровнями  $a = 1$  и

$-b$ , где  $b = \frac{t}{t + \sqrt{t}}$ , существуют для всех значений

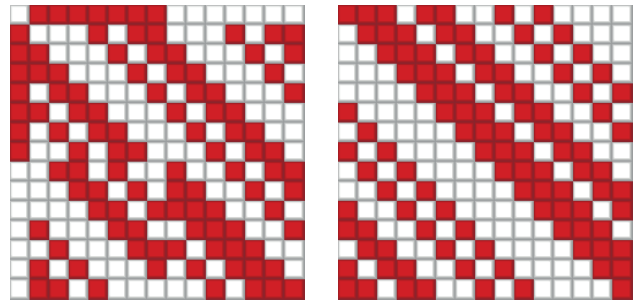
$n = 4t - 1$ .

*Доказательство:* Подстановкой параметров уравнение ортогональности моноцикла  $\lambda b^2 - 2(k - \lambda)ab + (n - 2k + \lambda)a^2 = 0$  сводится к  $(t - 1)b^2 - 2tb + t = 0$ , разрешимому указанным выше значением  $b$ .

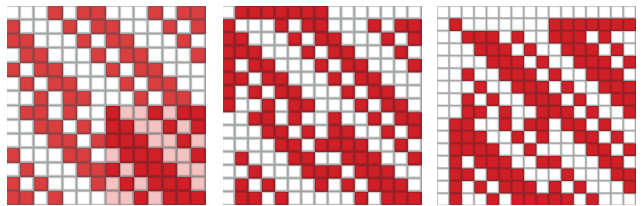
*Доказательство закончено.*

Более простой циклический орнамент матриц Мерсенна, представленный на рис. 10, существует только для порядков, равных числам Мерсенна 3, 7, 15, ..., простым числам или произведениям пар близких простых чисел, например,  $15 = 3 \times 5, 35 = 5 \times 7, \dots$  [38].

Квадратичные уравнения имеют два корня, описывающих значения элементов при превалировании и при дефиците отрицательных элементов матрицы. В качестве решения для значений элементов было выбрано то из них, которое обеспечивает большее значение детерминанта матрицы. Итак, мы доказали, что последовательно находимые друг из друга матрицы Эйлера и



■ **Рис. 10.** Два  $\{15, 7, 3\}$ -орнамента матриц Мерсенна  
 ■ **Fig. 10.** Two  $\{15, 7, 3\}$ -ornaments of Mersenne matrix  
 doi:10.31799/1684-8853-2018-6-10-fig10



■ **Рис. 11.** Переход от бицикла Эйлера к моноблокам Мерсенна и Адамара  
 ■ **Fig. 11.** Transition from a bicycle of Euler to monoblocks of Mersenne and Hadamard  
 doi:10.31799/1684-8853-2018-6-10-fig11

Мерсенна существуют. Матрицы эти почти неизвестны, они вещественные. Элементы не зажаты условием целочисленности — они «плавающие». И, казалось бы, в них мало удивительного.

**Следствие 4.2.1.** Матрицы Адамара, задаваемые *мерсенновым дизайном* с уровнями  $a = 1$  и  $-b, b = 1$ , существуют для всех значений  $n = 4t$ .

В самом деле, *мерсеннов дизайн* содержит всегда реализуемый ортогональный узор. Следуя предыдущей методике, добавим к нему монотонную кайму, состоящую из элементов  $-b$ .

Поскольку дизайн Мерсенна представляет собой моноблок, получим матрицу порядка  $n = 4t$ , у которой  $k = 2t$  элементов и  $\lambda = t$ . Уравнение ортогональности  $\lambda b^2 - 2(k - \lambda)ab + (n - 2k + \lambda)a^2 = 0$  сводится к  $b^2 - 2b + 1 = 0$ , разрешимому значением  $b = 1$ . Заметим, что мы не навязываем целочисленное значение «плавающего уровня». Обычно кайму матриц Адамара нормализуют, чтобы она состояла из положительных элементов, цепочку преобразований узоров описывает рис. 11.

Проверим условия Брука — Райзера — Човлы, они сводятся к существованию решения уравнения  $z^2 = tx^2 - (t - 1)y^2$  в целых, не равных одновременно 0. Очевидно, что  $z = 1, x = 1, y = 1$  есть решение, и, значит, с этой стороны нет ограничений на существование матрицы Адамара, что отметил Холл в работе [12].

*Окончание следует.*

## Литература

1. **Hadamard J.** Résolution d'une Question Relative aux Déterminants. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246.
2. **Seberry J., Yamada M.** *Hadamard matrices, sequences, and block designs*. J. H. Dinitz and D. R. Stinson eds. John Wiley and Sons, Inc., 1992. P. 431–560.
3. *Handbook of combinatorial designs* (Discrete mathematics and its applications). Ed. by Charles J. Colbourn, Jeffrey H. Dinitz. 2nd ed. Chapman and Hall/CRC, 2006. 1000 p.
4. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Нормы обобщенных матриц Адамара. *Вестник СПбГУ*. Сер. 10, 2014, вып. 2, с. 5–11.
5. **Balonin N. A., and Seberry, Jennifer.** Remarks on extremal and maximum determinant matrices with real entries  $\leq 1$ . *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 5, с. 2–4.
6. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрица золотого сечения G10. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 6, с. 2–5.
7. **Williamson J.** Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares. *Duke Math. J.*, 1944, vol. 11, pp. 65–81.
8. **Baumert L., Golomb S. W., Hall M.** Discovery of an Hadamard matrix of order 92. *JR. Communicated by F. Bohnenblust, California Institute of Technology*, Bull. Amer. Math. Soc., 1962, vol. 68, pp. 237–238.
9. **Seberry Wallis J.** A class of Hadamard matrices. Communicated by Marshall Hall. *Journal of Combinatorial Theory*, 1969, vol. 6, pp. 40–44.
10. **Bruck R. H., Ryser H. J.** The nonexistence of certain finite projective planes. *Canadian J. Math.*, 1949, vol. 1, pp. 88–93. doi:10.4153/cjm-1949-009-2
11. **Chowla S., Ryser H. J.** Combinatorial problems. *Canadian J. Math.*, 1950, vol. 2, pp. 93–99. doi:10.4153/cjm-1950-009-8
12. **Hall M.** *Combinatorial theory*. 2nd ed. New York, Wiley, 1998. 464 p.
13. **Ryser H. J.** *Combinatorial mathematics*. The carus mathematical monographs. The mathematical association of America, New York, JohnWiley and Sons, 1963, no. 14. 162 p.
14. **Балонин Н. А., Джокович Д. Ж.** Симметрия двуклических матриц Адамара и периодические пары Голея. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 3, с. 2–16. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
15. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Расширение гипотезы Райзера на двуклические структуры и разрешимость матриц Адамара орнаментом в виде бицикла с двойной каймой. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 1, с. 2–10. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
16. **Balonin N. A., Seberry J.** Two infinite families of symmetric Hadamard matrices. *Australian Journal of Combinatorics*, 2017, vol. 69(3), pp. 349–357.
17. **Balonin N. A., Balonin Y. N., Đoković D. Ž., Karbovskiy D. A., Sergeev M. B.** Construction of symmetric Hadamard matrices. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 5, с. 2–11. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.5.2 (16 Aug 2017: arXiv:1708.05098).
18. **Balonin N. A., Đoković D. Ž., Karbovskiy D. A.** Construction of symmetric Hadamard matrices of order  $4v$  for  $v = 47, 73, 113$ . *Special Matrices*, 2018, vol. 6, pp. 11–22 (9 Oct 2017: arXiv:1710.03037).
19. **Balonin N. A., Đoković D. Ž.** Symmetric Hadamard matrices of orders 268, 412, 436 and 604. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 4, с. 2–8. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-2-8 (23 Mar 2018: arXiv:1803.08787)
20. **Balonin N. A., Djocovic D. Z.** Negaperiodic Golay pairs and Hadamard matrices. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 5, с. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
21. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Взвешенная конференц-матрица, обобщающая матрицу Белевича на 22-м порядке. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 5, с. 97–98.
22. **Balonin N. A., Seberry J.** A review and new symmetric conference matrices. *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 4, с. 2–7.
23. **Silvester J. J.** Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers. *Philosophical Magazine*, 1867, no. 34, pp. 461–475.
24. **Scarpis U.** Sui determinanti di valore Massimo. *Rendiconti della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1898, no. 31, pp. 1441–1446.
25. **Đoković D. Ž.** Generalization of Scarpis' theorem on Hadamard matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, no. 10, pp. 1985–1987. doi:10.1080/03081087.2016.1265062
26. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы Мерсенна и Адамара. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 1, с. 2–15. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.1.2
27. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы Мерсенна и Адамара, произведения. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 5, с. 2–14. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.2
28. **Gilman R. E.** On the Hadamard determinant theorem and orthogonal determinants. *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 1931, vol. 37, pp. 30–31.
29. **Paley R. E. A. C.** On orthogonal matrices. *Journal of Mathematics and Physics*, 1933, vol. 12, pp. 311–320.
30. **Malcolm W. Browne.** *Is a math proof a proof if no one can check it?* The New York Times. 1 december. 1988.
31. **Janko Z.** The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 36 and two new infinite classes of symmetric designs. *Journal of Combinatorial Theory*, 2001, ser. A, vol. 95, no. 2, pp. 360–364.

32. Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. Bush-type Hadamard matrices and symmetric symmetric designs. *J. Combin.*, 2001, no. 1, pp. 72–78.
33. Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 324 and two new infinite classes of symmetric designs. *Des. Codes Cryptogr.*, 2001, vol. 24, no. 2, pp. 225–232.
34. Đoković D. Ž. Williamson matrices of order  $4n$  for  $n = 33; 35; 39$ . *Discrete Math.*, 1993, vol. 115, pp. 267–271.
35. Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. Williamson matrices up to order 59. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, no. 46, pp. 343–352.
36. Балонин Н. А. О существовании матриц Мерсенна 11-го и 19-го порядков. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 2, с. 89–90.
37. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. К вопросу существования матриц Мерсенна и Адамара. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 5, с. 2–8.
38. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Матрицы локального максимума детерминанта. *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 1, с. 2–15.

UDC 519.614

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-2-13

### Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 1

N. A. Balonin<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0001-7338-4920, korbendfs@mail.ru

M. B. Sergeev<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-3845-9277

<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** Hadamard conjecture about the existence of specific square matrices was formulated not by Hadamard but by other mathematicians in the early 20th century. Later, this problem was revised by Ryser together with Bruck and Chowla, and also by Hall, one of the founders of discrete mathematics. This is a problem of the boundary mixed type, as it includes both the continuous and discrete components. The combinatorial approach used in the framework of the discrete component has run its course by the end of the century. The article discusses an alternative based on both concepts. **Purpose:** To analyze the reasons why the conjecture about the existence of Hadamard matrices of all orders  $n = 4t$  is considered unproven, and to propose possible ways to prove it. **Methods:** Transition, by lowering the order  $n = 4t - 2$ , to two-level quasiorthogonal matrices with elements 1 and  $-b$  whose existence on all specified orders is not a difficult problem due to the possible irrationality of their entries. Subsequent construction of a chain of transformations to matrix orders  $n = 4t - 1$ ,  $n = 4t$ ,  $n = 4t + 1$ . **Results:** It is proved that Gauss points on an  $x^2 + 2y^2 + z^2 = n$  spheroid are in one-to-one correspondence with symmetric Hadamard matrices (constructed on the basis of the Balonin — Seberry arrays), covering up the gaps on the unsolvable orders 140, 112, etc. known in Williamson’s array theory. Solution tables are found and systematized, which include so-called «best» three-block matrices  $L(p, q)$ , where  $p \geq q$  is the number of non-conjugated symmetric matrices of the order in question, and  $q$  is the number of block-symmetric matrices which coincide with Williamson’s solutions. The iterative Procrustes algorithm which reduces the norm of the maximum entry in a matrix is proposed for obtaining Hadamard matrices by searching for local and global conditional extremes of the determinant. **Practical relevance:** The obtained Hadamard matrices and quasi-orthogonal matrices of orders  $n = 4t - 2$ ,  $n = 4t - 1$ ,  $n = 4t + 1$  are of immediate practical importance for the problems of noise-resistant coding, compression and masking of video information.

**Keywords** — orthogonal matrices, Hadamard matrices, Hadamard conjecture, circulant matrices, negacirculant matrices, two-circulant matrices, Williamson array, Balonin — Seberry array, Procrustes algorithms.

**Citation:** Balonin N. A., Sergeev M. B. Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 1. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 2–13 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-2-13

### References

- Hadamard J. Résolution d’une Question Relative aux Déterminants. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246 (In French).
- Seberry J., Yamada M. Hadamard matrices, sequences, and block designs. *Contemporary design theory: A collection of surveys*. J. H. Dinitz and D. R. Stinson eds. John Wiley and Sons, Inc., 1992. P. 431–560.
- Handbook of combinatorial designs* (Discrete mathematics and its applications). Ed. by Charles J. Colbourn, Jeffrey H. Dinitz. 2nd ed. Chapman and Hall/CRC, 2006. 1000 p.
- Balonin N. A., Sergeev M. B. The generalized Hadamard matrix norms. *Vestnik SPbGU*, ser. 10, 2014, vol. 2, pp. 5–11 (In Russian).
- Balonin N. A., Seberry Jennifer. Remarks on extremal and maximum determinant matrices with real entries  $\leq 1$ . *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2014, no. 5, pp. 2–4.
- Balonin N. A., Sergeev M. B. Matrix of golden ratio G10. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 6, pp. 2–5 (In Russian).
- Williamson J. Hadamard’s determinant theorem and the sum of four squares. *Duke Math. J.*, 1944, vol. 11, pp. 65–81.
- Baumert L., Golomb S. W., Hall M. Discovery of an Hadamard matrix of order 92. *JR. Communicated by F. Bohnenblust*, California Institute of Technology, Bull. Amer. Math. Soc., 1962, vol. 68, pp. 237–238.
- Seberry Wallis J. A class of Hadamard matrices. Communicated by Marshall Hall. *Journal of Combinatorial Theory*, 1969, vol. 6, pp. 40–44.
- Bruck R. H., Ryser H. J. The nonexistence of certain finite projective planes. *Canadian J. Math.*, 1949, vol. 1, pp. 88–93. doi:10.4153/cjm-1949-009-2
- Chowla S., Ryser H. J. Combinatorial problems. *Canadian J. Math.*, 1950, vol. 2, pp. 93–99. doi:10.4153/cjm-1950-009-8
- Hall M. *Combinatorial theory*. 2nd ed. New York, Wiley, 1998. 464 p.
- Ryser H. J. *Combinatorial mathematics*. The carus mathematical monographs. The mathematical association of America, New York, John Wiley and Sons, 1963, no. 14. 162 p.

14. Balonin N. A., Đoković D. Ž. Symmetry of two-circulant Hadamard matrices and periodic Golay pairs. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2015, no. 3, pp. 2–16 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
15. Balonin N. A., Sergeev M. B. Ryser's conjecture expansion for bicirculant structures and Hadamard matrix resolvability by double-border bicycle ornament. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2017, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
16. Balonin N. A., Seberry J. Two infinite families of symmetric Hadamard matrices. *Australian Journal of Combinatorics*, 2017, vol. 69(3), pp. 349–357.
17. Balonin N. A., Balonin Y. N., Đoković D. Ž., Karbovskiy D. A., Sergeev M. B. Construction of symmetric Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2017, no. 5, pp. 2–11. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.5.2 (16 Aug 2017; arXiv:1708.05098).
18. Balonin N. A., Đoković D. Ž., Karbovskiy D. A. Construction of symmetric Hadamard matrices of order  $4v$  for  $v=47, 73, 113$ . *Special Matrices*, 2018, vol. 6, pp. 11–22 (9 Oct 2017; arXiv:1710.03037).
19. Balonin N. A., Đoković D. Ž. Symmetric Hadamard matrices of orders 268, 412, 436 and 604. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2018, no. 4, pp. 2–8. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-2-8 (23 Mar 2018; arXiv:1803.08787).
20. Balonin N. A., Đoković D. Ž. Negaperiodic Golay pairs and Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2015, no. 5, pp. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
21. Balonin N. A., Sergeev M. B. Weighted conference matrix generalizing Belevich matrix at the 22nd order. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 5, pp. 97–98 (In Russian).
22. Balonin N. A., Seberry J. A review and new symmetric conference matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2014, no. 4, pp. 2–7.
23. Sylvester J. J. Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers. *Philosophical Magazine*, 1867, no. 34, pp. 461–475.
24. Scarpis U. Sui determinanti di valore Massimo. *Rendiconti della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1898, no. 31, pp. 1441–1446 (In Italian).
25. Đoković D. Ž. Generalization of Scarpis' theorem on Hadamard matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, no. 10, pp. 1985–1987. doi:10.1080/03081087.2016.1265062
26. Balonin N. A., Sergeev M. B. Mersenne and Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2016, no. 1, pp. 2–15 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.1.2
27. Balonin N. A., Sergeev M. B. Mersenne and Hadamard matrices, products. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2016, no. 5, pp. 2–14 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.2
28. Gilman R. E. On the Hadamard determinant theorem and orthogonal determinants. *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 1931, vol. 37, pp. 30–31.
29. Paley R. E. A. C. On orthogonal matrices. *Journal of Mathematics and Physics*, 1933, vol. 12, pp. 311–320.
30. Malcolm W. Browne. *Is a math proof a proof if no one can check it?* The New York Times. 1 december. 1988.
31. Janko Z. The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 36 and two new infinite classes of symmetric designs. *Journal of Combinatorial Theory*, 2001, ser. A, vol. 95, no. 2, pp. 360–364.
32. Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. Bush-type Hadamard matrices and symmetric symmetric designs. *J. Combin.*, Dec. 9, 2001, no. 1, pp. 72–78.
33. Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 324 and two new infinite classes of symmetric designs. *Des. Codes Cryptogr.*, 2001, vol. 24, no. 2, pp. 225–232.
34. Đoković D. Ž. Williamson matrices of order  $4n$  for  $n=33;35;39$ . *Discrete Math.*, 1993, vol. 115, pp. 267–271.
35. Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. Williamson matrices up to order 59. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, no. 46, pp. 343–352.
36. Balonin N. A. Existence of Mersenne matrices of 11th and 19th orders. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 2, pp. 89–90 (In Russian).
37. Balonin N. A., Sergeev M. B. On the issue of existence of Hadamard and Mersenne matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 5, pp. 2–8 (In Russian).
38. Balonin N. A., Sergeev M. B. Local maximum determinant matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2014, no. 1, pp. 2–15 (In Russian).

## УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научная электронная библиотека (НЭБ) продолжает работу по реализации проекта SCIENCE INDEX. После того как Вы регистрируетесь на сайте НЭБ (<http://elibrary.ru/defaultx.asp>), будет создана Ваша личная страничка, содержание которой составят не только Ваши персональные данные, но и перечень всех Ваших печатных трудов, имеющих в базе данных НЭБ, включая диссертации, патенты и тезисы к конференциям, а также сравнительные индексы цитирования: РИНЦ (Российский индекс научного цитирования), h (индекс Хирша) от Web of Science и h от Scopus. После создания базового варианта Вашей персональной страницы Вы получите код доступа, который позволит Вам редактировать информацию, помогая создавать максимально объективную картину Вашей научной активности и цитирования Ваших трудов.

UDC 338.984

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-14-23

# Exact solution method for Fredholm integro-differential equations with multipoint and integral boundary conditions. Part 1. Extension method

N. N. Vassiliev<sup>a,b</sup>, PhD, Tech., Senior Researcher, [orcid.org/0000-0002-0841-1168](https://orcid.org/0000-0002-0841-1168), [vasiliev@pdmi.ras.ru](mailto:vasiliev@pdmi.ras.ru)

I. N. Parasidis<sup>c</sup>, PhD, Associate Professor, [paras@teilar.gr](mailto:paras@teilar.gr)

E. Providas<sup>d</sup>, PhD, Associate Professor, [providas@teilar.gr](mailto:providas@teilar.gr)

<sup>a</sup>Saint-Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the RAS, 27, Fontanka, 191023, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup>Saint-Petersburg Electrotechnical University ETU "LETI", 5, Professora Popova St., 197376, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>c</sup>Department of Electrical Engineering, Technological Educational Institute of Thessaly, 41110, Larissa, Greece

<sup>d</sup>Department of Mechanical Engineering, Technological Educational Institute of Thessaly, 41110, Larissa, Greece

**Introduction:** Boundary value problems for differential and integro-differential equations with multipoint and non-local boundary conditions often arise in mechanics, physics, biology, biotechnology, chemical engineering, medical science, finances and other fields. Finding an exact solution of a boundary value problem with Fredholm integro-differential equations is a challenging problem. In most cases, solutions are obtained by numerical methods. **Purpose:** Search for necessary and sufficient solvability conditions for abstract operator equations and their exact solutions. **Results:** A direct method is proposed for the exact solution of a certain class of ordinary differential or Fredholm integro-differential equations with separable kernels and multipoint/integral boundary conditions. We study abstract equations of the form  $Bu = Au - \mathbf{gF}(Au) = f$  and  $B_1u = A^2u - \mathbf{qF}(Au) - \mathbf{gF}(A^2u) = f$  with non-local boundary conditions  $\Phi(u) = \mathbf{N}\Psi(u)$  and  $\Phi(u) = \mathbf{N}\Psi(u)$ ,  $\Phi(Au) = \mathbf{D}\mathbf{F}(Au) + \mathbf{N}\Psi(Au)$ , respectively, where  $A$  is a differential operator,  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{g}$  are vectors,  $\mathbf{D}$  and  $\mathbf{N}$  are matrices, and  $\mathbf{F}$ ,  $\Phi$  and  $\Psi$  are functional vectors. This method is simple to use and can be easily incorporated into any Computer Algebra System (CAS). The upcoming Part 2 of this paper will be devoted to decomposition method for this problem where the operator  $B_1$  is quadratic factorable.

**Keywords** – differential and Fredholm integro-differential equations, multipoint and non-local integral boundary conditions, correct operators, exact solutions.

**Citation:** Vassiliev N. N., Parasidis I. N., Providas E. Exact solution method for Fredholm integro-differential equations with multipoint and integral boundary conditions. Part 1. Extension method. *Informatsionno-upravliaushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 14–23. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-14-23

## Introduction

Boundary value problems (BVP) for differential and integro-differential equations (IDE) with multipoint and nonlocal boundary conditions arise in various fields of mechanics, physics, biology, biotechnology, chemical engineering, medical science, finance and others [1–14]. More precisely these are elasticity, heat and mass transfer, diffraction, underground water flow and population dynamics problems. Perhaps the first known problem which was reduced to the IDE  $a_1 y^{iv}(t) + y(t) = -a_2 \int_{-1}^1 K(t, x) y^{iv}(x) dx$  is Proctor's problem of Equilibrium of an elastic beam in XVII century. Fredholm integro-differential equations with nonlocal integral boundary conditions and ordinary differential operators, probably, first were considered by J. D. Tamarkin [15]. Problems with nonlocal boundary conditions for elliptic equations first were investigated by A. V. Bitsadze, A. A. Samarskii [16], while BVP for parabolic equa-

tions with nonlocal integral boundary conditions were studied by J. R. Cannon [5], L. I. Kamynin [7], N. I. Ionkin [6] and others. Later such investigations for Laplace, Poisson and heat equations were explored by V. A. Il'in and E. L. Moiseev [17] and others [18–20]. Nonlocal BVP involving integral conditions for hyperbolic equations were studied in [21]. Multipoint and nonlocal BVP with integral boundary conditions for ordinary differential equations were considered in [22, 23]. Fractional IDE with integral boundary conditions were given in [24]. The problem of the existence of solutions for nonlocal BVP was the subject of many papers [19, 20, 23, 25–28]. Exact solutions of BVP with Fredholm IDE were considered in [29] and [30]. In most cases numerical methods are employed. Here, the necessary and sufficient solvability conditions of the abstract operator equations:

$$\begin{aligned} Bu &= Au - Qu, \quad Qu = \mathbf{gF}(Au), \\ \mathcal{D}(B) &= \{u \in \mathcal{D}(A) : \Phi(u) = \mathbf{N}\Psi(u)\}; \end{aligned} \quad (1)$$



$$\begin{aligned}
 B_1 u &= A^2 u - Q_1 u, \quad Q_1 u = qF(Au) + gF(A^2 u), \\
 \mathcal{D}(B_1) &= \{u \in \mathcal{D}(A^2) : \Phi(u) = N\Psi(u)\}, \\
 \Phi(Au) &= DF(Au) + N\Psi(Au), \quad (2)
 \end{aligned}$$

and their exact solutions are obtained in closed form. This formalism is applied to solve Fredholm IDE with multipoint or nonlocal integral boundary conditions, when  $A$  is a differential operator and  $Q, Q_1$  are integral operators with separable kernels. The problems (1), (2) arise naturally from A. A. Dezin, R. O. Oinarov extensions of linear operators [31, 26], which are not restrictions of a maximal operator, unlike the classical M. G. Krein, J. Von. Neuman extensions [32, 33] in Hilbert space and in Banach space [34]. This work is a generalization of the papers [26–28, 35], where integral boundary conditions have not been considered. Solving differential or Fredholm IDE with integral boundary conditions is a complicated problem, since the operators  $B$  and  $B_1$  in (1), (2) are obtained by perturbations of boundary conditions and the action of an operator  $A$ . Whereas in [26–28, 35] the operators  $B = \hat{A} + Q, \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(\hat{A})$  and  $B_1 = \hat{A}^2 + Q_1, \mathcal{D}(B_1) = \mathcal{D}(\hat{A}^2)$  are obtained only by perturbation of the action of a correct operator  $\hat{A}$  which is a restriction of a maximal operator  $A$ .

### Terminology and notation

Let  $X, Y$  be complex Banach spaces and  $X^*$  the adjoint space of  $X$ , i. e. the set of all complex-valued linear and bounded functionals on  $X$ . We denote by  $f(x)$  the value of  $f$  on  $x$ . We write  $\mathcal{D}(A)$  and  $R(A)$  for the domain and the range of the operator  $A$ , respectively. An operator  $A_2$  is said to be an extension of an operator  $A_1$ , or  $A_1$  is said to be a restriction of  $A_2$ , in symbol  $A_1 \subset A_2$ , if  $\mathcal{D}(A_2) \supseteq \mathcal{D}(A_1)$  and  $A_1 x = A_2 x$ , for all  $x \in \mathcal{D}(A_1)$ . An operator  $A: X \rightarrow Y$  is called closed if for every sequence  $x_n$  in  $\mathcal{D}(A)$  converging to  $x_0$  with  $Ax_n \rightarrow f_0$ , it follows that  $x_0 \in \mathcal{D}(A)$  and  $Ax_0 = f_0$ . A closed operator  $A$  is called maximal if  $R(A) = Y$  and  $\ker A \neq \{0\}$ . An operator  $\hat{A}: X \rightarrow Y$  is called correct if  $R(\hat{A}) = Y$  and the inverse  $\hat{A}^{-1}$  exists and is continuous on  $Y$ . An operator  $\hat{A}$  is called a correct restriction of the maximal operator  $A$  if it is a correct operator and  $\hat{A} \subset A$ . If  $\Psi_i \in X^*, i = 1, \dots, n$ , then we denote by  $\Psi = \text{col}(\Psi_1, \dots, \Psi_n)$  and  $\Psi(x) = \text{col}(\Psi_1(x), \dots, \Psi_n(x))$ . Let  $g = (g_1, \dots, g_n)$  be a vector of  $X^n$ . We will denote by  $\Psi(g)$  the  $n \times n$  matrix whose  $i, j$ -th entry  $\Psi_i(g_j)$  is the value of functional  $\Psi_i$  on element  $g_j$ . Note that  $\Psi(gC) = \Psi(g)C$ , where  $C$  is a  $n \times k$  constant matrix. We will also denote by  $O_n$  the zero and by  $I_n$  the identity  $n \times n$  matrices. By  $O$  we will denote the zero column vector.

### Extension methods for ordinary differential and Fredholm IDE

Let  $A: X \xrightarrow{on} X$  be an ordinary  $m^{\text{th}}$  order differential operator

$$\begin{aligned}
 Au(x) &= \alpha_0 u^{(m)}(x) + \alpha_1 u^{(m-1)}(x) + \dots + \alpha_m u(x), \\
 \alpha_i &\in \mathbb{R} \quad (3)
 \end{aligned}$$

and  $X$  be a Banach space. Usually  $X = \mathbb{C}[a, b]$  or  $X = L_p(a, b), p \geq 1$ . In the sequel we denote by  $X_A^m = (D(A), \|\cdot\|_{X^m})$  the Banach space of all  $m$  times differentiable functions with norm  $\|u(x)\|_{X_A^m} = \sum_{i=0}^m \|u^{(i)}(x)\|_X$  and by  $X_A^{m-1}$  the Banach space of all  $m - 1$  times differentiable functions with norm

$$\|u(x)\|_{X_A^{m-1}} = \sum_{i=0}^{m-1} \|u^{(i)}(x)\|_X. \quad (4)$$

Note that for  $X = \mathbb{C}[a, b]$  the spaces  $X_A^m, X_A^{m-1}$  are defined by  $\mathbb{C}^m[a, b], \mathbb{C}^{m-1}[a, b]$ , respectively. It is a well-known fact that the operator defined by

$$\begin{aligned}
 \hat{A}u(x) &= \alpha_0 u^{(m)}(x) + \\
 &+ \alpha_1 u^{(m-1)}(x) + \dots + \alpha_m u(x) = f, \\
 \alpha_i &\in \mathbb{R}, x \in [a, b], \quad (5) \\
 \mathcal{D}(\hat{A}) &= \\
 &= \{u(x) \in \mathbb{C}^m[a, b] : u(a) = u'(a) = \dots = u^{m-1}(a) = 0\}
 \end{aligned}$$

is a correct restriction of  $A$  and the unique solution of (5) is

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \hat{A}^{-1}f(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x-t)^{m-1} f(t) dt, \\
 f(x) &\in \mathbb{C}[a, b]. \quad (6)
 \end{aligned}$$

**Lemma 1.** Let  $A_i, B_i, C_i, D$  are  $n \times n$  matrices,

$$\text{where } i = 1, 2, 3, \text{ and } G = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}. \text{ Then the}$$

next properties of determinants hold true:

$$\begin{aligned}
 &\det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} A_1 \pm DB_1 & A_2 \pm DB_2 & A_3 \pm DB_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}; \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \pm \mathbf{A}_3 \mathbf{D} & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \pm \mathbf{B}_3 \mathbf{D} & \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \pm \mathbf{C}_3 \mathbf{D} & \mathbf{C}_3 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

*Proof:* Let  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & -\mathbf{D} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$ . Then  $\mathbf{H}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{D} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{H} = \det \mathbf{H}^{-1} = 1, \quad |\mathbf{HG}| = |\mathbf{H}||\mathbf{G}| =$$

$= |\mathbf{G}|$  and  $|\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}| = |\mathbf{H}^{-1}||\mathbf{G}| = |\mathbf{G}|$ . So (7) holds.

Let now  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{D} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$ . Then  $\mathbf{H}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & -\mathbf{D} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{H}| = |\mathbf{H}^{-1}| = 1, \quad |\mathbf{GH}| = |\mathbf{G}||\mathbf{H}| = |\mathbf{G}|$$

and  $|\mathbf{GH}^{-1}| = |\mathbf{G}||\mathbf{H}^{-1}| = |\mathbf{G}|$ . So (8) holds and Lemma 1 is proved.

*Remark 1.* Consider a  $n^2 \times n^2$  matrix  $\mathbf{G} =$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{n1} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{where } \mathbf{A}_{ij}, i, j = 1, \dots, n \text{ are } n \times n$$

matrices. Let  $\mathbf{\Gamma}$  be the matrix obtained from  $\mathbf{G}$  by multiplying from the left a row by the  $n \times n$  matrix  $\mathbf{D}$  and then adding it to another row, or by multiplying from the right a column of  $\mathbf{G}$  by the matrix  $\mathbf{D}$  and then adding it to another column of  $\mathbf{G}$ . Then  $\det \mathbf{G} = \det \mathbf{\Gamma}$ .

**Theorem 1.** Let  $X$  be a complex Banach space,

$A: X \rightarrow X$  an operator from (3) with finite dimensional kernel  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$  which is a basis of  $\ker A$ , and let  $\hat{A}$  be a correct restriction of  $A$  defined by

$$\hat{A} \subset A, \quad \mathcal{D}(\hat{A}) = \{u \in \mathcal{D}(A) : \Phi(u) = \mathbf{0}\}, \quad (9)$$

the components of the functional vectors  $\Phi = \text{col}(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ ,  $\Psi = \text{col}(\Psi_1, \dots, \Psi_n)$  and  $\mathbf{F} = \text{col}(F_1, \dots, F_n)$  belong to  $X^{m-1}$  and respectively.

Suppose also that  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$  biorthogonal to  $z_1, \dots, z_m$  and that the components of vector  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in X^n$  are linearly independent and  $\mathbf{N}$  is a  $m \times n$  matrix. Then:

(i) The operator  $B$  defined by

$$Bu = Au - \mathbf{gF}(Au) = f,$$

$$f \in X;$$

$$\mathcal{D}(B) = \{u \in \mathcal{D}(A) : \Phi(u) = \mathbf{N}\Psi(u)\} \quad (10)$$

is injective if and only if

$$\det \mathbf{V} = \det[\mathbf{I}_n - \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}] \neq 0 \text{ and}$$

$$\det \mathbf{W} = \det[\mathbf{I}_n - \mathbf{F}(\mathbf{g})] \neq 0. \quad (11)$$

(ii) If  $B$  is injective, then  $B$  is correct and for all  $f \in X$  the unique solution of (10) is given by

$$u = B^{-1}f = \hat{A}^{-1}f + \left[ \hat{A}^{-1}\mathbf{g} + \mathbf{zNV}^{-1}\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g}) \right] \times \\ \times \mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}(f) + \mathbf{zNV}^{-1}\Psi(\hat{A}^{-1}f). \quad (12)$$

*Proof:* (i). Let  $\det \mathbf{W} \neq 0$ ,  $\det \mathbf{V} \neq 0$  and  $u \in \ker B$ . Then  $Bu = Au - \mathbf{gF}(Au) = \mathbf{0}$ ,  $\Phi(u) = \mathbf{N}\Psi(u)$  and  $[\mathbf{I}_n - \mathbf{F}(\mathbf{g})]\mathbf{F}(Au) = \mathbf{0}$ ,  $\Phi(u - \mathbf{zN}\Psi(u)) = \mathbf{0}$ . The last equation, since (9), implies  $u - \mathbf{zN}\Psi(u) \in \mathcal{D}(\hat{A})$ . From  $[\mathbf{I}_n - \mathbf{F}(\mathbf{g})]\mathbf{F}(Au) = \mathbf{0}$ , since  $\det \mathbf{W} \neq 0$ , follows  $\mathbf{F}(Au) = \mathbf{0}$ . Then  $Bu = Au = \mathbf{0}$  which yields  $\hat{A}(u - \mathbf{zN}\Psi(u)) = \mathbf{0}$  and so  $u = \mathbf{zN}\Psi(u)$ . Then  $\Psi(u) = \Psi(\mathbf{zN}\Psi(u))$  or  $[\mathbf{I}_n - \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}]\Psi(u) = \mathbf{0}$ . The last, since  $\det \mathbf{V} \neq 0$  implies  $\Psi(u) = \mathbf{0}$  and so from  $u = \mathbf{zN}\Psi(u)$  we get  $u = \mathbf{0}$ , i. e.  $\ker B = \{\mathbf{0}\}$  and  $B$  is an injective operator.

Conversely. Let  $\det \mathbf{V} = 0$ . Then there exists a vector  $\mathbf{c} = \text{col}(c_1, \dots, c_n) = \mathbf{0}$  such that  $\mathbf{V}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ .

Consider the element  $u_0 = \mathbf{zN}\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , otherwise  $\mathbf{N}\mathbf{c} = \mathbf{0}$  and from  $[\mathbf{I}_n - \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}]\mathbf{c} = \mathbf{0}$  follows  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , which contradicts the hypothesis  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ . Note that  $u_0 \in \mathcal{D}(B)$ , since  $\Phi(u_0) = \mathbf{N}\mathbf{c}$ ,  $\Psi(u_0) = \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}\mathbf{c}$ ,  $\Phi(u_0) - \mathbf{N}\Psi(u_0) = \mathbf{N}\mathbf{c} - \mathbf{N}\Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}\mathbf{c} = \mathbf{N}[\mathbf{I}_n - \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}]\mathbf{c} = \mathbf{N}\mathbf{V}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ . It is evident that  $u_0 \in \ker B$ . So  $u_0 \in \ker B$ . Hence  $\ker B \neq \{\mathbf{0}\}$  and  $B$  is not injective. Let now  $\det \mathbf{V} \neq 0$ , but  $\det \mathbf{W} = 0$ . Then there exists a vector  $\mathbf{c} = \text{col}(c_1, \dots, c_n) \neq \mathbf{0}$  such that  $\mathbf{W}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Note that  $\mathbf{g}\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  because of  $g_1, \dots, g_n$  is a linearly independent set and that the element  $u_0 = \left[ \hat{A}^{-1}\mathbf{g} + \mathbf{zNV}^{-1}\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g}) \right] \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ , otherwise  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ . For  $u_0$  we obtain

$$u_0 = \left[ \hat{A}^{-1}\mathbf{g} + \mathbf{zNV}^{-1}\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g}) \right] \mathbf{c} \neq \mathbf{0},$$

$$\Phi(u_0) - \mathbf{N}\Psi(u_0) = \mathbf{NV}^{-1}\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{c} - \mathbf{N}\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{c} -$$

$$- \mathbf{N}\Psi(\mathbf{z})\mathbf{NV}^{-1}\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{c} =$$

$$= \mathbf{N}[\mathbf{I}_n - \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}]\mathbf{V}^{-1}\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{c} - \mathbf{N}\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{c} =$$

$$= \mathbf{N}\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{c} - \mathbf{N}\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{c} = \mathbf{0},$$

$$Bu_0 = Au_0 - \mathbf{gF}(\hat{A}u_0) =$$

$$= \mathbf{g}\mathbf{c} - \mathbf{gF}(\mathbf{g})\mathbf{c} = \mathbf{g}[\mathbf{I}_n - \mathbf{F}(\mathbf{g})]\mathbf{c} = \mathbf{g}\mathbf{W}\mathbf{c} = \mathbf{g}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

So  $u_0 \in \ker B$ . Consequently  $\ker B \neq \{\mathbf{0}\}$  and  $B$  is not injective. Hence  $B$  is injective if and only if  $\det \mathbf{V} \neq 0, \det \mathbf{W} \neq 0$ . The statement (i) holds.

(ii) Let  $\det W \neq 0$  and  $\det V \neq 0$ . By statement (i), the operator  $B$  is injective. Since  $\mathbf{z} \in [\ker A]^m$ ,  $\Phi(\mathbf{z}) = \mathbf{I}_m$ , the problem (10) is written as

$$\begin{aligned} Bu &= A(u - \mathbf{zN}\Psi(u)) - \mathbf{gF}(Au) = f, \\ f &\in X; \\ \mathcal{D}(B) &= \{u \in \mathcal{D}(A) : \Phi(u - \mathbf{zN}\Psi(u)) = 0\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Then, applying Equation (9) and relation  $Bu = \hat{A}(u - \mathbf{zN}\Psi(u)) - \mathbf{gF}(Au) = f$  we obtain  $u - \mathbf{zN}\Psi(u) \in \mathcal{D}(\hat{A})$ ,  $Bu = \hat{A}(u - \mathbf{zN}\Psi(u)) - \mathbf{gF}(Au) = f$  and for every  $u \in \mathcal{D}(B)$ ,  $f \in X$  using (10), (13) we obtain

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_n - \mathbf{F}(\mathbf{g})]\mathbf{F}(Au) &= \mathbf{F}(f), \\ \mathbf{F}(Au) &= \mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}(f), \\ u - \mathbf{zN}\Psi(u) &= \hat{A}^{-1}\mathbf{gF}(Au) + \hat{A}^{-1}f, \\ \Psi(u) - \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}\Psi(u) &= \Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{F}(Au) + \Psi(\hat{A}^{-1}f), \\ [\mathbf{I}_n - \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}]\Psi(u) &= \Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}(f) + \Psi(\hat{A}^{-1}f), \\ \Psi(u) &= \mathbf{V}^{-1}[\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}(f) + \Psi(\hat{A}^{-1}f)], \\ u &= B^{-1}f = \hat{A}^{-1}f + \hat{A}^{-1}\mathbf{gW}^{-1}\mathbf{F}(f) + \\ &+ \mathbf{zNV}^{-1}[\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F}(f) + \Psi(\hat{A}^{-1}f)]. \end{aligned}$$

From the last equation for every  $f \in X$  follows the unique solution (12) of (10). Because  $f$  in (12) is arbitrary, we obtain  $R(B) = X$ . Since the operator  $\hat{A}^{-1}$  and the functionals  $F_1, \dots, F_n, \Psi_1, \dots, \Psi_n$  are bounded, from (12) follows the boundedness of  $B^{-1}$ . Hence, the operator  $B$  is correct if and only if (11) holds and the unique solution of (10) is given by (12). The theorem is proved.

From the previous theorem for  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  follows the next corollary which is useful for solving some classes of differential equations with nonlocal boundary conditions.

**Corollary 1.** Let a complex Banach space  $X$ , the operators  $A, \hat{A}$ , the vector  $\mathbf{z}$  and functional vectors  $\Phi, \Psi$  and the matrix  $\mathbf{N}$  be defined as in Theorem 1. Then:

(i) The operator  $B$  defined by

$$\begin{aligned} Bu &= Au = f, \\ f &\in X; \\ \mathcal{D}(B) &= \{u \in \mathcal{D}(A) : \Phi(u) = \mathbf{N}\Psi(u)\} \end{aligned} \quad (14)$$

is correct if and only if  $\det V = \det[\mathbf{I}_n - \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}] \neq 0$  and for all  $f \in X$  the unique solution of (14) is given by

$$u = B^{-1}f = \hat{A}^{-1}f + \mathbf{zNV}^{-1}\Psi(\hat{A}^{-1}f). \quad (15)$$

**Theorem 2.** Let a Banach space  $X$ , the vectors  $\mathbf{z}, \Phi, \Psi, \mathbf{F}$ , the operators  $A, \hat{A}$  be defined as in Theorem 1 and the operator  $B_1: X \rightarrow X$  by

$$B_1u = A^2u - \mathbf{qF}(Au) - \mathbf{gF}(A^2u) = f; \quad (16)$$

$$\mathcal{D}(B_1) = \{u \in \mathcal{D}(A^2) : \Phi(u) = \mathbf{N}\Psi(u),$$

$$\Phi(Au) = \mathbf{DF}(Au) + \mathbf{N}\Psi(Au)\}. \quad (17)$$

Suppose also that the vectors  $\mathbf{q}$  and  $\mathbf{g}$  are linearly independent,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in X^n$ , and  $\mathbf{D}, \mathbf{N}$  are  $m \times n$  matrices. Then:

(i) The operator  $B_1$  corresponding to the problem (16), (17) is injective if and only if

$$\begin{aligned} \det L = \\ = \det \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{N} & \mathbf{K}_1 & -\mathbf{F}(\hat{A}^{-1}\mathbf{g}) \\ \mathbf{V} & -\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{z})\mathbf{N} & -\mathbf{K}_3 & -\Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{g}) \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{V} & -\mathbf{K}_2 & -\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g}) \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & -\mathbf{F}(\mathbf{q}) & \mathbf{W} \end{pmatrix} \neq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{I}_n - \mathbf{F}(\mathbf{z})\mathbf{D} - \mathbf{F}(\hat{A}^{-1}\mathbf{q}), \quad \mathbf{K}_2 = \Psi(\mathbf{z})\mathbf{D} + \Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{q}), \\ \mathbf{K}_3 &= \Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{z})\mathbf{D} + \Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{q}), \\ \mathbf{W} &= \mathbf{I}_n - \mathbf{F}(\mathbf{g}), \quad \mathbf{V} = \mathbf{I}_n - \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N}. \end{aligned} \quad (19)$$

(ii) If the operator  $B_1$  is injective, then it is correct and the unique solution of (16), (17) is given by

$$\begin{aligned} u &= B_1^{-1}f = \hat{A}^{-2}f + \\ &+ (\mathbf{zN}, \hat{A}^{-1}\mathbf{zN}, \hat{A}^{-1}\mathbf{zD} + \hat{A}^{-2}\mathbf{q}, \hat{A}^{-2}\mathbf{g}) \times \\ &\times L^{-1} \text{col}(\mathbf{F}(\hat{A}^{-1}f), \Psi(\hat{A}^{-2}f), \Psi(\hat{A}^{-1}f), \mathbf{F}(f)). \end{aligned} \quad (20)$$

*Proof:* (i) Let  $\det L \neq 0$ . Since  $\Phi(\mathbf{z}) = \mathbf{I}_m$ , the relations (17) can be represented as

$$\Phi(u - \mathbf{zN}\Psi(u)) = 0,$$

$$\Phi(Au - \mathbf{zDF}(Au) - \mathbf{zN}\Psi(Au)) = 0,$$

which taking into account (9) imply

$$u - \mathbf{zN}\Psi(u) \in \mathcal{D}(\hat{A}); \quad (21)$$

$$Au - \mathbf{zDF}(Au) - \mathbf{zN}\Psi(Au) \in \mathcal{D}(\hat{A}). \quad (22)$$

Then, since  $\mathbf{z} \in [\ker A]^m$ ,  $\hat{A} \subset A$  and  $\hat{A}$  is correct, from (16) we obtain

$$\begin{aligned} \hat{A}(Au - \mathbf{z}[\mathbf{DF}(Au) + \mathbf{N}\Psi(Au)]) - \\ - \mathbf{qF}(Au) - \mathbf{gF}(A^2u) = f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Au - z[\mathbf{DF}(Au) + \mathbf{N}\Psi(Au)] - \hat{A}^{-1}\mathbf{qF}(Au) - \\
 - \hat{A}^{-1}\mathbf{gF}(A^2u) = \hat{A}^{-1}f, \\
 \hat{A}(u - z\mathbf{N}\Psi(u)) - z[\mathbf{DF}(Au) + \mathbf{N}\Psi(Au)] - \\
 - \hat{A}^{-1}\mathbf{qF}(Au) - \hat{A}^{-1}\mathbf{gF}(A^2u) = \hat{A}^{-1}f, \\
 u - z\mathbf{N}\Psi(u) - \hat{A}^{-1}z[\mathbf{DF}(Au) + \mathbf{N}\Psi(Au)] - \\
 - \hat{A}^{-2}\mathbf{qF}(Au) - \hat{A}^{-2}\mathbf{gF}(A^2u) = \hat{A}^{-2}f.
 \end{aligned}$$

Then taking into account (16) we get

$$\begin{aligned}
 A^2u &= \mathbf{qF}(Au) + \mathbf{gF}(A^2u) + f, \\
 Au &= z[\mathbf{DF}(Au) + \mathbf{N}\Psi(Au)] + \\
 &+ \hat{A}^{-1}\mathbf{qF}(Au) + \hat{A}^{-1}\mathbf{gF}(A^2u) + \hat{A}^{-1}f, \\
 u &= z\mathbf{N}\Psi(u) + \hat{A}^{-1}z\mathbf{N}\Psi(Au) + \\
 &+ (\hat{A}^{-1}z\mathbf{D} + \hat{A}^{-2}\mathbf{q})\mathbf{F}(Au) + \hat{A}^{-2}\mathbf{gF}(A^2u) + \hat{A}^{-2}f. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Further acting by functionals  $\mathbf{F}$  and  $\Psi$  we get the next system

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(Au) &= \mathbf{F}(z)[\mathbf{DF}(Au) + \mathbf{N}\Psi(Au)] + \\
 &+ \mathbf{F}(\hat{A}^{-1}\mathbf{q})\mathbf{F}(Au) + \mathbf{F}(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{F}(A^2u) + \mathbf{F}(\hat{A}^{-1}f), \\
 \Psi(u) &= \Psi(z)\mathbf{N}\Psi(u) + \Psi(\hat{A}^{-1}z)\mathbf{N}\Psi(Au) + \\
 &+ [\Psi(\hat{A}^{-1}z)\mathbf{D} + \Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{q})]\mathbf{F}(Au) + \\
 &+ \Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{g})\mathbf{F}(A^2u) + \Psi(\hat{A}^{-2}f), \\
 \Psi(Au) &= \Psi(z)[\mathbf{DF}(Au) + \mathbf{N}\Psi(Au)] + \\
 &+ \Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{q})\mathbf{F}(Au) + \Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{F}(A^2u) + \Psi(\hat{A}^{-1}f), \\
 \mathbf{F}(A^2u) &= \mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{F}(Au) + \mathbf{F}(\mathbf{g})\mathbf{F}(A^2u) + \mathbf{F}(f), \text{ or} \\
 -\mathbf{F}(z)\mathbf{N}\Psi(Au) &+ [\mathbf{I}_n - \mathbf{F}(z)\mathbf{D} - \mathbf{F}(\hat{A}^{-1}\mathbf{q})]\mathbf{F}(Au) - \\
 &- \mathbf{F}(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{F}(A^2u) = \mathbf{F}(\hat{A}^{-1}f), \\
 \mathbf{V}\Psi(u) - \Psi(\hat{A}^{-1}z)\mathbf{N}\Psi(Au) - \\
 &- [\Psi(\hat{A}^{-1}z)\mathbf{D} + \Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{q})]\mathbf{F}(Au) - \\
 &- \Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{g})\mathbf{F}(A^2u) = \Psi(\hat{A}^{-2}f), \\
 \mathbf{V}\Psi(Au) - [\Psi(z)\mathbf{D} + \Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{q})]\mathbf{F}(Au) - \\
 &- \Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{F}(A^2u) = \Psi(\hat{A}^{-1}f), \\
 -\mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{F}(Au) &+ [\mathbf{I}_n - \mathbf{F}(\mathbf{g})]\mathbf{F}(A^2u) = \mathbf{F}(f).
 \end{aligned}$$

Using the notations (19) from the above equations we get the system

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{F}(z)\mathbf{N} & \mathbf{K}_1 & -\mathbf{F}(\hat{A}^{-1}\mathbf{g}) \\ \mathbf{V} & -\Psi(\hat{A}^{-1}z)\mathbf{N} & -\mathbf{K}_3 & -\Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{g}) \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{V} & -\mathbf{K}_2 & -\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g}) \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & -\mathbf{F}(\mathbf{q}) & \mathbf{W} \end{pmatrix} \times \\
 \times \begin{pmatrix} \Psi(u) \\ \Psi(Au) \\ \mathbf{F}(Au) \\ \mathbf{F}(A^2u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\hat{A}^{-1}f) \\ \Psi(\hat{A}^{-2}f) \\ \Psi(\hat{A}^{-1}f) \\ \mathbf{F}(f) \end{pmatrix}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Let  $u \in \ker B_1$ . Then in the systems (23), (24)  $f = 0$  and from (24) we get  $\mathbf{L} \text{col}(\Psi(u), \Psi(Au), \mathbf{F}(Au), \mathbf{F}(A^2u)) = \mathbf{0}$ , which since  $\det \mathbf{L} \neq 0$ , yields  $\Psi(u) = \Psi(Au) = \mathbf{F}(Au) = \mathbf{F}(A^2u) = \mathbf{0}$ . Substitution of these values into (16), (17) imply  $B_1u = A^2u = \mathbf{0}$ ,  $\Phi(u) = \Phi(Au) = \mathbf{0}$ .

Taking into account (9) we acquire  $u \in \mathcal{D}(\hat{A}^2)$  and  $B_1u = \hat{A}^2u = \mathbf{0}$ . By hypothesis  $\hat{A}$  is correct and so  $u = \mathbf{0}$ . Thus  $\ker B_1 = \{\mathbf{0}\}$  and  $B_1$  is injective.

Conversely. Let  $\det \mathbf{L} = 0$ . Then there exists a vector  $\mathbf{c} = \text{col}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4)$ , where  $\mathbf{c}_i = \text{col}(c_{i1}, \dots, c_{in})$ ,  $i = 1, \dots, 4$  such that  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  and  $\mathbf{L}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ , which since (24) yields

$$-\mathbf{F}(z)\mathbf{N}\mathbf{c}_2 + \mathbf{K}_1\mathbf{c}_3 - \mathbf{F}(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{c}_4 = \mathbf{0}; \quad (25)$$

$$\mathbf{V}\mathbf{c}_1 - \Psi(\hat{A}^{-1}z)\mathbf{N}\mathbf{c}_2 - \mathbf{K}_3\mathbf{c}_3 - \Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{g})\mathbf{c}_4 = \mathbf{0}; \quad (26)$$

$$\mathbf{V}\mathbf{c}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{c}_3 - \Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g})\mathbf{c}_4 = \mathbf{0}; \quad (27)$$

$$-\mathbf{F}(\mathbf{q})\mathbf{c}_3 + \mathbf{W}\mathbf{c}_4 = \mathbf{0}. \quad (28)$$

Consider the element

$$u_0 = z\mathbf{N}\mathbf{c}_1 + \hat{A}^{-1}z(\mathbf{N}\mathbf{c}_2 + \mathbf{D}\mathbf{c}_3) + \hat{A}^{-2}(\mathbf{q}\mathbf{c}_3 + \mathbf{g}\mathbf{c}_4). \quad (29)$$

Note that  $u_0 \neq \mathbf{0}$ , otherwise because of the linear independence of the vectors  $\mathbf{q}, \mathbf{g}, z$  and  $\mathbf{D}(\hat{A}) \cap \ker A = \{\mathbf{0}\}$  [18], we get  $\mathbf{N}\mathbf{c}_1 = \mathbf{N}\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_4 = \mathbf{0}$ . Then from (27) follows that  $\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$  and from (26) we obtain  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}$ . Thus  $\mathbf{c}_i = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, \dots, 4$  and  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ . But the last contradicts the hypothesis  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ . So  $u_0 \neq \mathbf{0}$ . From (29), since  $\Phi(z) = \mathbf{I}_m$ ,  $\mathbf{K}_3 = \Psi(\hat{A}^{-1}z)\mathbf{D} + \Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{q})$  and (26) we get

$$Au_0 = z(\mathbf{N}\mathbf{c}_2 + \mathbf{D}\mathbf{c}_3) + \hat{A}^{-1}(\mathbf{q}\mathbf{c}_3 + \mathbf{g}\mathbf{c}_4),$$

$$A^2u_0 = \mathbf{q}\mathbf{c}_3 + \mathbf{g}\mathbf{c}_4,$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(u_0) - \mathbf{N}\Psi(u_0) &= \mathbf{N}\mathbf{c}_1 - \mathbf{N}\Psi(z)\mathbf{N}\mathbf{c}_1 - \mathbf{N}\Psi(\hat{A}^{-1}z) \times \\
 &\times (\mathbf{N}\mathbf{c}_2 + \mathbf{D}\mathbf{c}_3) - \mathbf{N}\Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{q})\mathbf{c}_3 - \mathbf{N}\Psi(\hat{A}^{-2}\mathbf{g})\mathbf{c}_4 =
 \end{aligned}$$

$$= N \left[ \mathbf{V} \mathbf{c}_1 - \Psi(\hat{A}^{-1} \mathbf{z}) \mathbf{N} \mathbf{c}_2 - \mathbf{K}_3 \mathbf{c}_3 - \Psi(\hat{A}^{-2} \mathbf{g}) \mathbf{c}_4 \right] = \mathbf{N} \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Then  $\Phi(u_0) = N\Psi(u_0)$  and so  $u_0$  satisfies the first boundary condition (17). We will show, using (27) and (25), that  $u_0$  satisfies the second boundary condition (17)

$$\begin{aligned} & \Phi(Au_0) - \mathbf{D}\mathbf{F}(Au_0) - \mathbf{N}\Psi(Au_0) = \mathbf{N} \mathbf{c}_2 + \mathbf{D} \mathbf{c}_3 - \\ & - \mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{z})(\mathbf{N} \mathbf{c}_2 + \mathbf{D} \mathbf{c}_3) - \mathbf{D}\mathbf{F}(\hat{A}^{-1} \mathbf{q}) \mathbf{c}_3 - \mathbf{D}\mathbf{F}(\hat{A}^{-1} \mathbf{g}) \mathbf{c}_4 - \\ & - \mathbf{N}\Psi(\mathbf{z})(\mathbf{N} \mathbf{c}_2 + \mathbf{D} \mathbf{c}_3) - \mathbf{N}\Psi(\hat{A}^{-1} \mathbf{q}) \mathbf{c}_3 - \mathbf{N}\Psi(\hat{A}^{-1} \mathbf{g}) \mathbf{c}_4 = \\ & = N \left[ \mathbf{V} \mathbf{c}_2 - \mathbf{K}_2 \mathbf{c}_3 - \Psi(\hat{A}^{-1} \mathbf{g}) \mathbf{c}_4 \right] + \\ & + \mathbf{D} \left[ -\mathbf{F}(\mathbf{z}) \mathbf{N} \mathbf{c}_2 + \mathbf{K}_1 \mathbf{c}_3 - \mathbf{F}(\hat{A}^{-1} \mathbf{g}) \mathbf{c}_4 \right] = \mathbf{N} \mathbf{0} + \mathbf{D} \mathbf{0} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

where  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  from (19). So  $u_0 \in \mathcal{D}(B_1)$ . Now, using (25) and (28) we will show that  $u_0 \in \ker B_1$

$$\begin{aligned} B_1 u_0 &= A^2 u_0 - \mathbf{q} \mathbf{F}(Au_0) - \mathbf{g} \mathbf{F}(A^2 u_0) = \mathbf{q} \mathbf{c}_3 + \mathbf{g} \mathbf{c}_4 - \\ & - \mathbf{q} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{z})(\mathbf{N} \mathbf{c}_2 + \mathbf{D} \mathbf{c}_3) + \mathbf{F}(\hat{A}^{-1} \mathbf{q}) \mathbf{c}_3 + \mathbf{F}(\hat{A}^{-1} \mathbf{g}) \mathbf{c}_4 \right] - \\ & - \mathbf{g} \mathbf{F}(\mathbf{q}) \mathbf{c}_3 - \mathbf{g} \mathbf{F}(\mathbf{g}) \mathbf{c}_4 = \\ & = \mathbf{q} \left[ -\mathbf{F}(\mathbf{z}) \mathbf{N} \mathbf{c}_2 + \mathbf{K}_1 \mathbf{c}_3 - \mathbf{F}(\hat{A}^{-1} \mathbf{g}) \mathbf{c}_4 \right] + \\ & + \mathbf{g} \left[ -\mathbf{F}(\mathbf{q}) \mathbf{c}_3 + \mathbf{W} \mathbf{c}_4 \right] = \mathbf{q} \mathbf{0} + \mathbf{g} \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

So there exists a nonzero element  $u_0 \in \mathcal{D}(B_1)$  and  $u_0 \in \ker B_1$ . This means that  $B_1$  is not injective. Hence the operator  $B_1$  is injective if and only if  $\det \mathbf{L} \neq 0$ .

(ii) Since  $\det \mathbf{L} \neq 0$ , the system (24) for all  $f \in X$  has an unique solution

$$\begin{aligned} & \text{col}(\Psi(u), \Psi(Au), \mathbf{F}(Au), \mathbf{F}(A^2 u)) = \\ & = \mathbf{L}^{-1} \text{col}(\mathbf{F}(\hat{A}^{-1} f), \Psi(\hat{A}^{-2} f), \Psi(\hat{A}^{-1} f), \mathbf{F}(f)) \quad (30) \end{aligned}$$

and the operator  $B_1$ , by statement (i), is injective. Substituting (30) into (23) we obtain the unique solution (20) of the problem (16), (17). In the above solution an element  $f$  is arbitrary. Consequently,  $R(B_1) = X$ . Since the operators  $\hat{A}^{-2}, \hat{A}^{-1}$  and the functional vectors  $\mathbf{F}$  and  $\Psi$  are bounded, from (20) follows the boundedness of  $B_1^{-1}$ , i. e. the operator  $B_1$  is correct. The theorem is proved.

The next corollary follows from the above theorem for  $\mathbf{q} = \mathbf{g} = \mathbf{0}$  and is useful for solving some classes of differential equations with nonlocal boundary conditions.

**Corollary 2.** Let the operators  $A, \hat{A}$ , the vectors  $\mathbf{z}, \Phi, \Psi, \mathbf{F}, \mathbf{V}$  and matrices  $\mathbf{D}, \mathbf{N}$  be defined as in Theorem 2 and the operator  $B_1 : X \rightarrow X$  be defined by

$$\begin{aligned} B_1 u &= A^2 u = f, \\ \mathcal{D}(B_1) &= \{u \in \mathcal{D}(A^2) : \Phi(u) = \mathbf{N}\Psi(u), \quad (31) \\ & \Phi(Au) = \mathbf{D}\mathbf{F}(Au) + \mathbf{N}\Psi(Au)\}. \end{aligned}$$

Then:

(i) The operator  $B_1$  corresponding to the problem (31) is injective if and only if

$$\det \mathbf{L}_1 = \det \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{F}(\mathbf{z}) \mathbf{N} & \mathbf{I}_n - \mathbf{F}(\mathbf{z}) \mathbf{D} \\ \mathbf{V} & -\Psi(\hat{A}^{-1} \mathbf{z}) \mathbf{N} & -\Psi(\hat{A}^{-1} \mathbf{z}) \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{V} & -\Psi(\mathbf{z}) \mathbf{D} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (32)$$

(ii) If the operator  $B_1$  is injective, then it is correct and the unique solution of (31) is given by

$$\begin{aligned} u &= B_1^{-1} f = \hat{A}^{-2} f + (\mathbf{z} \mathbf{N}, \hat{A}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{N}, \hat{A}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{D}) \times \\ & \times \mathbf{L}_1^{-1} \text{col}(\mathbf{F}(\hat{A}^{-1} f), \Psi(\hat{A}^{-2} f), \Psi(\hat{A}^{-1} f)). \quad (33) \end{aligned}$$

*Proof:* (i) For  $\mathbf{g} = \mathbf{q} = \mathbf{0}$  from (18) and (19) immediately follows

$$\det \mathbf{L} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{F}(\mathbf{z}) \mathbf{N} & \mathbf{I}_n - \mathbf{F}(\mathbf{z}) \mathbf{D} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{V} & -\Psi(\hat{A}^{-1} \mathbf{z}) \mathbf{N} & -\Psi(\hat{A}^{-1} \mathbf{z}) \mathbf{D} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{V} & -\Psi(\mathbf{z}) \mathbf{D} & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}. \quad (34)$$

It is evident that  $\det \mathbf{L} = \det \mathbf{L}_1$ . From (20) for  $\mathbf{g} = \mathbf{q} = \mathbf{0}$  follows the solution of (31)

$$\begin{aligned} u &= B_1^{-1} f = \hat{A}^{-2} f + (\mathbf{z} \mathbf{N}, \hat{A}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{N}, \hat{A}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{D}, \mathbf{0}) \times \\ & \times \mathbf{L}^{-1} \text{col}(\mathbf{F}(\hat{A}^{-1} f), \Psi(\hat{A}^{-2} f), \Psi(\hat{A}^{-1} f), \mathbf{F}(f)). \quad (35) \end{aligned}$$

It is easy to verify that

$$\begin{aligned} & (\mathbf{z} \mathbf{N}, \hat{A}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{N}, \hat{A}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{D}, \mathbf{0}) \times \\ & \times \mathbf{L}^{-1} \text{col}(\mathbf{F}(\hat{A}^{-1} f), \Psi(\hat{A}^{-2} f), \Psi(\hat{A}^{-1} f), \mathbf{F}(f)) = \\ & = (\mathbf{z} \mathbf{N}, \hat{A}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{N}, \hat{A}^{-1} \mathbf{z} \mathbf{D}) \times \\ & \times \mathbf{L}_1^{-1} \text{col}(\mathbf{F}(\hat{A}^{-1} f), \Psi(\hat{A}^{-2} f), \Psi(\hat{A}^{-1} f)). \end{aligned}$$

Hence, from (35) follows (33).

### Examples

In the next example we use the extension method from Theorem 1.

**Example.** The multipoint problem for loaded integro-differential equation on  $\mathbb{C} [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 u'' - 3t \int_0^1 x^2 u''(x) dx + \frac{1}{2}(t^2 + 1)[u'(1) - u'(0)] &= \\
 &= 8t^2 + 2t + 12, \tag{36} \\
 u(0) = \frac{1}{6}u(1/2) + \frac{1}{18}u(1), \quad u'(0) = \frac{2}{9}u(1) &
 \end{aligned}$$

is correct and the unique solution of (36) is given by

$$u(t) = 4t^3 + 2t^2 + 2t + 1. \tag{37}$$

*Proof:* If we compare (36) with (10), it is natural to take  $Au = u''(t)$ ,  $\mathfrak{D}(A) = \{u \in C^2[0, 1]\}$ ,  $X_A^2 = C^2[0, 1]$ ,  $X_A^1 = C^1[0, 1]$ ,  $m = n = 2$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, z_2) = (1, t)$ ,  $\hat{A}u = Au$ ,

$$\mathfrak{D}(\hat{A}) = \{u \in \mathfrak{D}(A) : u(0) = u'(0) = 0\},$$

$$\begin{aligned}
 Bu = u'' - 3t \int_0^1 x^2 u''(x) dx + \frac{1}{2}(t^2 + 1)[u'(1) - u'(0)] &= \\
 = u'' - 3t \int_0^1 x^2 u''(x) dx + \frac{1}{2}(t^2 + 1) \int_0^1 u''(x) dx, & \\
 \mathfrak{D}(B) = & \\
 = \left\{ u(x) \in \mathfrak{D}(A) : \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/18 \\ 0 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1/2) \\ u(1) \end{pmatrix} \right\}. & \tag{38}
 \end{aligned}$$

Since (5), the operator  $\hat{A}$ , is correct and its solution is  $\hat{A}^{-1}f(t) = \int_0^t (t-x)f(x)dx$ . Further comparing (36), (38) with (10), we take  $g_1 = 3t$ ,  $g_2 = -\frac{1}{2}(t^2 + 1)$ ,  $f = 8t^2 + 2t + 12$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/18 \\ 0 & 2/9 \end{pmatrix}, \quad F_1(Au) = \int_0^1 x^2 u''(x) dx, \\
 F_2(Au) = \int_0^1 u''(x) dx.
 \end{aligned}$$

Then

$$F_1(f) = \int_0^1 x^2 f(x) dx, \quad F_2(f) = \int_0^1 f(x) dx,$$

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} \Phi_1(u) \\ \Phi_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix},$$

$$\Psi(u) = \begin{pmatrix} \Psi_1(u) \\ \Psi_2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1/2) \\ u(1) \end{pmatrix}.$$

The set  $\mathbf{z} = (1, t)$  is biorthogonal to  $(\Phi_1, \Phi_2)$ . From  $|\Psi_1(u)| = |u(1/2)| \leq \|u\|_C + \|u'\|_C = \|u\|_{C^1}$  follows that  $\Psi_1 \in C^{1*} = X_A^{m-1*} = X_A^{1*}$ . By analogy  $\Psi_2, \Psi_i \in C^{1*}$ ,  $i = 1, 2$ . Further from  $|F_1(f)| = \left| \int_0^1 x^2 f(x) dx \right| \leq \|f\|_C$  it follows that  $F_1 \in C[0, 1]^* = X^*$ . By analogy it is

proved that  $F_2 \in X^*$ . We can apply Theorem 1. Now we calculate

$$\hat{A}^{-1}g_1(t) = \int_0^t (t-x)g_1(x)dx = \int_0^t (t-x)3x dx = \frac{t^3}{2},$$

$$\hat{A}^{-1}g_2(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t (t-x)(x^2 + 1)dx = -\frac{t^2(t^2 + 6)}{24}.$$

Compute

$$\hat{A}^{-1}\mathbf{g} = (\hat{A}^{-1}g_1, \hat{A}^{-1}g_2) = \left( \frac{t^3}{2}, -\frac{t^2(t^2 + 6)}{24} \right).$$

Further we find  $\Psi_1(z_1) = z_1(1/2) = 1$ ,  $\Psi_1(z_2) = z_2(1/2) = 1/2$ ,  $\Psi_2(z_1) = z_1(1) = 1$ ,  $\Psi_2(z_2) = z_2(1) = 1$ .

Then  $\Psi(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Further compute  $\Psi_1(\hat{A}^{-1}g_1) = 1/16$ ,  $\Psi_2(\hat{A}^{-1}g_1) = 1/2$ ,  $\Psi_1(\hat{A}^{-1}g_2) = -25/384$ ,  $\Psi_2(\hat{A}^{-1}g_2) = -7/24$ , then

$$\Psi(\hat{A}^{-1}\mathbf{g}) = \begin{pmatrix} 1/16 & -25/384 \\ 1/2 & -7/24 \end{pmatrix}.$$

Now we find

$$F_1(g_1) = \int_0^1 3x^3 dx = 3/4,$$

$$F_1(g_2) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(x^2 + 1)dx = -4/15,$$

$$F_2(g_1) = \int_0^1 3x dx = 3/2,$$

$$F_2(g_2) = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)dx = -2/3.$$

Then

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}) = \begin{pmatrix} 3/4 & -4/15 \\ 3/2 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Since

$$\mathbf{W} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{F}(\mathbf{g}) = \begin{pmatrix} 1/4 & 4/15 \\ -3/2 & 5/3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} = \mathbf{I}_2 - \Psi(\mathbf{z})\mathbf{N} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 1/18 \\ 0 & 2/9 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -1/6 & 13/18 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

and  $\det \mathbf{W} \neq 0$ ,  $\det \mathbf{V} \neq 0$ , the problem (36), by Theorem 1 (ii), is correct. For  $f = 8t^2 + 2t + 12$  we calculate

$$\hat{A}^{-1}f(t) = \int_0^t (t-x)(2x+4)dx = \frac{t^2(2t^2+t+18)}{3},$$

$$F_1(f) = \int_0^1 x^2(8x^2+2x+12)dx = 61/10,$$

$$F_2(f) = \int_0^1 (8x^2+2x+12)dx = 47/3.$$

Then  $F(f) = \text{col}(61/10, 47/3)$ . We also compute

$$\Psi_1(\hat{A}^{-1}f) = \hat{A}^{-1}f|_{t=1/2} = 19/12,$$

$$\Psi_2(\hat{A}^{-1}f) = \hat{A}^{-1}f|_{t=1} = 7.$$

Then

$$\Psi(\hat{A}^{-1}f) = \text{col}(19/12, 7).$$

Substitution of these values into (12) yields the solution to the problem (36)

$$u(t) = \hat{A}^{-1}f + [\hat{A}^{-1}g + zNV^{-1}\Psi(A^{-1}g)]W^{-1}F(f) + zNV^{-1}\Psi(\hat{A}^{-1}f) = \frac{t^2(2t^2+t+18)}{3} +$$

$$+ \left[ \left( \frac{t^3}{2}, -\frac{t^2(t^2+6)}{24} \right) + (1, t) \begin{pmatrix} 1/6 & 1/18 \\ 0 & 2/9 \end{pmatrix} \right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -1/6 & 13/18 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/16 & -25/384 \\ 1/2 & -7/24 \end{pmatrix} \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 100 & -16 \\ 90 & 15 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 61/10 \\ 47/3 \end{pmatrix} + (1, t) \begin{pmatrix} 1/6 & 1/18 \\ 0 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -1/6 & 13/18 \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 19/12 \\ 7 \end{pmatrix} = 4t^3 + 2t^2 + 2t + 1.$$

### Conclusion

The main results of this paper are Theorems 1 and 2, where the problems  $Bu = f$ ,  $B_1u = f$  are solved by extension method. This method is essentially simpler and more convenient in the case of quadratic operator  $B_1 = B^2$ . In this case the solvability condition and a solution of  $B_1u = f$  can be obtained by application of the formula for solution of  $Bu = f$  twice. The upcoming Part 2 of this paper will be devoted to decomposition method for this case. Note that the extension method is a generalization of direct method which is presented in [30]. The essential ingredient in our approach is the extension of the main idea in [26].

### References

1. Bloom F. *Ill posed Problems for Integrodifferential Equations in Mechanics and Electromagnetic Theory*. SIAM, 1981. 232 p.
2. Cushing J. M. *Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics*. Springer, 1977. 198 p.
3. Apreutesei N., Ducrot A., Volpert V. Travelling waves for integro-differential equations in population dynamics. *Discrete Cont. Dyn. Syst., Ser. B* 11, 2009, no. 3, pp. 541–561.
4. Arisawa M. A remark on the definitions of viscosity solutions for the integro-differential equations with Lévy operators. *J. Math. Pures Appl.*, 2008, vol. 89, pp. 567–574.
5. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 21, pp. 155–160.
6. Ionkin N. I. Solution of one boundary value problem of heat conduction theory with a nonclassical boundary condition. *Differencial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304 [In Russian].
7. Kamynin L. I. On a boundary problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *ZHurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1964, vol. 4, no. 6, pp. 1006–1024 [In Russian].
8. Kandemir M. Nonlocal boundary value problems with transmission conditions. *Gulf Journal of Mathematics*, 2015, vol. 3, iss. 1, no. 3, pp. 1–17.
9. Medlock J., Kot M. Spreading disease: integro-differential equations old and new. *Mathematical Biosciences*, Elsevier, 2003, vol. 184, pp. 201–222.
10. Samarskii A. A. On certain problems of the modern theory of differential equations. *Differencial'nye uravneniya* [Differential Equations], 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1221–1228 [In Russian].
11. Sachs E. W., Strauss A. K. Efficient solution of a partial integro-differential equation in finance. *Appl. Numer. Math.*, 2008, vol. 58, pp. 1687–1703.
12. Schumacher K. Traveling front solutions for integro-differential equations. I. *J. Reine Angew. Math.*, 1980, vol. 316, pp. 54–70.
13. Shivanian E. Analysis of meshless local radial point interpolation (MLRPI) on a nonlinear partial integro-differential equation arising in population dynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2003, vol. 37, pp. 1693–1702.
14. Tersenov Alkis S. Ultraparabolic equations and unsteady heat transfer. *Journal of Evaluation Equations*, 2005, vol. 5, no. 2, pp. 277–289.
15. Tamarkin J. D. The notion of the Green's function in the theory of integro-differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1927, vol. 29, pp. 755–800.
16. Bitsatze A. V., Samarskii A. A. On some simplest generalization of linear elliptic problems. *Doklady AN*

- SSSR [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1969, vol. 185, pp. 739–740 [In Russian].
17. Il'in V. A., Moiseev E. L. Two dimensional nonlocal boundary value problem for Poissons operator in differential and difference variants. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 1990, vol. 2, no. 8, pp. 132–156 [In Russian].
  18. Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On a nonlocal problem with integral boundary conditions for a multidimensional elliptic equation. *Applied Mathemat. Letters*, 2004, vol. 24, no. 4, pp. 566–571.
  19. Kalmenov T. S., Tokmaganbetov N. E. On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain. *S. M. J.*, 2013, vol. 54, no. 6, pp. 1287–1293.
  20. Sadybekov M. A., Turmetov B. K. On an analog of periodic boundary value problems for the Poisson equation in the disk. *Differencial'nye uravneniya* [Differential Equations], 2014, vol. 50, pp. 264–268 [In Russian].
  21. Pulkina L. S. A nonlocal problem with integral condition for a hyperbolic equation. *Differencial'nye uravneniya* [Differential Equations], 2004, vol. 40, no. 7, pp. 15–27 [In Russian].
  22. Abdullaev A. R., Skachkova E. A. On one class of multi-point boundary value problems for a second-order linear functional-differential equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 647–650.
  23. Benchohra M., Ntouyas S. K. Existence results on the semiinfinite interval for first and second order integrodifferential equations in banach spaces with nonlocal conditions. *Acta Univ. Palacki. Olomuc, Fac. rer. nat. V Mathematica*, 2002, vol. 41, pp. 13–19.
  24. Ntouyas S. A six-point boundary value problem of nonlinear coupled sequential fractional integro-differential equations and coupled integral boundary conditions. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2018, vol. 56, no. 1-2, pp. 367–389.
  25. Georgiou D. N., Kougiass I. E. On fuzzy fredholm and volterra integral equations. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 2001, vol. 9, no. 4, pp. 943–951.
  26. Oinarov R. O., Parasidi I. N. Correct extensions of operators with finite defect in Banach spaces. *Izvestiya Akademii nauk Kazahskoj SSR*, 1988, vol. 5, pp. 42–46 [In Russian].
  27. Parasidis I. N. and Tsekrekos P. C. Correct and self-adjoint problems for quadratic operators. *Eurasian Mathematical Journal*, 2010, vol. 1, no. 2, pp. 122–135.
  28. Parasidis I. N., Providas E. Extension operator method for the exact solution of integro-differential equations. In: Pardalos P., Rassias T. (eds). *Contributions in Mathematics and Engineering: In Honor of Constantin Caratheodory*. Springer, Cham., 2016, pp. 473–496.
  29. Polyanin A. D., Zhurov A. I. Exact solutions to some classes of nonlinear integral, integro-functional and integro-differential equation. *Dokl. Math.*, 2008, vol. 77, no. 2, pp. 315–319.
  30. Wazwaz A. M. *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications*. Springer, Beijing, 2011. 657 p.
  31. Dezin A. A. Nonstandard problems. *Matematicheskie zametki*, 1987, vol. 41, no. 3, pp. 356–364 [In Russian].
  32. Krein M. G. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian operators and its applications. *Matematicheskij sbornik*, 1947, vol. 20, no. 3, pp. 431–495 [In Russian].
  33. Neumann J. Von. Allgemeine eigenwerttheorie hermitescher functional operatoren. *Math. Ann.*, Bd., 1929–1930, vol. 102, pp. 49–131.
  34. Kokebaev B. K., Otelbaev M., Shynybekov A. N. About restrictions and extensions of operators. *Doklady AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1983, vol. 271, no. 6, pp. 1307–1310 [In Russian].
  35. Parassidis I. N. and Tsekrekos P. C. Correct selfadjoint and positive extensions of nondensely defined symmetric operators. *Abstract and Applied Analysis*, 2005, no. 7, pp. 767–790.

УДК 338.984

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-14-23

**Метод нахождения точных решений для интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с многоточечными и интегральными краевыми условиями. Часть 1. Метод расширения**

Н. Н. Васильев<sup>а,б</sup>, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, [orcid.org/0000-0002-0841-1168](https://orcid.org/0000-0002-0841-1168), [vasiliev@pdmi.ras.ru](mailto:vasiliev@pdmi.ras.ru)

И. Н. Парасидис<sup>в</sup>, PhD, доцент, [paras@teilar.gr](mailto:paras@teilar.gr)

Е. Провидас<sup>г</sup>, PhD, доцент, [providas@teilar.gr](mailto:providas@teilar.gr)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191023, РФ

<sup>б</sup>Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5, Санкт-Петербург, 197376, РФ

<sup>в</sup>Кафедра электротехники, Технологический институт Фессалии, 41110, Лариса, Греция

<sup>г</sup>Кафедра машиностроения, Технологический институт Фессалии, 41110, Лариса, Греция

**Введение:** краевые задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с многоточечными и нелокальными граничными условиями возникают в различных областях механики, физики, биологии, биотехнологии, химической инже-



нерии, медицинской науки, финансов и других. Нахождение точных решений краевых задач с фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями является трудной проблемой. В большинстве случаев решения получаются численными методами. **Цель:** поиск необходимых и достаточных условий разрешимости абстрактных операторных уравнений и метод построения их точных решений. **Результаты:** предложен прямой метод для точного решения некоторого класса обыкновенных дифференциальных или фредгольмовых интегро-дифференциальных уравнений с сепарабельными ядрами и многоточечными и интегральными граничными условиями. Исследованы абстрактные уравнения вида  $Bu = Au - gF(Au) = f$  и  $B_1u = A^2u - qF(Au) - gF(A^2u) = f$  с нелокальными граничными условиями  $\Phi(u) = N\Psi(u)$  и  $\Phi(u) = N\Psi(u)$ ,  $\Phi(Au) = DF(Au) + N\Psi(Au)$  соответственно, где  $q, g$  являются векторами,  $D, N$  — матрицами, а  $F, \Phi, \Psi$  — функциональными векторами. Предложенный метод прост в использовании и может быть легко интегрирован в любую систему компьютерной алгебры. Исследована корректность уравнений вида  $Bu = f$  и  $B_1u = f$  и их точные решения. Вторая часть этой статьи будет посвящена случаю, когда оператор  $B_1$  имеет квадратичную факторизацию.

**Ключевые слова** — дифференциальные и фредгольмовы интегро-дифференциальные уравнения, многоточечные и нелокальные интегральные граничные условия, разложение операторов, корректность операторов, точные решения.

**Цитирование:** Vassiliev N. N., Parasidis I. N., Providas E. Exact solution method for Fredholm integro-differential equations with multipoint and integral boundary conditions. Part 1. Extension method. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 14–23. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-14-23

**Citation:** Vassiliev N. N., Parasidis I. N., Providas E. Exact solution method for Fredholm integro-differential equations with multipoint and integral boundary conditions. Part 1. Extension method. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 14–23. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-14-23

## УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научные базы данных, включая SCOPUS и Web of Science, обрабатывают данные автоматически. С одной стороны, это ускоряет процесс обработки данных, с другой — различия в транслитерации ФИО, неточные данные о месте работы, области научного знания и т. д. приводят к тому, что в базах оказывается несколько авторских страниц для одного и того же человека. В результате для всех по отдельности считаются индексы цитирования, снижая рейтинг ученого.

Для идентификации авторов в сетях Thomson Reuters проводит регистрацию с присвоением уникального индекса (ID) для каждого из авторов научных публикаций.

Процедура получения ID бесплатна и очень проста, есть возможность провести регистрацию на 12-ти языках, включая русский (чтобы выбрать язык, кликните на зеленое поле сверху справа на стартовой странице): <https://orcid.org>

## Поиск периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода нормальной формы. Случай уравнений четвертого порядка

В. Ф. Еднерал<sup>а, б</sup>, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, доцент, [orcid.org/0000-0002-5125-0603](https://orcid.org/0000-0002-5125-0603), [edneral@theory.sinp.msu.ru](mailto:edneral@theory.sinp.msu.ru)

О. Д. Тимофеевская<sup>в</sup>, канд. физ.-мат. наук, доцент, [orcid.org/0000-0003-2047-0934](https://orcid.org/0000-0003-2047-0934)

<sup>а</sup>НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 1(2), Москва, 119991, РФ

<sup>б</sup>Российский университет дружбы народов, Миклухо-Маклая ул., 6, Москва, 117198, РФ

<sup>в</sup>Физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 1(2), Москва, 119991, РФ

**Постановка проблемы:** в основе метода резонансной нормальной формы лежит сведение системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений к более простому виду, исследовать который проще. Более того, для ряда автономных нелинейных задач удается получить в явном виде формулы, аппроксимирующие численные расчеты семейств их периодических решений. Замена численных вычислений их заранее просчитанными формулами ведет к существенной экономии вычислительного времени. Подобные расчеты делались и ранее, однако их точность была недостаточной, а трудоемкость была весьма велика. **Цель:** применение метода резонансной нормальной формы и разработанного для этих целей программного пакета к системам четвертого порядка для повышения скорости вычислений. **Результаты:** показано, что при помощи единого алгоритма возможно изучать уравнения высоких порядков (четвертого и более). Сравнение табуляции полученных формул с численными решениями соответствующих уравнений показывает хорошее количественное согласие. К тому же скорость вычислений по заранее подготовленным аппроксимирующим формулам на порядки превосходит скорость численных расчетов. Полученные аппроксимирующие приближения успешно применимы и к неустойчивым решениям. Так, в системе Хенона – Хейлеса периодические решения окружены хаотическими решениями, и при численном интегрировании алгоритмы зачастую на них неустойчивы. **Практическая значимость:** разработанный подход может быть использован при моделировании физических и биологических систем.

**Ключевые слова** – резонансная нормальная форма, динамические системы, локальные периодические семейства решений, компьютерная алгебра.

**Цитирование:** Еднерал В. Ф., Тимофеевская О. Д. Поиск периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода нормальной формы. Случай уравнений четвертого порядка. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 24–34. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-24-34

**Citation:** Edneral V. F., Timofeevskaya O. D. Normal form method in search for periodic solutions of ordinary differential equations. Case of the fourth order. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 24–34 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-24-34

### Введение

Метод нормальной формы основывается на преобразовании системы обыкновенных дифференциальных уравнений к более простой системе, называемой нормальной формой в окрестности стационарной точки. Системам второго порядка была посвящена работа [1]. На важность этого метода в случае исследования обыкновенных дифференциальных уравнений обратили внимание достаточно давно, см., например, [2] или [3].

Само определение нормальной формы и нормализующего преобразования дается в несколько различающихся формах в общем и специальных случаях. Так, очень развиты приложения для га-

мильтоновых систем [4–7; 8, ч. 1, 2]. Резонансные и нормальные формы Белицкого исследуются в работах [9; 10, ч. 5, § 20; 11]. Существует немало алгоритмов (и их реализаций) для построения нормальных форм и соответствующих преобразований. Для гамильтонова случая это улучшенный алгоритм Депри и Хори [12] и его символическая алгебраическая реализация в системе REDUCE [13]. Сущность метода численного построения нормальных форм для гамильтонианов описывается в работе [14]. Вопросы сходимости нормализующего преобразования обсуждаются в работах [6, 7, 15, 16]. Что же касается построения нормальной формы в общем случае, мы упомянем здесь (в дополнение к книге А. Д. Брюно [17]) также статьи [18–20].

В настоящей работе мы будем использовать алгоритм, основанный на подходе, который был развит А. Д. Брюно [6, 7, 9, 10, 17] для резонансной нормальной формы. Важным преимуществом этого подхода является возможность исследования широкого класса автономных систем в рамках единой схемы, которая легко поддается алгоритмизации.

В частности, этот подход обеспечивает конструктивный метод получения приближений для локальных семейств периодических и условно периодических решений в форме степенных/фурье-рядов. Мы уделяем особое внимание проблеме сходимости применяемых преобразований, что позволяет надеяться на достаточную точность получаемых приближений. Кроме самих решений, мы можем также найти приближения для начальных условий, которые инициируют такие периодические решения. То есть возможно проводить некоторые элементы фазового анализа.

Другое достоинство используемого подхода состоит в алгоритмической простоте построения нормальной формы и соответствующего преобразования. Мы имеем прямую рекуррентную формулу для этой процедуры, которая не требует хранения большого объема промежуточных результатов. Подход свободен от необходимости решать промежуточные системы уравнений, а также не имеет каких-либо ограничений на случаи резонансов низких порядков.

С помощью предлагаемого метода также возможно получать приближения для неперiodических семейств. В этом случае получаемые результаты близки к результатам метода линеаризации Карлемана. Для периодических и условно периодических случаев метод представляет собой обобщение подхода Пуанкаре — Линдстеда.

Исследованию системы шестого порядка Эйлера — Пуассона посвящена работа [21]. Исследованию локальной интегрируемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) посвящена работа [22]. Наконец, к серии работ по изучению интегрируемости сильно вырожденной двухмерной системы ОДУ относятся работы [23, 24]. Метод также был применен для вычисления оценок цикличности в планарной кубической системе [25] в связи с шестнадцатой проблемой Гильберта. Завершая это перечисление, следует отметить продуктивность описываемого метода не только для поиска чисто периодических орбит, но и для описания условно периодического движения. Примером может служить работа [26], где построено приближение, описывающее движение двойного маятника. При этом счет по полученным аппроксимирующим формулам опережает соответствующие расчеты по методу Рунге — Кутты в сотни раз.

## Примеры обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

### Система Хенона — Хейлеса

В работах [27–29] описывается применение метода нормальной формы для построения аналитической аппроксимации всех (включая комплексные) локальных семейств периодических решений в окрестности начала координат для системы уравнений Хенона — Хейлеса. Семейства решений представлены в виде отрезков рядов Фурье с приближенными коэффициентами и частотами, а соответствующие траектории описаны как пересечения гиперповерхностей, которые определены в виде многомерных степенных рядов от значений механической энергии системы. Сравнение численных значений, полученное табулированием приближенных результатов, полученных описанными выше методами, с результатами численной интеграции системы Хенона — Хейлеса демонстрирует хорошее согласование, которого достаточно, чтобы применять эти приближенные решения в инженерных приложениях.

Система уравнений Хенона — Хейлеса первоначально возникла в теории движения частиц в аксиально симметричном гравитационном поле, точнее, из задачи о движении звезд в галактическом поле [30], как простая модель для численных экспериментов. Это система двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x} = -x - 2xy; \quad \ddot{y} = -y - x^2 + y^2. \quad (1)$$

Она может быть записана как система автономных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  — векторная функция времени;  $\dot{\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{x}/dt$  — временная производная;  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  — вектор, который является функцией от  $\mathbf{x}$  и, возможно, каких-то параметров, как гамильтонова система уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + x^2 + y^2] + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (3)$$

Линейная замена переменных

$$\begin{aligned} x &= y_1 + y_3, \quad \dot{x} = -i(y_1 - y_3); \\ y &= y_2 + y_4, \quad \dot{y} = -i(y_2 - y_4) \end{aligned} \quad (4)$$

преобразует (1) к форме с диагональной линейной частью

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + \tilde{\Phi}_i(y), \sigma_1 = 0, i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

или в переменных системы к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -iy_1 - i(y_1 + y_3)(y_2 + y_4); \\ \dot{y}_2 &= -iy_2 - \frac{i}{2}[(y_1 + y_3)^2 - (y_2 + y_4)^2]; \\ \dot{y}_3 &= iy_3 + i(y_1 + y_3)(y_2 + y_4); \\ \dot{y}_4 &= iy_4 + \frac{i}{2}[(y_1 + y_3)^2 - (y_2 + y_4)^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

Собственными значениями этой системы являются две пары комплексно сопряженных мнимых единиц  $\Lambda = (-i, -i, i, i)$ . Таким образом, это истинно резонансная задача, а это, как известно, самый трудный тип задач для решения методами теории возмущений.

**Нормальная форма системы Хенона — Хейлеса**

Для системы Хенона — Хейлеса (1) отношения всех пар собственных значений равны  $\pm 1$ , поэтому это резонансный случай низшего порядка. Напомним, что формально условие А выполнено [6], если существует не зависящий от времени и индекса  $i$  параметр  $\omega$  такой, что нормальная форма системы удовлетворяет уравнениям

$$A = \{z: \psi_i = \lambda_i z_i \omega, \text{ если } \text{Re} \lambda_i = 0; z_i = 0, \text{ если } \text{Re} \lambda_i \neq 0; i = 1, \dots, n\}. \quad (7)$$

Если условие А для (1) выполнено, то нормализующее преобразование сходится и решения нормальной формы содержат все локальные для данной неподвижной точки семейства периодических решений. Нормальная форма для системы (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \overset{\text{def}}{z_i} &= z_i g_i = \lambda_i z_i + \\ + z_i \sum_{\substack{q_i \geq -1, \\ q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_4 \geq 0, \\ q_1 + q_2 = q_3 + q_4 > 0}} g_{i, q_1, q_2, q_3, q_4} z_1^{q_1} z_2^{q_2} z_3^{q_3} z_4^{q_4}, \\ i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (8)$$

Условие А для (1) определяется системой уравнений (7)

$$\lambda_i z_i \omega = \lambda_i z_i + z_i \sum_{i=1, 2, 3, 4} g_{i, q_1, q_2, q_3, q_4} z_1^{q_1} z_2^{q_2} z_3^{q_3} z_4^{q_4}, \quad (9)$$

где  $\omega$  есть функция  $z_1, \dots, z_4$ , которая не зависит от индекса  $i$  и времени  $t$ , но определяется только условием А.

Поиск всех решений системы типа (9) представляет собой независимую задачу решения систем уравнений в кольце формальных степенных рядов. Важно, что при удовлетворении условия А

в кольце таких рядов соответствующие решения имеют базис, состоящий из сходящихся рядов. Поэтому и семейства периодических решений (9) могут быть выражены в терминах сходящихся рядов. Для решения системы типа (9) мы воспользуемся простой факторизацией.

Поскольку система Хенона — Хейлеса (1) действительна, то в нормальной форме (8) ряды  $g_j(z)$  должны удовлетворять условию действительности

$$\begin{aligned} g_{j+2}(z) &= \bar{g}_j(z); \\ z_{j+2} &= \bar{z}_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь надчеркивание обозначает процедуру комплексного сопряжения.

Используя программу NORT [24], для системы Хенона — Хейлеса мы получили

$$\begin{aligned} g_3 &= i \cdot \left[ 1 - \frac{7}{3} z_1 z_3^{-1} z_4^2 + \frac{2}{3} z_2 z_4 - \frac{5}{3} z_1 z_3 + \right. \\ &+ \frac{413}{54} z_3^{-1} z_1 z_2 z_4^3 + \frac{157}{12} z_2^2 z_4^2 - \frac{59}{4} z_1^2 z_4^2 - \\ &- \frac{601}{18} z_1 z_2 z_3 z_4 - \frac{403}{108} z_2^2 z_3^2 + \frac{223}{108} z_1^2 z_3^2 + \\ &+ \frac{21203}{432} z_1 z_2^2 z_3^{-1} z_4^4 + \frac{67025}{1296} z_1^3 z_3^{-1} z_4^4 + \\ &+ \frac{21206}{405} z_2^3 z_4^3 - \frac{22387}{135} z_1^2 z_2 z_4^3 + \frac{67627}{1080} z_1 z_2^2 z_3 z_4^2 - \\ &- \frac{20551}{360} z_1^3 z_3 z_4^2 - \frac{3832}{405} z_2^3 z_3^2 z_4 - \frac{4789}{15} z_1^2 z_2 z_3^2 z_4 - \\ &\left. - \frac{46313}{2160} z_1 z_2^2 z_3^3 + \frac{102541}{6480} z_1^3 z_3^3 + O(z^8) \right]; \\ g_4 &= i \cdot \left[ 1 - \frac{5}{3} z_2 z_4 + \frac{2}{3} z_1 z_3 - \frac{7}{3} z_2 z_3^2 z_4^{-1} - \right. \\ &- \frac{785}{108} z_2^2 z_4^2 + \frac{605}{108} z_1^2 z_4^2 + \frac{407}{18} z_1 z_2 z_3 z_4 + \\ &+ \frac{53}{4} z_2^2 z_3^2 - \frac{179}{12} z_1^2 z_3^2 - \frac{595}{54} z_1 z_2 z_3^3 z_4^{-1} - \\ &- \frac{65495}{1296} z_2^3 z_4^3 + \frac{40139}{432} z_1^2 z_2 z_4^3 + \frac{11291}{135} z_1 z_2^2 z_3 z_4^2 - \\ &- \frac{12472}{405} z_1^3 z_3 z_4^2 + \frac{25295}{216} z_2^3 z_3^2 z_4 + \frac{52267}{1080} z_1^2 z_2 z_3^2 z_4 - \\ &- \frac{16307}{135} z_1 z_2^2 z_3^3 - \frac{30626}{405} z_1^3 z_3^3 + \frac{77777}{1296} z_2^3 z_3^4 z_4^{-1} - \\ &\left. - \frac{130753}{2160} z_1^2 z_2 z_3^4 z_4^{-1} + O(z^8) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Вычисление нормальной формы и нормализующего преобразования для системы Хенона — Хейлеса до 11-го порядка на NORT в рациональной арифметике заняло около 6 секунд на компьютере Pentium-Pro 200 MHz и дало 110 членов нормальной формы, а также 1250 членов нормализующего преобразования. В описываемом здесь примере нормальная форма была вычислена до членов 19-го порядка в рациональной арифметике бесконечной точности. Отметим, что существует значительное различие в скорости вычислений при использовании различных арифметик (с плавающей запятой, длинной целой, модулярной) для обработки численных коэффициентов.

**Локальные семейства периодических решений системы Хенона — Хейлеса в окрестности начала координат**

Уравнения (9) могут быть представлены (посредством исключения  $\omega$ , которое отлично от нуля для нетривиальных решений) в таком виде:

$$\begin{aligned} P_1 & \stackrel{\text{def}}{=} z_1 z_3 [g_1(z) + g_3(z)] = 0; \\ P_2 & \stackrel{\text{def}}{=} z_2 z_4 [g_2(z) + g_4(z)] = 0; \\ P_3 & \stackrel{\text{def}}{=} z_1 z_4 [g_1(z) + g_4(z)] = 0; \\ P_4 & \stackrel{\text{def}}{=} z_2 z_3 [g_2(z) + g_3(z)] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Нахождение всех локальных семейств периодических решений системы (8) эквивалентно определению всех решений системы (11). Для каждого из решений (11) соответствующее семейство решений (8) вследствие (9) имеет вид

$$z_j = c_j \exp(-i\omega t); z_{j+2} = c_{j+2} \exp(i\omega t), j = 1, 2. \quad (12)$$

Константы  $c_j$  — постоянные интегрирования и  $\omega$  — параметр из (9), который играет роль частоты.

Важно, что для любой обратимой системы оба полинома  $P_1$  и  $P_2$  в (11) имеют одинаковый множитель [9; 10, гл. 5, §10]

$$\begin{aligned} P_1(z) &= (z_1^r z_4^s - z_2^r z_3^s) Q_1(z); \\ P_2(z) &= (z_1^r z_4^s - z_2^r z_3^s) Q_2(z), \end{aligned}$$

где  $r$  и  $s$  — наименьшие натуральные целые, удовлетворяющие уравнению  $\lambda_1 r - \lambda_2 s = 0$ .

Система Хенона — Хейлеса обратима и имеет  $s = r = 1$ , но благодаря дополнительной симметрии из (10) и (11) можно найти, что

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha(z_1^2 z_4^2 - z_2^2 z_3^2) \left[ 1 + \frac{85}{18} z_1 z_3 - \frac{59}{18} z_2 z_4 + O(z^4) \right]; \\ P_2 &= -\alpha(z_1^2 z_4^2 - z_2^2 z_3^2) \left[ 1 + O(z^2) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\alpha \neq 0$  — числовая константа, а последние множители имеют ненулевые постоянные члены, т. е. они не могут давать вклад ни в какое дополнительное семейство решений (напомним, что мы интересуемся решениями, которые включают стационарную точку  $z = 0$ ). Таким образом, вместо первой пары уравнений в (11) мы имеем лишь одно уравнение

$$z_1^2 z_4^2 - z_2^2 z_3^2 = 0.$$

Уравнение  $z_1 z_4 = \pm z_2 z_3$  описывает пару гиперповерхностей

$$h_+ = \{z: z_1 z_4 = z_2 z_3\} \text{ и } h_- = \{z: z_1 z_4 = -z_2 z_3\} \quad (14)$$

соответственно. Для второй пары уравнений в системе (11) имеем:

$$\begin{aligned} \text{если } z_1 z_4 = z_2 z_3, \text{ тогда } P_3 &= \beta z_1 z_4 (3z_1 z_3 - z_2 z_4) \times \\ &\times (z_1 z_3 - 3z_2 z_4) \left[ 1 + \frac{977}{180} (z_1 z_3 + z_2 z_4) + O(z^4) \right]; \\ P_4 &= -\beta z_2 z_3 (3z_1 z_3 - z_2 z_4) (z_1 z_3 - 3z_2 z_4) \left[ 1 + O(z^2) \right]; \\ \text{если } z_1 z_4 = -z_2 z_3, \text{ тогда} \\ P_3 &= \gamma z_1 z_4 (z_1 z_3 - z_2 z_4) \left[ 1 - \frac{23}{18} z_1 z_3 + \frac{49}{18} z_2 z_4 + O(z^4) \right]; \\ P_4 &= -\gamma z_2 z_3 (z_1 z_3 - z_2 z_4) \left[ 1 + O(z^2) \right], \end{aligned}$$

где  $\beta$  и  $\gamma$  — численные константы, не равные нулю. Определим также гиперповерхности

$$\begin{aligned} h_a &= \{z: 3z_1 z_3 = z_2 z_4\}; \\ h_b &= \{z: z_1 z_3 = 3z_2 z_4\}; \\ h_c &= \{z: z_1 z_3 = z_2 z_4\}; \\ h_i &= \{z: z_i = 0\}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, имеется две ветви решений уравнений (11), которые соответствуют пересечению  $h_+ \cap h_a$  и  $h_+ \cap h_b$ , и одна ветвь, соответствующая пересечению  $h_- \cap h_c$ . Еще две ветви решений соответствуют пересечению гиперповерхностей  $h_1 \cap h_2$  и  $h_3 \cap h_4$ .

Имеется также пара ветвей, которая соответствует комплексно сопряженным семействам решений с нулевой энергией и единичной частотой  $\omega$ . Первая ветвь — это  $h_1 \cap h_3$ , а вторая ветвь —  $h_2 \cap h_4$ . Перечисленные ветви исчерпывают все возможные локальные семейства периодических решений уравнений (6) через подстановки (12), константы связи  $c_j$  и вычисление соответствующих частот  $\omega$  в виде рядов от этих констант.

Эти семь ветвей решений системы уравнений (11) порождают 10 различных локальных семейств периодических решений системы (1) с четырьмя различными частотами [см. (17) ниже]:

$$\begin{aligned} \text{семейства 1 и 1'} (h_+ \cap h_a): & z_1 z_4 = z_2 z_3, 3z_1 z_3 = z_2 z_4; \\ \text{семейства 2 и 2'} (h_+ \cap h_b): & z_1 z_4 = z_2 z_3, z_1 z_3 = 3z_2 z_4; \\ \text{семейства 3 и 3'} (h_- \cap h_c): & z_1 z_4 = -z_2 z_3, z_1 z_3 = z_2 z_4; \\ \text{семейство 4 } (h_2 \cap h_4): & z_2 = z_4 = 0; \\ \text{семейство 5 } (h_1 \cap h_3): & z_1 = z_3 = 0; \\ \text{семейство 6 } (h_1 \cap h_2): & z_1 = z_2 = 0; \\ \text{семейство 7 } (h_3 \cap h_4): & z_3 = z_4 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Некоторые из этих семейств были представлены в работе [31]. Причиной дублирования пер-

вых трех семейств является симметрия первоначальной системы (1) по отношению к обращению времени. Это обращение изменяет знаки в  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , таким образом дублируя число семейств. Но обращение времени только переставляет семейства 6 и 7 и эквивалентно тривиальному временному сдвигу для семейств 4 и 5.

Используя представление (12), можно переписать приведенные выше соотношения через константы интегрирования  $c_1, \dots, c_4$ , просто заменив там  $z_i \rightarrow c_i$ . Если мы интересуемся семейством действительных решений (6), тогда мы должны выбрать в выражении (12)  $c_1 = \bar{c}_3$  и  $c_2 = \bar{c}_4$ . Однако в резонансном случае требуется больше дополнительных условий, чтобы гарантировать действительность решений. Первая пара уравнений в (11) — это критическое условие действительности резонансных решений, что следует из (12). Так как система (1) автономная, решения содержат обычный фазовый сдвиг, которым можно пренебречь, и тогда все константы могут быть выбраны действительными (или, иногда, чисто мнимыми). После этого каждое решение (16) (кроме существенно комплексных семейств 6 и 7, которые определяются комплексными константами) определяется только тремя из четырех действительных констант  $c_i$ . Поэтому каждое действительное семейство решений системы (12) зависит от единственной константы.

Используя определенную константу  $c_i$ , скажем,  $c_1$  (для действительных параметрических семейств 1–5), подставим ее в систему (12) и получим соответствующую величину частоты  $\omega$  в виде ряда по  $c_1$  через (9). Чтобы найти соответствующие семейства периодических решений (1) как усеченный ряд по этой постоянной, мы подставим (12) в ранее подсчитанное нормализующее преобразование и в преобразование (4). Наконец, константа  $c_1$  может быть зафиксирована подстановкой решения (1) в выражение для энергии  $H$  из (3). Энергия (которая не зависит от времени!) тогда представляет собой ряд по одной постоянной (скажем,  $c_1$ ), и обращением этого ряда величина  $c_1$  может быть найдена как ряд по степеням энергии, и тогда все другие константы можно исключить. Для действительного случая решения представляются в виде усеченных рядов Фурье.

Это дает приближенные частоты для семейства периодических решений системы (1) как функции механической энергии (3), которые равны

$$\begin{aligned} \omega_{1,4} &= 1 - \frac{5}{6}H + \frac{17}{48}H^2 + \frac{127517}{38880}H^3 + \\ &+ \frac{51952319}{3732480}H^4 + \frac{1675438657}{111974400}H^5; \\ \omega_{2,5} &= 1 - \frac{5}{6}H - \frac{95}{48}H^2 - \frac{54935}{7776}H^3 - \\ &- \frac{22030445}{746496}H^4 - \frac{200207485}{1492992}H^5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_3 &= 1 + \frac{1}{3}H - \frac{2}{3}H^2 + \frac{5389}{2430}H^3 - \\ &- \frac{52393}{5832}H^4 + \frac{29471957}{729000}H^5; \\ \omega_{6,7} &= \pm 1, \end{aligned} \tag{17}$$

где индексы у  $\omega$  соответствуют пронумерованным выше ветвям решений. Для каждой частоты соответствующая аппроксимация семейства периодических решений представляет собой ряд Фурье по времени и степенной ряд по  $H$ , который приводится в работе [31].

Результаты проверялись двумя способами. Первый состоял в прямой подстановке ряда в первоначальные уравнения (1). Результаты содержали только члены пренебрежимо малых порядков. Вторым путем состоял в сравнении численного решения  $(x_{num}(t), y_{num}(t), \dot{x}_{num}(t), \dot{y}_{num}(t))$  уравнений (1), вычисленного с использованием метода Рунге — Кутты, с табулированием величин приближенных решений  $(x_{app}(t), y_{app}(t), \dot{x}_{app}(t), \dot{y}_{app}(t))$ , вычисленных с использованием предварительно рассчитанных формул. Решения были вычислены при значениях энергии  $H = \frac{1}{24}$ ,  $H = \frac{1}{12}$  и  $H = \frac{1}{8}$ . Эти значения были взяты из оригинальной работы [30]. Ошибка вычислялась методом относительной среднеквадратической ошибки:

$$f_{err} = \max_{t \in [0, 2\pi/\omega_i]}^{\text{def}} \times \sqrt{\frac{(x_{num}(t) - x_{app}(t))^2 + (y_{num}(t) - y_{app}(t))^2}{x_{num}^2(t) + y_{num}^2(t) + \dot{x}_{num}^2(t) + \dot{y}_{num}^2(t)} + \frac{(\dot{x}_{num}(t) - \dot{x}_{app}(t))^2 + (\dot{y}_{num}(t) - \dot{y}_{app}(t))^2}{x_{num}^2(t) + y_{num}^2(t) + \dot{x}_{num}^2(t) + \dot{y}_{num}^2(t)}}$$

Результаты численного сравнения (т. е. величины  $f_{err}$ ) таковы:

	$H = \frac{1}{24}$ :	$H = \frac{1}{12}$ :
для решений с $\omega_1$ :	$1,3 \times 10^{-5}$	$7,6 \times 10^{-4}$ ;
для решений с $\omega_2$ :	$4,7 \times 10^{-5}$	$4,4 \times 10^{-3}$ ;
для решений с $\omega_3$ :	$1,1 \times 10^{-5}$	$5,0 \times 10^{-4}$ ;
для решений с $\omega_4$ :	$1,3 \times 10^{-5}$	$7,6 \times 10^{-4}$ ;
для решений с $\omega_5$ :	$2,9 \times 10^{-5}$	$1,8 \times 10^{-3}$ .

Так как для значения  $H = \frac{1}{6}$  система (1) имеет хаотический характер [30], значения  $\frac{1}{24}$  и  $\frac{1}{12}$  не являются физически малыми. Для значения  $H = \frac{1}{8}$  максимальная относительная среднеквадратическая ошибка составляет 10 %.

Мы не проводили численную проверку для семейств 6 и 7, которые относятся к специальному типу. Такие семейства существуют для любой системы, у которой есть по крайней мере одно мнимое собственное значение [32].

Тем же самым образом была исследована обобщенная система Хенона — Хейлеса как случай параметрической системы четвертого порядка [33]. Некоторые семейства периодических решений существуют только при фиксированных величинах параметров системы, а другие семейства существуют в интервале этих величин. Это пример бифуркационного анализа методом нормальной формы. Замечательно, что система имеет дополнительное нетривиальное комплексное семейство периодических решений при некоторой фиксированной величине параметра.

### Еще один пример системы четвертого порядка. Резонансный и нерезонансный случаи

В этом разделе будет изучено семейство локально периодических решений гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с кубической нелинейностью [34]. Такая система возникает при рассмотрении проблемы распространения волн на поверхности воды после сведения ее к нормальной форме. Будет найдено локальное семейство периодических решений и продемонстрирована важность специального исследования резонансного поведения при соответствующих значениях параметров.

Давайте рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = x_2 y_1 - x_1 y_2 + \frac{1}{2} y_2^2 + \frac{\alpha}{2} x_1^2 + \frac{\beta}{3} x_1^3 - \frac{1}{4} x_1^4.$$

Это система четырех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_1; \\ \dot{y}_1 &= y_2 - \alpha x_1 - \beta x_1^2 + x_1^3; \\ \dot{y}_2 &= -y_1. \end{aligned} \quad (18)$$

Система обратима по отношению к инволюции:  $(x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (x_1, -x_2, -y_1, y_2)$ . Начало координат  $(0, 0, 0, 0)$  — стационарная точка, и собственные значения равны

$$\left\{ -\sqrt{-1-\sqrt{\alpha}}, \sqrt{-1-\sqrt{\alpha}}, -\sqrt{-1+\sqrt{\alpha}}, \sqrt{-1+\sqrt{\alpha}} \right\}. \quad (19)$$

Ниже мы обсудим случай с положительной  $\alpha$ , когда мы имеем по крайней мере одну пару мнимых собственных значений.

### Случай $\alpha > 1$

В этом случае только первая пара собственных значений чисто мнимая:

$$\alpha \rightarrow (\omega_0^2 - 1)^2, \quad \omega_0^2 > 2,$$

собственные значения будут равны

$$\left\{ -i\omega_0, i\omega_0, -\sqrt{\omega_0^2 - 2}, \sqrt{\omega_0^2 - 2} \right\}. \quad (20)$$

После нормализации получаем систему в новых координатах  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -i\omega_0 z_1 + z_1 P_1(z_1 \cdot z_2, z_3 \cdot z_4) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_1; \\ \dot{z}_2 &= i\omega_0 z_2 + z_2 P_2(z_1 \cdot z_2, z_3 \cdot z_4) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_2; \\ \dot{z}_3 &= -\sqrt{\omega_0^2 - 2} z_3 + z_3 P_3(z_1 \cdot z_2, z_3 \cdot z_4) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_3; \\ \dot{z}_4 &= \sqrt{\omega_0^2 - 2} z_4 + z_4 P_4(z_1 \cdot z_2, z_3 \cdot z_4) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_4. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $P_1, \dots, P_4$  — ряды, вычисленные на МАТНЕМАТИСА до третьего порядка по переменным  $z_i$ . Заметим, что ряды  $P_i$  в правой стороне зависят только от произведений  $z_1 \cdot z_2$  и  $z_3 \cdot z_4$ .

Периодичность условий налагает требование, что локальное периодическое семейство решений должно удовлетворять условиям А. Так как имеются ненулевые действительные части в собственных значениях  $\lambda_3, \lambda_4$ , то условие (7) требует, чтобы  $z_3 = z_4 = 0$ . Но вычисленные величины  $P_1$  и  $P_2$  таковы, что  $P_1(z_1 \cdot z_2, 0) = -P_2(z_1 \cdot z_2, 0)$ , следовательно, видно, что по отношению к (21) произведение  $z_1 \cdot z_2$  постоянно, и мы имеем однопараметрическое<sup>1</sup> семейство периодических решений (21)

$$z_1 = \mu \exp(-i \cdot \omega \cdot t); \quad z_2 = \mu \exp(i \cdot \omega \cdot t); \quad z_3 = z_4 = 0, \quad (22)$$

где частота  $\omega = \omega_0 + i \cdot P_1(\mu^2, 0)$ ;  $\mu$  — действительная постоянная. Вычисления дают для низших порядков по  $\mu$

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \\ &+ \mu^2 \frac{\beta^2(20 - 58\omega_0^2) - 9\omega_0^2(\omega_0^2 - 2)(5\omega_0^2 - 2)}{12\omega_0^3(\omega_0^2 - 1)^3(\omega_0^2 - 2)(5\omega_0^2 - 2)} + O(\mu^4). \end{aligned} \quad (23)$$

Первый порядок<sup>2</sup> решения для  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$  (мы получили его, подставляя  $z_i$ , полученные выше, в нормализующее преобразование) равен

<sup>1</sup> Мы опустили тривиальный временной сдвиг как параметр.

<sup>2</sup> Вышние члены в  $\mu$  не приводятся в силу громоздкости.

$$\left( -2\mu \frac{\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - 1}, 2\mu\omega_0 \frac{\sin(\omega t)}{\omega_0^2 - 1}, 2\mu\omega_0 \sin(\omega t), 2\mu \cos(\omega t) \right). \quad (24)$$

Итак, мы имеем два внешних параметра  $(\alpha = (\omega_0^2 - 1)^2 \text{ и } \beta)$ , один внутренний параметр (постоянную интегрирования  $\mu$ ) и тривиальный временной сдвиг.

**Случай  $0 < \alpha < 1$**

В этом случае все собственные значения чисто мнимы, т. е.  $\omega_0^2 < 2$ , и собственные значения равны

$$\{-i\omega_0, i\omega_0, -i\sqrt{2 - \omega_0^2}, i\sqrt{2 - \omega_0^2}\}. \quad (25)$$

Мы теперь имеем два подслучая: собственные значения не соотносятся как целые числа и резонансный случай.

**Случай, когда собственные значения не соотносятся как целые числа**

Это означает, что дробь  $\lambda_1 / \lambda_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2 - \omega_0^2}}$  не является рациональным числом. Нормализованное уравнение не будет иметь ту же самую форму, что и (21), но будет уравнением, все собственные значения которого чисто мнимы. Мы опускаем условно периодический двухчастотный случай. Но периодические семейства могут здесь появиться только если  $z_3 = z_4 = 0$  или  $z_1 = z_2 = 0$ . Если  $z_3 = z_4 = 0$ , как в случае выше, мы будем иметь ту же самую частоту (23) и то же самое решение (24). Поэтому это семейство существует для  $\alpha > 0$ .

Если  $z_1 = z_2 = 0$ , мы будем иметь другую частоту

$$\begin{aligned} \omega = & \sqrt{2 - \omega_0^2} + \\ & + \mu^2 \frac{\beta^2 (96 - 58\omega_0^2) - 9\omega_0^2 (\omega_0^2 - 2) (5\omega_0^2 - 8)}{12\omega_0^2 (\omega_0^2 - 1)^3 (2 - \omega_0^2)^{3/2} (5\omega_0^2 - 8)} + \\ & + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (26)$$

и первый порядок приближения для решений

$$\left( 2\mu \frac{\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - 1}, -2\mu\sqrt{2 - \omega_0^2} \frac{\sin(\omega t)}{\omega_0^2 - 1}, 2\mu\sqrt{2 - \omega_0^2} \sin(\omega t), 2\mu \cos(\omega t) \right). \quad (27)$$

В этих выражениях частоты содержат полюса. Имеются полюса при  $\omega_0^2 = 0, 2/5, 1, 2, 8/5$ .

Посмотрим, какие собственные значения соответствуют этим величинам:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 = 0, 1, 2 & \text{ — жорданова матрица} \\ & \text{ в линейной части;} \\ \omega_0^2 = 2/5, 8/5 & \text{ — резонансный случай} \\ & \text{ в линейной части;} \\ \{\lambda_i\} = & \left\{ -i\sqrt{\frac{2}{5}}, i\sqrt{\frac{2}{5}}, -2i\sqrt{\frac{2}{5}}, 2i\sqrt{\frac{2}{5}} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Поэтому имеются области в  $\omega_0$  (или  $\alpha$ ), где ряды медленно расходятся и могут терять смысл. Это связано с характеристиками линейной части. Мы опустим здесь рассмотрение случая жордановой формы линейной части.

**Резонансный случай**

При  $\omega_0^2 = 2/5, 8/5$  все собственные значения сопоставимы. В нашем случае мы имеем резонанс третьего порядка (1:2), т. е.  $\lambda_1/\lambda_3 = 1/2$ . Порядок резонанса определяется как сумма числителя и знаменателя этой дроби. После нормализации в этом случае имеем систему

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & -i\sqrt{\frac{2}{5}}z_1 + z_1P_1(z_1, z_2, z_3, z_4); \\ \dot{z}_2 = & i\sqrt{\frac{2}{5}}z_2 + z_2P_2(z_1, z_2, z_3, z_4); \\ \dot{z}_3 = & -2i\sqrt{\frac{2}{5}}z_3 + z_3P_3(z_1, z_2, z_3, z_4); \\ \dot{z}_4 = & 2i\sqrt{\frac{2}{5}}z_4 + z_4P_4(z_1, z_2, z_3, z_4). \end{aligned} \quad (29)$$

Можно выбрать это решение в форме (мы фиксируем ниже тривиальный временной сдвиг, выбирая постоянную  $a$  в  $z_1, z_2$  чисто действительной):

$$\begin{aligned} z_1 = & a \exp(-i \cdot \omega \cdot t), \quad z_2 = a \exp(i \cdot \omega \cdot t); \\ z_3 = & (\mu - ic) \exp(-2i \cdot \omega \cdot t); \\ z_4 = & (\mu + ic) \exp(2i \cdot \omega \cdot t). \end{aligned} \quad (30)$$

После подстановки этих переменных в условие (7) (уравнения здесь те же, что и в работе [27]) получаем соотношение  $ac = 0$ , которое имеет два решения.

*Подслучай  $c = 0$ .* Остаток условия периодичности (7) дает связь между величинами  $a$  и  $\mu$ . Разрешая эту связь, мы получаем частоту

$$\begin{aligned} \omega = & \sqrt{\frac{2}{5}} + \\ & + \sqrt{\frac{5}{2}} \left( \frac{25}{18} \beta \mu - \frac{125}{6} \mu^2 + \frac{30625}{864} \beta^2 \mu^2 \right) + O(\mu^4). \end{aligned} \quad (31)$$

*Подслучай  $a = 0$ .* Частота

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{125}{31104} \mu^2 (455\beta^2 - 216) + O(\mu^4). \quad (32)$$



Как видно, у величин частот не возникает сингулярностей при изучении резонанса. Решения также не имеют полюсов. Можно дать следующую общую рекомендацию: следует отдельно изучать резонансы в каждом порядке, который меньше чем порядок нормальной формы, используемой для анализа.

Итак, для локальных семейств периодических решений системы кубических уравнений с двумя внешними параметрами, приведенной выше, можно заключить, что существует две области для каждого параметра. В первой области — одно семейство периодических решений с одним внутренним параметром, для второй области — два семейства с одним внутренним параметром. Показано, что резонансы низших уровней следует изучать отдельно.

## Литература

1. Еднерал В. Ф., Тимофеевская О. Д. Поиск периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода нормальной формы. Ч. I. *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика*, 2014, № 3, с. 28–45.
2. Anosov D. V., Bronshtejn I. U., Aranson Samuel Kh., Arnold V. I., Grines V. Z. *Dynamical systems I (Encyclopaedia of Mathematical Sciences)*. N. Y., Springer-Verlag, 1988. 237 p.
3. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. *Applied Mathematical Sciences*, N. Y., Springer-Verlag, 1983. 420 p.
4. Deprit A. Canonical transformation depending on a small parameter. *Celestial Mechanics*, 1969, vol. 1, no. 1, pp. 12–30. <https://doi.org/10.1007/BF01230629>
5. Hori G. I. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. *J. Japan Astron. Soc.*, 1966, vol. 18, no. 4, p. 287. Available at: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1966PASJ...18..287H> (accessed 8 August 2018).
6. Bruno A. D. Analytical form of differential equations. I. *Trans. Mosc. Mat. Soc.*, 1971, vol. 25, pp. 119–262. Available at: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mmo&paperid=256&option\\_lang=eng](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mmo&paperid=256&option_lang=eng) (accessed 8 August 2018).
7. Bruno A. D. Analytical form of differential equations. II. *Trans. Mosc. Mat. Soc.*, 1972, vol. 26, pp. 199–239. Available at: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mmo&paperid=256&option\\_lang=eng](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mmo&paperid=256&option_lang=eng) (accessed 8 August 2018).
8. Bruno A. D. *The restricted 3-body problem: plane periodic orbits*. Series: De Gruyter Expositions in Mathematics. Berlin, New York, 1994. 362 p. Available at: <https://www.degruyter.com/view/product/137385> (accessed 8 August 2018).

## Заключение

Таким образом, при помощи метода нормальных форм построены достаточно точные аппроксимирующие формулы для получения количественных приближений семейств периодических решений автономной системы ОДУ в окрестности нулевой начальной точки. Метод может также успешно применяться для бифуркационного анализа и исследования фазовой картины. Также продемонстрировано, что подобный анализ эффективен лишь если его проводить в окрестности некоторого заранее выбранного резонанса.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100».

9. Bruno A. D. Normal forms. *J. Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, 1998, vol. 45, pp. 413–427. Available at: <https://ideas.repec.org/a/eee/matcom/v45y1998i5p413-427.html> (accessed 8 August 2018).
10. Bruno A. D. *The power geometry in algebraic and differential equations*. Amsterdam, Elsevier Science (North-Holland), 2000. 395 p.
11. Bibikov Yu. N. *Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations*. Series: Lect. Notes Math. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1979, vol. 702. 146 p.
12. Mersman W. A. A new algorithm for Lie transformation. *Celestial Mechanics*, 1970, vol. 3, no. 1, pp. 81–89. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01230434> (accessed 8 August 2018).
13. Shevchenko I. I., Sokolsky A. G. Algorithms for normalization of Hamiltonian systems by means of computer algebra. *Comp. Phys. Comm.*, 1993, vol. 77, no. 1, pp. 11–18. [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(93\)90032-8](https://doi.org/10.1016/0010-4655(93)90032-8)
14. Godziewski K., Maciejewski A. J. Normalization algorithms of Hamiltonian near an equilibrium point. *Astrophysics and Space Science*, 1991, vol. 179, no. 1, pp. 1–11. [doi:10.1007/BF00642349](https://doi.org/10.1007/BF00642349)
15. Ito H. Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems. *Comment. Math. Helv.*, 1989, vol. 64, no. 3, pp. 412–461.
16. Ito H. Integrability of Hamiltonian systems and Birkhoff normal forms in the simple resonance case. *Math. Ann.*, 1992, vol. 292, no. 1, pp. 411–444. <https://doi.org/10.1007/BF01444629>
17. Bruno A. D. *Local method in nonlinear differential equations*. Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin etc., Springer-Verlag, 1989. 348 p.
18. Walcher S. On differential equations in normal form. *Math. Ann.*, 1991, vol. 291, pp. 293–314. <https://doi.org/10.1007/BF01445209>

19. Walcher S. On transformations into normal form. *J. Math. Analysis and Appl.*, 1993, vol. 180, pp. 617–632. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1993.1420>
20. Vallier L. An algorithm for the computation of normal forms and invariant manifolds. *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Kiev, Ukraine, July 1993, N. Y., ACM Press, ed. by M. Bronstein, 1993, pp. 225–233.
21. Bruno A. D., Edneral V. F. On integrability of the Euler — Poisson equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 152, no. 4, pp. 479–489. <https://doi.org/10.1007/s10958-008-9085-4>
22. Bruno A. D., Edneral V. F. Algorithmic analysis of local integrability. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 79, no. 1, pp. 48–52. doi:10.1134/S1064562409010141
23. Bruno A., Edneral V. On possibility of additional solutions of the degenerate system near double degeneration at the special value of the parameter. *Proceedings of 15th International Workshop “Computer Algebra in Scientific Computing”*, Lecture Notes in Computer Science, 2013, vol. 8136, pp. 75–87. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02297-0>
24. Edneral V. F. Application of power geometry and normal form methods to the study of nonlinear odes. *EPJ Web of Conferences*, 2018, vol. 173, pp. 01004. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201817301004>
25. Edneral V. F. Computer evaluation of cyclicity in planar cubic system. *Proceedings of the ISSAC’97*, Hawaii, USA, July 1997, ed. by W. Küchlin, N. Y., ACM, 1997, pp. 305–309. doi>10.1145/258726.258823
26. Edneral V. F., Khanin R. Investigation of the double pendulum system by the normal form method in MATHEMATICA. *Programming and Computer Software*, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 115–117. <https://doi.org/10.1023/B:PACS.0000021271.80969.ef>
27. Edneral V. F. Computer generation of normalizing transformation for systems of nonlinear ODE. *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Kiev, Ukraine, July 1993, N. Y., ACM Press, ed. by M. Bronstein, 1993, pp. 14–19.
28. Edneral V. F. About normal form method. *Proceedings of the Second Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC’99)*, Munich, Germany, 1999, ed. by Ganzha et al., Springer, 1999, pp. 51–66.
29. Edneral V. F. An algorithm for construction of normal forms. *Computer Algebra in Scientific Computing*, Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, 2007, vol. 4770, pp. 134–142.
30. Henon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astronomical J.*, 1964, vol. 69, pp. 73–79. doi:10.1086/109234
31. Edneral V. F. A symbolic approximation of periodic solutions of the Henon — Heiles system by the normal form method. *J. Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, North-Holland, 1998, vol. 45, no. 5-6, pp. 445–463.
32. Edneral V. F. Complex periodic solutions of autonomous ODE systems with analytical right sides near an equilibrium point. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 1995, vol. 1, no. 2, pp. 393–398.
33. Edneral V. F. Bifurcation analysis of low resonant case of the generalized Henon — Heiles system. *Proceedings of the Fourth Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2001)*, Konstanz, Germany, 2001, ed. by Ganzha et al., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001, pp. 167–176.
34. Edneral V. F. Periodic solutions of a cubic ODE system. *Proceedings of the Fifth Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2003)*, Passau, Germany, September 20–26, 2003, ed. by Ganzha et al., Tech. Univ. München, Munich, 2003, pp. 77–80.

UDC 519.61 + 517.925

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-24-34

**Normal form method in search for periodic solutions of ordinary differential equations. Case of the fourth order**V. F. Edneral<sup>a,b</sup>, PhD, Phys.-Math., Senior Researcher, Associate Professor, [orcid.org/0000-0002-5125-0603](https://orcid.org/0000-0002-5125-0603), [edneral@theory.sinp.msu.ru](mailto:edneral@theory.sinp.msu.ru)O. D. Timofeevskaya<sup>c</sup>, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, [orcid.org/0000-0003-2047-0934](https://orcid.org/0000-0003-2047-0934)<sup>a</sup>Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics of Lomonosov Moscow State University, 1(2), Leninskie gory, 119991, Moscow, Russian Federation<sup>b</sup>Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), 6, Miklukho-Maklaya St., 117198, Moscow, Russian Federation<sup>c</sup>Department of Physics, Lomonosov Moscow State University, 1(2), Leninskie gory, 119991, Moscow, Russian Federation**Introduction:** The method of resonant normal form is based on reducing a system of nonlinear ordinary differential equations to a simpler form, easier to explore. Moreover, for a number of autonomous nonlinear problems, it is possible to obtain explicit formulas

which approximate numerical calculations of families of their periodic solutions. Replacing numerical calculations with their pre-calculated formulas leads to significant savings in computational time. Similar calculations were made earlier, but their accuracy was insufficient, and their complexity was very high. **Purpose:** Application of the resonant normal form method and a software package developed for these purposes to fourth-order systems in order to increase the calculation speed. **Results:** It has been shown that with the help of a single algorithm it is possible to study equations of high orders (4th and higher). Comparing the tabulation of the obtained formulas with the numerical solutions of the corresponding equations shows good quantitative agreement. Moreover, the speed of calculation by prepared approximating formulas is orders of magnitude greater than the numerical calculation speed. The obtained approximations can also be successfully applied to unstable solutions. For example, in the Henon — Heyles system, periodic solutions are surrounded by chaotic solutions and, when numerically integrated, the algorithms are often unstable on them. **Practical relevance:** The developed approach can be used in the simulation of physical and biological systems.

**Keywords** — resonant normal form, dynamic systems, local periodic families of solutions, computer algebra.

**Citation:** Edneral V. F., Timofeevskaya O. D. Normal form method in search for periodic solutions of ordinary differential equations. Case of the fourth order. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 24–34 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-24-34

## References

- Edneral V. F., Timofeevskaya O. D. Looking for families of periodic solutions of ordinary differential equations systems by normal form method. Part I. *Vestnik RUDN. Seriya: Matematika. Informatika. Fizika* [RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics], 2014, no. 3, pp. 28–45 (In Russian).
- Anosov D. V., Bronshtejn I. U., Aranson Samuel Kh., Arnold V. I., Grines V. Z. *Dynamical systems I (Encyclopaedia of Mathematical Sciences)*. N. Y., Springer-Verlag, 1988. 237 p.
- Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. *Applied Mathematical Sciences*, N. Y., Springer-Verlag, 1983. 420 p.
- Deprit A. Canonical transformation depending on a small parameter. *Celestial Mechanics*, 1969, vol. 1, no. 1, pp. 12–30. <https://doi.org/10.1007/BF01230629>
- Hori G. I. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. *J. Japan Astron. Soc.*, 1966, vol. 18, no. 4, p. 287. Available at: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1966PASJ...18..287H> (accessed 8 August 2018).
- Bruno A. D. Analytical form of differential equations. I. *Trans. Mosc. Mat. Soc.*, 1971, vol. 25, pp. 119–262. Available at: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mmo&paperid=256&option\\_lang=eng](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mmo&paperid=256&option_lang=eng) (accessed 8 August 2018).
- Bruno A. D. Analytical form of differential equations. II. *Trans. Mosc. Mat. Soc.*, 1972, vol. 26, pp. 199–239. Available at: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mmo&paperid=256&option\\_lang=eng](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mmo&paperid=256&option_lang=eng) (accessed 8 August 2018).
- Bruno A. D. *The restricted 3-body problem: plane periodic orbits*. Series: De Gruyter Expositions in Mathematics. Berlin, New York, 1994. 362 p. Available at: <https://www.degruyter.com/view/product/137385> (accessed 8 August 2018).
- Bruno A. D. Normal forms. *J. Mathematics and Computers in Simulation*, Elsevier, 1998, vol. 45, pp. 413–427. Available at: <https://ideas.repec.org/a/eee/matcom/v45y1998i5p413-427.html> (accessed 8 August 2018).
- Bruno A. D. *The power geometry in algebraic and differential equations*. Amsterdam, Elsevier Science (North-Holland), 2000. 395 p.
- Bibikov Yu. N. *Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations*. Series: Lect. Notes Math. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1979, vol. 702. 146 p.
- Mersman W. A. A new algorithm for Lie transformation. *Celestial Mechanics*, 1970, vol. 3, no. 1, pp. 81–89. Available at: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01230434> (accessed 8 August 2018).
- Shevchenko I. I., Sokolsky A. G. Algorithms for normalization of Hamiltonian systems by means of computer algebra. *Comp. Phys. Comm.*, 1993, vol. 77, no. 1, pp. 11–18. [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(93\)90032-8](https://doi.org/10.1016/0010-4655(93)90032-8)
- Godziewski K., Maciejewski A. J. Normalization algorithms of Hamiltonian near an equilibrium point. *Astrophysics and Space Science*, 1991, vol. 179, no. 1, pp. 1–11. doi:10.1007/BF00642349
- Ito H. Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems. *Comment. Math. Helv.*, 1989, vol. 64, no. 3, pp. 412–461.
- Ito H. Integrability of Hamiltonian systems and Birkhoff normal forms in the simple resonance case. *Math. Ann.*, 1992, vol. 292, no. 1, pp. 411–444. <https://doi.org/10.1007/BF01444629>
- Bruno A. D. *Local method in nonlinear differential equations*. Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin etc., Springer-Verlag, 1989. 348 p.
- Walcher S. On differential equations in normal form. *Math. Ann.*, 1991, vol. 291, pp. 293–314. <https://doi.org/10.1007/BF01445209>
- Walcher S. On transformations into normal form. *J. Math. Analysis and Appl.*, 1993, vol. 180, pp. 617–632. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1993.1420>
- Vallier L. An algorithm for the computation of normal forms and invariant manifolds. *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Kiev, Ukraine, July 1993, N. Y., ACM Press, ed. by M. Bronstein, 1993, pp. 225–233.
- Bruno A. D., Edneral V. F. On integrability of the Euler — Poisson equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2008, vol. 152, no. 4, pp. 479–489. <https://doi.org/10.1007/s10958-008-9085-4>
- Bruno A. D., Edneral V. F. Algorithmic analysis of local integrability. *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 79, no. 1, pp. 48–52. doi:10.1134/S1064562409010141
- Bruno A., Edneral V. On possibility of additional solutions of the degenerate system near double degeneration at the special value of the parameter. *Proceedings of 15th International Workshop “Computer Algebra in Scientific Computing”*, Lecture Notes in Computer Science, 2013, vol. 8136, pp. 75–87. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-02297-0>
- Edneral V. F. Application of power geometry and normal form methods to the study of nonlinear odes. *EPJ Web of Conferences*, 2018, vol. 173, pp. 01004. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201817301004>
- Edneral V. F. Computer evaluation of cyclicity in planar cubic system. *Proceedings of the ISSAC’97*, Hawaii, USA, July 1997, ed. by W. Küchlin, N. Y., ACM, 1997, pp. 305–309. doi:10.1145/258726.258823
- Edneral V. F., Khanin R. Investigation of the double pendulum system by the normal form method in MATHEMATICA. *Programming and Computer Software*, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 115–117. <https://doi.org/10.1023/B:PACS.0000021271.80969.ef>
- Edneral V. F. Computer generation of normalizing transformation for systems of nonlinear ODE. *Proceedings of the 1993 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Kiev, Ukraine, July 1993, N. Y., ACM Press, ed. by M. Bronstein, 1993, pp. 14–19.
- Edneral V. F. About normal form method. *Proceedings of the Second Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC’99)*, Munich, Germany, 1999, ed. by Ganzha et al., Springer, 1999, pp. 51–66.
- Edneral V. F. An algorithm for construction of normal forms. *Computer Algebra in Scientific Computing*, Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, 2007, vol. 4770, pp. 134–142.
- Henon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astronomical J.*, 1964, vol. 69, pp. 73–79. doi:10.1086/109234
- Edneral V. F. A symbolic approximation of periodic solutions of the Henon — Heiles system by the normal form method. *J. Mathematics and Computers in Simulation*, Else-

- vier, North-Holland, 1998, vol. 45, no. 5-6, pp. 445–463.
32. Edneral V. F. Complex periodic solutions of autonomous ODE systems with analytical right sides near an equilibrium point. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 1995, vol. 1, no. 2, pp. 393–398.
33. Edneral V. F. Bifurcation analysis of low resonant case of the generalized Henon — Heiles system. *Proceedings of the Fourth Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2001)*, Konstanz, Germany, 2001, ed. by Ganzha et al., Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001, pp. 167–176.
34. Edneral V. F. Periodic solutions of a cubic ODE system. *Proceedings of the Fifth Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2003)*, Passau, Germany, September 20–26, 2003, ed. by Ganzha et al., Tech. Univ. München, Munich, 2003, pp. 77–80.

## Уважаемые авторы!

**При подготовке рукописей статей необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.**

Статьи должны содержать изложение новых научных результатов. Название статьи должно быть кратким, но информативным. В названии недопустимо использование сокращений, кроме самых общепринятых (РАН, РФ, САПР и т. п.).

Объем статьи (текст, таблицы, иллюстрации и библиография) не должен превышать эквивалента в 20 страниц, напечатанных на бумаге формата А4 на одной стороне через 1,5 интервала Word шрифтом Times New Roman размером 13, поля не менее двух сантиметров.

Обязательными элементами оформления статьи являются: индекс УДК, заглавие, инициалы и фамилия автора (авторов), ученая степень, звание (при отсутствии — должность), полное название организации, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках, электронные адреса авторов, которые по требованию ВАК должны быть опубликованы на страницах журнала. При написании аннотации не используйте аббревиатур и не делайте ссылок на источники в списке литературы. Предоставляйте подрисовочные подписи и названия таблиц на русском и английском языках.

Статьи авторов, не имеющих ученой степени, рекомендуется публиковать в соавторстве с научным руководителем, наличие подписи научного руководителя на рукописи обязательно; в случае самостоятельной публикации обязательно предоставляйте заверенную по месту работы рекомендацию научного руководителя с указанием его фамилии, имени, отчества, места работы, должности, ученого звания, ученой степени — эта информация будет опубликована в ссылке на первой странице.

**Формулы** набирайте в Word, не используя формульный редактор (Mathtype или Equation), при необходимости можно использовать формульный редактор; для набора одной формулы не используйте два редактора; при наборе формул в формульном редакторе знаки препинания, ограничивающие формулу, набирайте вместе с формулой; для установки размера шрифта никогда не пользуйтесь вкладкой Other..., используйте заводские установки редактора, не подгоняйте размер символов в формулах под размер шрифта в тексте статьи, не растягивайте и не сжимайте мышью формулы, вставленные в текст; в формулах не отделяйте пробелами знаки: + = -.

Для набора формул в Word никогда не используйте Конструктор (на верхней панели: «Работа с формулами» — «Конструктор»), так как этот ресурс предназначен только для внутреннего использования в Word и не поддерживается программами, предназначенными для изготовления оригинал-макета журнала.

При наборе символов в тексте помните, что символы, обозначаемые латинскими буквами, набираются светлым курсивом, русскими и греческими — светлым прямым, векторы и матрицы — прямым полужирным шрифтом.

**Иллюстрации** предоставляются отдельными исходными файлами, подающимися редактированию: рисунки, графики, диаграммы, блок-схемы предоставляйте в виде отдельных исходных файлов, поддающихся редактированию, используя векторные программы: Visio (\*.vsd, \*.vsdx); Coreldraw (\*.cdr); Excel (\*.xls); Word (\*.docx); Adobe Illustrator (\*.ai); AutoCad (\*.dxf); Matlab (\*.ps, \*.pdf или экспорт в формат \*.ai);

— если редактор, в котором Вы изготавливаете рисунок, не позволяет сохранить в векторном формате, используйте функцию экспорта (только по отношению к исходному рисунку), например, в формат \*.ai, \*.esp, \*.wmf, \*.emf, \*.svg;

— фото и растровые — в формате \*.tif, \*.png с максимальным разрешением (не менее 300 pixels/inch).

Наличие подрисовочных подписей обязательно (желательно не повторяющих дословно комментарии к рисункам в тексте статьи).

**В редакцию предоставляются:**

— сведения об авторе (фамилия, имя, отчество, место работы, должность, ученое звание, учебное заведение и год его окончания, ученая степень и год защиты диссертации, область научных интересов, количество научных публикаций, домашний и служебный адреса и телефоны, e-mail), фото авторов: анфас, в темной одежде на белом фоне, должны быть видны плечи и грудь, высокая степень четкости изображения без теней и отблесков на лице, фото можно представить в электронном виде в формате \*.tif, \*.png с максимальным разрешением — не менее 300 pixels/inch при минимальном размере фото 40×55 мм;

— экспертное заключение.

**Список литературы** составляется по порядку ссылок в тексте и оформляется следующим образом:

— для книг и сборников — фамилия и инициалы авторов, полное название книги (сборника), город, издательство, год, общее количество страниц;

— для журнальных статей — фамилия и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала, год издания, номер журнала, номера страниц;

— ссылки на иностранную литературу следует давать на языке оригинала без сокращений;

— при использовании web-материалов указывайте адрес сайта и дату обращения.

Список литературы оформляйте двумя отдельными блоками по образцам lit.dot на сайте журнала (<http://i-us.ru/paperrules>): Литература и References.

Более подробно правила подготовки текста с образцами изложены на нашем сайте в разделе «Оформление статей».

### Контакты

Куда: 190000, Санкт-Петербург,  
Б. Морская ул., д. 67, ГУАП, РИЦ

Кому: Редакция журнала «Информационно-управляющие системы»

Тел.: (812) 494-70-02

Эл. почта: [ius.spb@gmail.com](mailto:ius.spb@gmail.com)

Сайт: [www.i-us.ru](http://www.i-us.ru)

UDC 004.932

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-35-45

## Background extraction method for analysis of natural images captured by camera traps

M. N. Favorskaya<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, [orcid.org/0000-0002-2181-0454](https://orcid.org/0000-0002-2181-0454), [favorskaya@sibsau.ru](mailto:favorskaya@sibsau.ru)

V. V. Buryachenko<sup>a</sup>, PhD, Tech., Associate Professor, [orcid.org/0000-0003-1151-1159](https://orcid.org/0000-0003-1151-1159)

<sup>a</sup>Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, 31, Krasnoyarsky Rabochy Av., 660037, Krasnoyarsk, Russian Federation

**Introduction:** Automatic detection of animals, particularly birds, on images captured in the wild by camera traps remains an unsolved task due to the shooting and weather conditions. Such observations generate thousands or millions of images which are impossible to analyze manually. Wildlife sanctuaries and national parks normally use cheap camera traps. Their low quality images require careful multifold processing prior to the recognition of animal species. **Purpose:** Developing a background extraction method based on Gaussian mixture model in order to locate an object of interest under any time/season/meteorological conditions. **Results:** We propose a background extraction method based on a modified Gaussian mixture model. The modification uses truncated pixel values (in low bites) to decrease the dependence on the illumination changes or shadows. After that, binary masks are created and processed instead of real intensity values. The proposed method is aimed for background estimation of natural scenes in wildlife sanctuaries and national parks. Structural elements (trunks of growing and/or fallen trees) are considered slowly changeable during the seasons, while other textured areas are simulated by texture patterns corresponding to the current season. Such an approach provides a compact background model of a scene. Also, we consider the influence of the time/season/meteorological attributes of a scene with respect to its restoration ability. The method was tested using a rich dataset of natural images obtained on the territory of Ergaki wildlife sanctuary in Krasnoyarsk Krai, Russia. **Practical relevance:** The application of the modified Gaussian mixture model provides an accuracy of object detection as high as 79–83 % in the daytime and 60–69 % at night, under acceptable meteorological conditions. When the meteorological conditions are bad, the accuracy is 5–8 % lower.

**Keywords** – background subtraction, natural scene, gaussians mixture model, animal detection, background model.

**Citation:** Favorskaya M. N., Buryachenko V. V. Background extraction method for analysis of natural images captured by camera traps. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 35–45. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-35-45

### Introduction

Monitoring of animals in the wild using camera traps is one of the promising ways for monitoring animal behavior in the wildlife sanctuaries and national parks. Camera traps provide tremendous amount of information capturing any motion in a scene. Some camera traps produce a set of still images of moving object (animal, bird, or human) through 5–8 s, while other devices deliver a short movie. In this article, we deal with a set of still images, which are automatically marked by current date and time. Each camera trap has own stationary position in a predefined place, such as animal trails, watering places, and so forth. The stored amount of such information, for example for a half of a year, can achieve several terabytes from dozens of camera traps that makes impossible to process them manually.

For recognition of animal species or analysis of animal behavior, we need to process the original images sometimes of low quality in such manner that allows us to separate a visual object of interest from cluttered background. The well-known scene background challenges make this task dif-

ficult for solving. Among them, it is worth noting the cluttered background, occlusions, color shadows, moving background (for example, fluttering of leaves or waving trees), illumination changes within a day, flash shooting within a night, season changes, and meteorological impacts. At the same time, a scene remains unchanged principally and it is profitably regarding the computational costs to store a background pattern of a particular scene with a possibility to transform it into another state depending on the time/season/meteorological attributes.

Our contribution is twofold. First, we propose a simplified background extraction method based on the modified Gaussian Mixture Model (GMM). The modification uses the truncated pixel values (in low bites) in order to decrease dependence from illumination changes and shadows with following creation and processing the binary masks instead of real intensity values. The proposed method separates a scene into persistent (trunks of growing and/or fallen trees) and non-persistent (snow, foliage, grass, sky, lake, river, and Earth surface for boreal forests) textured regions. The persistent textured regions serve as the landmarks in any season with

a non-changeable distribution, while the distributions of the non-persistent textured regions are changed respect to a current season. Such approach provides a compact background model of a scene. Second, we consider the influence of the time/season/meteorological attributes of scene respect to restoration ability. Note that we need not to provide a high accuracy of the proposed background models because the goal is to detect the location of the object of interest.

## Related work

Background subtraction method compares the current image with a reference image called background model. However, this method has many disadvantages because of illumination changes, shadows, occlusions, noise, and dynamic background [1]. All these impacts make unreasonable to employ this method in many applications. In such cases, the background extraction algorithms are necessary.

In [2], one can find the detailed survey on traditional and recent background models with the complete classification from basic models to domain transform models. Traditional background models are classified in the following categories:

- basic models (average calculation, median processing, and histogram analysis);
- statistical models (Gaussian models, support vector models, and subspace learning models);
- cluster models ( $K$ -means models, codebook models, and basic sequential clustering);
- neural network models (general regression Neural Network (NN), multivalued NN, competitive NN, dipolar competitive NN, self organizing NN, and growing hierarchical self organizing NN);
- estimation models (Wiener filter, Kalman filter, correntropy filter, and Chebychev filter).

In last decade, appearance of visual content from mobile devices and Internet videos requires the development of background subtraction methods for challenging environments. The recent background models are classified in the following categories:

- advanced statistical background models (mixture models, hybrid models, nonparametric models, and multi-kernels models);
- fuzzy background models (fuzzy background modeling, fuzzy foreground detection, fuzzy background maintenance, fuzzy features, and fuzzy post-processing).
- discriminative subspace learning models (discriminative subspace models and mixed subspace models);
- Robust Principal Components Analysis (RPCA) models (RPCA via principal component pursuit, RPCA via outlier pursuit, RPCA via spar-

sity control, RPCA via sparse corruptions, RPCA via log-sum heuristic recovery, RPCA via iteratively reweighted least squares, Bayesian RPCA, and approximated RPCA);

- subspace tracking (Grassmannian Robust Adaptive Subspace Tracking Algorithm (GRASTA), transformed-GRASTA,  $l_p$ -norm robust online subspace tracking, and Grassmannian online subspace updates with structured-sparsity);

- low rank minimization (contiguous outliers detection, direct robust matrix factorization, direct robust matrix factorization-row, probabilistic robust matrix factorization, and Bayesian robust matrix factorization);

- sparse models (compressive sensing models, structured sparsity, dynamic group sparsity, dictionary learning, and sparse error estimation);

- transform domain models (fast Fourier transform, discrete cosine transform, Walsh transform, wavelet transform, and Hadamard transform).

Not all from mentioned above methods are suitable for the monitoring task in the wild. Advanced statistical models and codebook models are among the most promising methods.

Background extraction is the cornerstone of background subtraction method. One of the traditional methods suitable for natural scene analysis is a temporal median filter method [3]. It requires a durable observation during training step. A median value of the certain pixel points extracted from  $K$  frames is taken as the background pixel value in this point. The improvement of this method called as the average method supposes to calculate the average value instead of the median value. The incremental form of the average method is often used for real-time application, when for each pixel  $k$  the background model is update using equation

$$B_{k+1} = \frac{n-1}{n} B_k + \frac{1}{n} I_k, \quad (1)$$

where  $B_k$  and  $B_{k+1}$  are the intensities in the current background model and new background model, respectively;  $n$  is the number of frames;  $I_k$  is the intensity in current frame.

The incremental method has lesser computational cost respect to the temporal median filter method and provides better extraction result. In [4], it was shown that if  $n = 100$  and more the incremental method has become a running average background learning method:

$$B_{k+1} = (1-\alpha) B_k + \alpha I_k, \quad (2)$$

where  $\alpha$  is the learning factor,  $\alpha = 0.01$ ,  $\alpha = 0.1$ , or another experimental constant.

This method is widely used in practice; however, it is prone to generate the ghosts.

The Gaussian mixture model for background estimation was proposed in [5]. In the GMM, the pixel's intensity values over a time are modeled by a single Gaussian or as a mixture of several Gaussians. The background pixels are identified by comparing the pixel values and mean values of models. Many improvements of the GMM are available in literature [6–11]. The GMM is appropriate for complex natural scenes including tree branches shaking, water rippling, etc. The disadvantages of the GMM are the high computational complexity and necessity to store the Gaussian model parameters.

Difficulties in building a proper mathematical model, which describes the probability density function of pixel values, led to development of a non-parametric approach for background modeling. In [12], a Kernel Density Estimation (KDE) was proposed with the main idea to evaluate the intensity density of pixels directly from sample history values that made this method sensitive to detection of moving objects. A nonparametric background generation model for on-line surveillance was proposed in [13]. First, the statistics of background variations without training samples were estimated. Second, the background was generated using a heuristic framework. The combination of the KDE and GMM was offered in [14] in order to estimate accurately the density function of background. Nonparametric estimation methods adapt to fast changes' detection in a scene. At the same time, they have unsatisfactory background building in situations, when several moving objects have different speeds.

In [15], the background was modelled using a codebook algorithm. This method is referred to cluster models. For each pixel, a codebook consisting of one or more codewords is constructed based on a color distortion metric together with brightness bounds. Generally, the clusters represented by codewords do not correspond to single Gaussian or other parametric distributions. If the color distortion of incoming pixel to some codewords is less than the threshold and its brightness lies within the brightness range of that codeword, then this pixel is classified as background, otherwise, it is classified as foreground. The codebook algorithm estimates a background over a long period with a limited memory. The original algorithm was improved in several ways. Thus, a multilayer codebook model was proposed in [16], which removed most of the dynamic background and significantly increased the computational efficiency.

A universal sample-based background subtraction algorithm called as Visual Background extractor (ViBe) was developed in [17]. A classification model was based on a small number of correspondences between a candidate value and the corresponding background pixel model. The ViBe can be initialized with a single frame under assumption that

neighboring pixels share a similar temporal distribution. Also, an original mechanism for updating the background model over time for a set of frames was presented. Hereinafter, the extensions of the ViBe approach were proposed in order to eliminate the ghosts [18]. The ViBe method has advantages in the computation speed and detection effect but does not invariant to frequent background changes.

A robust background extraction algorithm called as Neighbor-based Intensity Correction (NIC) method was offered in [19]. The NIC method identified and modified the motion pixels from the difference of the background and the current frame. The first frame was considered as an initial background and updated by the pixel intensity from new frame based on the analysis of neighborhood surrounding. In the intensity modification procedure, the comparison of the standard deviation values calculated from two pixel windows was executed. Finally, the foreground is detected by the background subtraction algorithm with an optimal threshold calculated by the Otsu method.

Two universal modifications, such as dynamic background estimation and complementary learning, were implemented in GMM, ViBe, and codebook algorithms for complex dynamic background modelling and accurate foreground objects [20]. Combining the complementary learning technique, these improved algorithms had good performance on the detection of dynamic background including waving tree, rippling water, and fountain.

The approach, when the background model was augmented with an explicit foreground model, was developed in [21]. Thus, two statistical models (background and foreground) were used in a closed loop. A background model is periodically updated to account for illumination changes, while foreground detection corrupts the intensity of the background model. In addition to a non-parametric background model, these authors used a foreground model based on small spatial neighborhood. The hypothesis test and the Markov random field improved a spatial coherence of the detections. Such approach can be combined with non-parametric kernel or mixture of Gaussians.

In [22], a texture-based background model was proposed using Local Binary Patterns (LBPs). In spite of LBPs are invariant to illumination changes, they are not robust to noise. For example, if the central pixel value in LBP is affected by noise, then the corresponding LBP histogram provides the increased number of false positive or false negative errors.

A short literature survey shows that the interest to the background extraction algorithms remains stable. These algorithms are developed in various directions, such as accuracy of object detection, computational costs, and robustness to various

factors. Also, a goal of solving task determines a choice of approach.

### Mixture of Gaussians models

In Gaussian mixture model, each pixel's intensity is determined by a mixture of  $K$  Gaussian distributions, where  $K$  is a small number ranging between 3 and 5. Each Gaussian distribution is associated with its contributing weight. The mean  $\mu_k$ , the variance  $\sigma_k^2$ , and a weight  $w_k$  are the main parameters of GMMs. Evaluation of these parameters can be implemented using an Expectation Maximization (EM) algorithm with recently observed data. The EM algorithm has high computational cost, instead of which a recursive algorithm that updates the GMM parameters at each time instance is commonly used.

Thus, in general GMM each pixel is considered as a mixture of  $K$  Gaussian distributions, which probability  $P(X_t)$  is evaluated by equation

$$P(X_t) = \sum_{j=1}^K w_{j,t} * \eta(X_t, \mu_{j,t}, \Sigma_{j,t}), \quad (3)$$

where  $X_t$  is the pixel value at time  $t$ ;  $K$  is the number of Gaussian distributions;  $w_{j,t}$  is the weight value;  $\mu_{j,t}$  is the mean value, and  $\Sigma_{j,t}$  is the covariance matrix of the  $j^{\text{th}}$  Gaussian at time  $t$ , respectively;  $\eta$  is the Gaussian PDF. The Gaussian PDF  $\eta$  is defined by equation

$$\eta(X_t, \mu_{j,t}, \Sigma_{j,t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma_{j,t}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(X_t - \mu_{j,t})^T (\Sigma_{j,t})^{-1} (X_t - \mu_{j,t})}, \quad (4)$$

where  $n$  is the dimension of  $X_t$ .

For simplicity, the covariance matrix  $\Sigma_{j,t}$  is defined as  $\sigma_{j,t}^2 \mathbf{I}$  for the  $j^{\text{th}}$  component, where  $\mathbf{I}$  is the identity matrix, under assumption that the components of  $X_t$  (Red, Green, and Blue) are independent and have the same variances.

The background distributions have higher probabilities and smaller variances due to the probable background colors stay longer than the foreground colored objects. This observation makes the GMM an updating model. New coming pixel is checked respect to the existing model components. If the pixel value is within 2.5 standard deviations of some weighted Gaussian distribution, then this distribution is updated. In the opposite case, a distribution with minimum weight is replaced by a new distri-

bution using the current mean value. This new distribution obtains the high initial variance and low prior weight. Then the  $K$  distributions are sorted according to value  $w_{j,t}/\sigma_{j,t}$ , where  $\sigma_{j,t}$  is the 1D variance of the  $j^{\text{th}}$  Gaussian in the mixture at time  $t$ . The first  $B$  distributions are selected as the background model using equation

$$B = \arg \min_b \left( \sum_{k=1}^b w_{k,t} > T_B \right), \quad (5)$$

where  $b$  is the number of selected Gaussian distributions;  $T_B$  is the predefined threshold (it represents the minimal quantity of the data that ought to be considered as the background model and usually is set to close to 90 %).

When the matching process of the incoming pixel is completed, the prior weights of  $K$  Gaussian distributions are changed by equation

$$w_{k,t} = (1 - \alpha)w_{k,t-1} + \alpha(M_{k,t}), \quad (6)$$

where  $\alpha$  is the learning rate;  $M_{k,t}$  equals 1 for the matched distribution and equals 0 for the unmatched distribution.

The weights of distributions are renormalized by updating the values of mean and variance applying equation

$$\begin{aligned} \mu_t &= (1 - \rho)\mu_{t-1} + \rho X_t; \\ \sigma_t^2 &= (1 - \rho)\sigma_{t-1}^2 + \rho(X_t - \mu_t)^T (X_t - \mu_t), \end{aligned} \quad (7)$$

where

$$\rho = \alpha \eta(X_t | \mu_k, \sigma_k).$$

The multiple modifications of GMM follow the main idea to support three consecutive stages: background initialization, background estimation, and background update.

### Proposed method for object detection

Consider a scene, where an object (animal, bird, or rarely human) is periodically appeared and its appearance is captured by a camera trap. The location of camera trap is chosen by foresters based on long-time observations of a territory. A camera trap captures any motion in scene in any time and as a result provides a series of images through 3–5 s (this means an obtaining of 6–8 images with a relatively good visibility) or a movie with duration 8–10 s. Suppose that we have a set of image series taken in different seasons.

A scene remains the same with different chromaticity due to a season. This means that we can elab-



orate a background initialization in detail building the GMMs for all seasons. The following two stages: background estimation and background update, are executed when a new image series is incoming. Note that each image contains information about time, day, and temperature, and each GMM is also associated with time and season information. Thus, we ought to find a correspondence between the current image series and GMM by query.

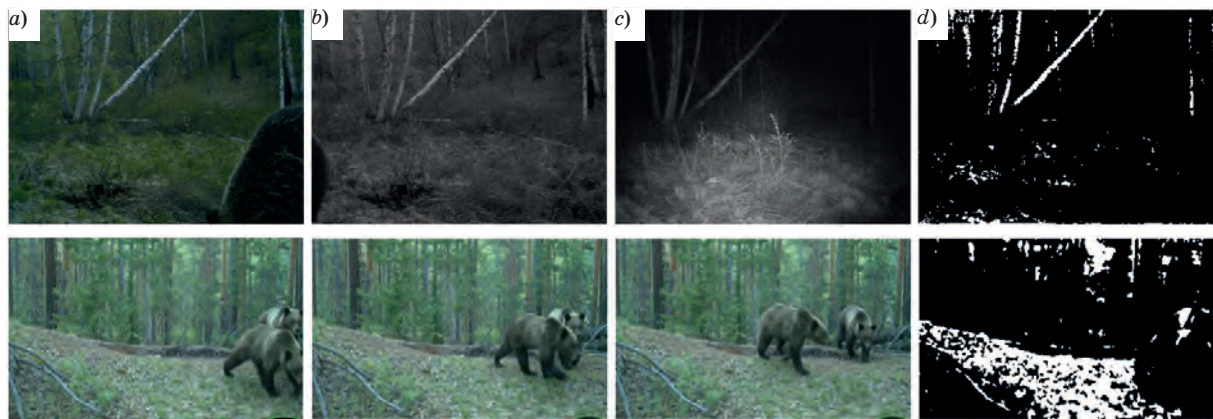
Consider the consecutive stages of the proposed method.

### Preliminary image segmentation

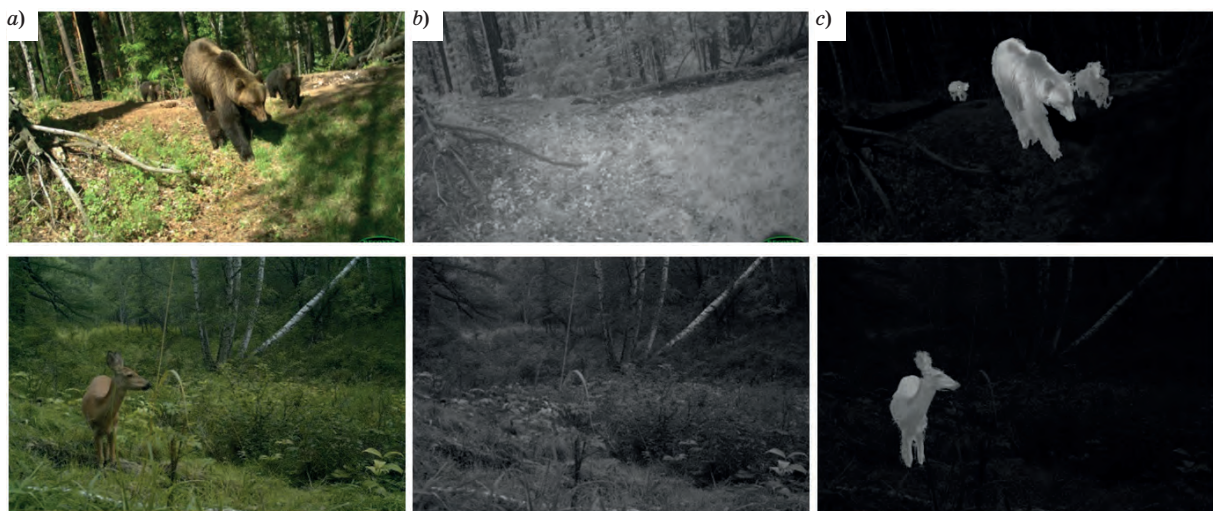
The best selection for preliminary image segmentation is a winter season, when a background has a restricted palette of colors with prevailing white, brown, and black colors and their corresponding color shades. Let us roughly consider a scene as a combination of the structural elements (trunks of growing and/or fallen trees), which posi-

tions change rarely, other textured regions depends from season and unknown moving objects.

First, the dark colored masks (in the case of boreal forests) are extracted from a series of winter images and combined in order to create a common winter mask. During mask creation, only extensional dark regions are marked as the candidates for structure elements. Second, this procedure is applied for the series of spring, summer, and autumn images. As a result, the common spring, summer, and autumn masks are obtained. Note that the sizes of structural elements are the biggest in the winter mask, while in other seasons can be overlapped by foliage. Third, the generalized masks with structural elements are created by imposing the common masks. Only the common parts of all masks are considered as the reliable landmarks in a scene. The building of season masks is depicted in Fig. 1, *a-d*, while their combination and obtaining the reliable landmarks is given in Fig. 2, *a-c*.



■ Fig. 1. Examples of background model building: *a, b, c* — original images (the top row — at night time, the bottom row — at daily time); *d* — detected structural elements of the corresponding images



■ Fig. 2. Background model building using reliable landmarks: *a* — images with animals; *b* — reference background images; *c* — results of animal detection

The detected structural elements may be useful for alignment of following incoming images.

Then the distributions of corresponding textured regions (trunks, snow, foliage, grass, sky, lake, river, and Earth surface for boreal forests) are built using the rich experimental material stored by 5 previous years. In other word, a description of each texture transmitted from RGB- to YUV-color space is a feature vector, which includes statistical parameters of distribution (mean value  $M$ , variances  $\sigma$ , homogeneity  $U$ , smoothness  $R$ , and entropy  $E$ ) [23]. The corresponding formulae are pointed in Table 1.

Also, two modified texture features — relative smoothness  $R_{md}$ , and normalized entropy  $E_{nr}$  — can be calculated using equations

$$R_{md} = \begin{cases} -\log R & \text{if } R > 0; \\ 10 & \text{if } R = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$E_{nr} = E / \log_2 L, \quad (9)$$

where  $L$  is a number of brightness levels,  $L > 1$ .

If parameter  $R = 0$ , then we forcibly maintain a relative smoothness  $R_{md} = 10$  (small empirical value differing from 0). Normalized entropy  $E_{nr}$  indicates some equalization effect in dark and bright areas of frame.

The main parameters are the mean value and variance. The remained parameters, such as the

■ **Table 1.** Statistical texture features

Caption	Equation
Central moment by order $k$	$\mu_k(z) = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - M)^k p(z_i)$
Mean value $M$	$M = \sum_{i=0}^{L-1} z_i p(z_i)$
Variance $\sigma$	$\sigma^2 = \mu_2(z) = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - m)^2 p(z_i)$
Homogeneity $U$	$U = \sum_{i=0}^{L-1} p^2(z_i)$
Smoothness $R$	$R = 1 - \frac{1}{1 + \sigma^2(z) / (L-1)^2}$
Entropy $E$	$E = - \sum_{i=0}^{L-1} p(z_i) \log_2 p(z_i)$

homogeneity, smoothness, and entropy, serve as the additional parameters in order to decrease a number of background clusters.

### Background initialization (training stage)

Suppose that the training set includes several dozen of images captured by a single camera trap in all seasons. Each image is divided into non-overlapping blocks of sizes of  $n \times n$  pixels. Each block is characterized by two parameters: the normalized mean value  $M$  calculated as follows:

$$M = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n pv_{ij}, \quad (10)$$

where  $pv_{ij}$  is the pixel value in the position  $(i, j)$  of the block, and binary bitmap  $BM$  similar to modified LBPs:

$$bv_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } pv_{ij} \geq M; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (11)$$

where  $bv_{ij}$  means the bit in the position  $(i, j)$  of a  $BM$ .

During experiments, we used  $n = 4$  and  $n = 8$  depending an image resolution.

To avoid a impact of sunny weather that stimulates the deviation of hue and shadows' presence, we replace two low bits of pixels' values in textured regions by zeros.

The forest background is such that small number of clusters describes a background model. Initially,  $K$  different binary bitmaps are randomly generated for  $\{BM_1, BM_2, \dots, BM_K\}$  blocks with the weights  $1/K$ . Each binary bitmap is assigned a weight  $w_k$  between 0 and 1 and the sum of  $K$  weights equals 1. A new block  $BM_{new}$  is compared with the  $K$  bitmaps using the Hamming distance  $HD$  provided by following Equation, where  $k$  is in the range of  $[1, K]$ ,  $\oplus$  is the summation of mod 2:

$$HD(BM_{new}, BM_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\{bv_{ij}\}_{new} \oplus \{bv_{ij}\}_k). \quad (12)$$

The block  $BM_{new}$  matches to the block  $BM_k$  if inequality (13) is satisfied, where  $TH$  is the predefined threshold, and, otherwise, the block  $BM_{new}$  is regarded as a new background cluster:

$$\min HD(BM_{new}, BM_k) < TH. \quad (13)$$

Then, the weight of each block is updated by:

$$w'_k = \alpha W_k + (1 - \alpha)w_k, \quad (14)$$

where  $\alpha$  is the learning rate;  $W_k$  is the coefficient, which for the best-matched bitmap equals 1 and for remaining bitmaps equals 0.

The GMM, which short description one can find in Section “Mixture of Gaussians models”, helps to create a generalized background model, reliable in statistical meaning. For simplicity, we analyze the variances instead of using a covariance matrix. According to Equations (8)–(14), we create several GMMs for all seasons in daily/night time for Y-channel in YUV-color space. The requirements to GMM can be weakened and computation becomes simpler through use of texture descriptor in a view of a binary bitmap.

The proposed method provides the background models of a single scene with low computational loads during the working stage because the comparison is implemented on the level of binary values.

### Background estimation and background update (working stage)

The stored images through a half of a year are processed in the package mode. First, they ought to be sorted manually or automatically respect to camera traps and seasons. Second, a procedure of background estimation and update is executed based on the initial corresponding GMM. The working stage does not principally differ from the training stage. The calculations use Equations (10)–(14) but the goal of the working stage is to find the position of an object of interest. Note that camera trap captures an image, when a movement in a scene is detected. The algorithm finds the region in an image, which distribution differs from the background distributions. The definition of animal or bird type is outside of this article.

The described scheme works well under good meteorological conditions. However, meteorological conditions impact significantly on the quality on an image and, consequently, a potential ability for animal/bird detection. At this sense, the algorithm ought to detect the type of meteorological impact, estimate a degree of distortion, and restore an image if a degree of distortion is minor.

Fog can be detected by analysis of color ranges. If the color ranges are restricted and deposited to the higher values, then the effect of “whitened color” has a high probability. This is a simple procedure of histogram analysis in RGB-color space. The

threshold of decision making is determined empirically.

Rain and snowfall are simulated as a noticeable noise with specific structure. For example, rain remains the short line segments of white color, which have the identical directions. Snowfall keeps the white spots of different size and shape. Thus, the algorithm searches these structural elements uniformly distributed on a whole image. Also, the decision marking is based on empirical observations.

The most interesting cases appear, when the distortions are small and the algorithm tries to restore the damaged images. One can read about possible restoration techniques in previous publications of the authors [24]. Sometimes the complex methods including morphological closing of visual objects ought to be applied. Example of reconstructed image is depicted in Fig. 3, *a–d*.

However, when meteorological conditions are too bad during shooting, the object detection is impossible even by a human vision.

### Experimental Results

Experiments were conducted using the dataset of images captured in the territory of wildlife sanctuary Ergaki, Krasnoyarsky Kray, Russia. This dataset includes more than 38,000 images of animals captured by camera traps in different weather conditions and different seasons. The most number of images have the complex structure, various artifacts, and noises. Near for 1,000 images, there were built the masks with the localized animals or birds manually (Fig. 4, *a, b*).

During experiments, the automatic detection of localization of animal or bird was implemented using the marked volume of dataset. The designed algorithm includes such main steps as a background modelling, saliency detection, and localization of animal or bird in an image. Some results are depicted in Fig. 5, *a–e*.

Animal localization using saliency detection procedure shows good results if an animal is situated in the middle area of an image and also if an animal differs by color or intensity compared the



■ Fig. 3. Examples of complex cases: *a* — high illumination at night; *b* — foreground object close to the camera; *c* — weather impact (small fog); *d* — example of a reconstructed image



■ Fig. 4. Examples of ground truth images from Ergaki 2018 dataset: *a* — original images; *b* — ground truth masks



■ Fig. 5. Examples of segmentation and animal localization using Ergaki 2018 dataset: *a* — original images 2012\_bear.jpg, 2017\_IMG5044.jpg, and 2013\_PICT1696.jpg; *b* — ground truth image segmentation; *c* — saliency detection; *d* — masks obtained from background and saliency estimation; *e* — results of localization



■ Fig. 6. Examples of saliency detection using Ergaki 2018 dataset: a — successful examples; b — poor examples

■ Table 2. Comparative results of detection of animals and birds using a coverage measure

Method	80 % Coverage	90 % Coverage	Best Coverage (Maximum %)
Selective Search [25]	2829.7	5903.5	13 882 (99.8)
GOP [26]	2489.1	3984.6	9874 (98.2)
MOP [27]	335.8	482.3	891.7 (96.7)
FCOP [28]	132.8	384.2	<b>393.1 (90.4)</b>
SORPPV [29]	<b>95.4</b>	237.3	626.9 (93.1)
Proposed method	127.2	<b>226.1</b>	689.1 (94.2)

background (Fig. 6, a, b). In some cases, an animal localization in an image is even difficult even for a human (Fig. 6, b).

For efficiency evaluation, the *F*-measure was applied:

$$F = \frac{2TP}{2TP + FN + FP}, \quad (15)$$

where *TP* is the number of true positive; *FP* is the number of false positive; *FN* is the number of false negatives. A region is considered as a true positive if it has more than 50 % intersection with a ground-truth bounding mask.

Also many algorithms are evaluated using a term of coverage as a numerical measure of the corresponding detected and ground truth pixels [25–29]. The comparative results using a coverage measure and common comparative results using *F*-measure for detection of animals and birds in the images, which are involved in Ergaki 2018 dataset, are represented in Tables 2 and 3, respectively.

■ Table 3. Common comparative results of detection of animals and birds using *F*-measure

Method	<i>F</i> -measure
EC-Best [30]	0.7703
YOLO [31]	0.7515
Fast-RCNN [32]	0.7937
SORPPV [29]	<b>0.8398</b>
Proposed method	0.7812

The best resulted in Tables 2 and 3 are marked by Bold.

The efficiency of detection of animals and birds in images achieves 70–80 % depending an image quality and weather conditions. The use of saliency detection algorithm allows us to increase this parameter on 3–8 %.

### Conclusions

In this article, a background extraction method for automatic detection of animals and birds in the wild using camera trap images was developed. The experiments were conducted using rich dataset of natural images obtained on the territory of wildlife sanctuary Ergaki, Krasnoyarsky Kray, Russia. The proposed method provides the detection of animals and birds on a level 70–80 % due to the multiple challenges caused by shooting and weather conditions.

### Acknowledgments

The reported study was funded by Russian Foundation for Basic Research, Government of Krasnoyarsk Territory, Krasnoyarsk Regional Fund of Science to the research project No. 18-47-240001.

## References

1. Bouwmans T. Recent advanced statistical background modeling for foreground detection — a systematic survey. *Recent Patents on Computer Science*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 147–176.
2. Bouwmans T. Traditional and recent approaches in background modeling for foreground detection: an overview. *Computer Science Review*, 2014, vol. 11–12, pp. 31–66.
3. Hung M. H., Pan J. S., Hsieh C. H. Speed up temporal median filter for background subtraction. *International Conference on Pervasive Computing Signal Processing & Applications*, 2010, pp. 297–300.
4. Yi Z., Fan L. Moving object detection based on running average background and temporal difference. *International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering*, 2010, pp. 270–272.
5. Stauffer C., Grimson W. E. L. Learning patterns of activity using real-time tracking. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, vol. 22, no. 8, pp. 747–757.
6. Zhang Y., Liang Z., Hou Z., Wang H., Tan M. An adaptive mixture Gaussian background model with online background reconstruction and adjustable foreground merge time for motion segmentation. *IEEE International Conference on Industrial Technology*, 2005, pp. 23–27.
7. Kim H., Sakamoto R., Kitahara I., Toriyama T., Kogure K. Robust foreground extraction technique using Gaussian family model and multiple thresholds. *Asian Conference on Computer Vision*, 2007, pp. 758–768.
8. Bouwmans T., El Baf F. Modeling of dynamic backgrounds by type-2 fuzzy Gaussians mixture models. *MASAU Journal of Basic and Applied Sciences*, 2010, vol. 1, no. 2, pp. 265–276.
9. Shah M., Deng J., Woodford B. Illumination invariant background model using mixture of Gaussians and SURF features. *International Workshop on Background Models Challenge, Asian Conference on Computer Vision*, 2012, pp. 308–314.
10. Elguebaly T., Bouguila N. Background subtraction using finite mixtures of asymmetric Gaussian distributions and shadow detection. *Machine Vision and Applications*, 2014, vol. 25, no. 5, pp. 1145–1162.
11. Alvar M., Rodriguez-Calvo A., Sanchez-Miralles A., Arranz A. Mixture of merged Gaussian algorithm using RTDENN. *Machine Vision and Applications*, 2014, vol. 25, no. 5, pp. 1133–1144.
12. Elgammal A., Harwood D., Davis L. Non-Parametric Model for background subtraction. *The 6th European Conference on Computer Vision*, 2000, part II, LNCS, vol. 1843, pp. 751–767.
13. Zhang R., Gong W., Yaworski A., Greenspan M. Non-parametric on-line background generation for surveillance video. *The 21st International Conference on Pattern Recognition*, 2012, pp. 1177–1180.
14. Liu Z., Huang K., Tan T. Foreground object detection using top-down information based on EM framework. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, vol. 21, no. 9, pp. 4204–4217.
15. Kim K., Chalidabhongse T. H., Harwood D., Davis L. Real-time foreground–background segmentation using codebook model. *Real-Time Imaging*, 2005, vol. 11, no. 3, pp. 172–185.
16. Guo J. M., Hsia C. H., Liu Y. F., Shih M. H. Fast background subtraction based on a multilayer codebook model for moving object detection. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2013, vol. 23, no. 10, pp. 1809–1821.
17. Barnich O., Van Droogenbroeck M. ViBe: a universal background subtraction algorithm for video sequences. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2011, vol. 20, no. 6, pp. 1709–1724.
18. Guang H., Wang J., Xi C. Improved visual background extractor using an adaptive distance threshold. *Journal of Electronic Imaging*, 2014, vol. 23, no. 6, pp. 063005-1–063005-12.
19. Huynh-The T., Banos O., Lee S., Kang B. H., Kim E. S., Le-Tien T. NIC: a robust background extraction algorithm for foreground detection in dynamic scenes. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 2017, vol. 27, no. 7, pp. 1478–1490.
20. Ge W., Guo Z., Dong Y., Chen Y. Dynamic background estimation and complementary learning for pixel-wise foreground/background segmentation. *Pattern Recognition*, 2016, vol. 59, pp. 112–125.
21. McHugh J. M., Konrad J., Saligrama V., Jodoin P. M. Foreground-adaptive background subtraction. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, vol. 16, no. 5, pp. 390–393.
22. Heikkilä M., Pietikäinen M. A Texture-based method for modeling the background and detecting moving objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2006, vol. 28, no. 4, pp. 657–662.
23. Favorskaya M. N., Damov M. V., Zotin A. G. Intelligent method of texture reconstruction in video sequences based on neural networks. *International Journal of Reasoning-based Intelligent Systems*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 223–236.
24. Favorskaya M., Jain L. C., Bolgov A. Image inpainting based on self-organizing maps by using multi-agent implementation. *Procedia Computer Science*, 2014, vol. 35, pp. 861–870.
25. Uijlings J. R., van de Sande K. E., Gevers T., Smeulders A. W. Selective search for object recognition. *International Journal Computer Vision*, 2013, vol. 104, no. 2, pp. 154–171.
26. Krahenbuhl P., Koltun V. Geodesic object proposals. *Proceeding European Conference Computer Vision*, 2014, pp. 725–739.
27. Fragkiadaki K., Arbelaez P., Felsen P., Malik J. Learning to segment moving objects in videos. *Pro-*

- ceeding *IEEE Conference Computer Vision Pattern Recognition*, 2015, pp. 4083–4090.
28. Perazzi F., Wang O., Gross M., Sorkine-Hornung A. Fully connected object proposals for video segmentation. *Proceeding IEEE International Conference Computer Vision*, 2015, pp. 3227–3234.
29. Zhang Z., He Z., Cao G., & Cao W. Animal detection from highly cluttered natural scenes using spatio-temporal object region proposals and patch verification. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2016, vol. 18, no. 10, pp. 2079–2092.
30. Redmon J., Divvala S., Girshick R., Farhadi A. You only look once: Unified, real-time object detection CoRR. 2015. Available at: <http://arxiv.org/abs/1506.02640> (accessed 5 August 2013).
31. Girshick R. Fast r-CNN. *Proceeding International Conference Computer Vision*, 2015, pp. 1440–1448.
32. Shaoqing Ren K. H., Ross Girshick J. S. Faster R-CNN: Towards real-time object detection with region proposal networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2015, pp. 91–99.

УДК 004.932

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-35-45

**Метод извлечения фона в естественных изображениях, полученных от фотоловушек**М. Н. Фаворская<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0002-2181-0454](http://orcid.org/0000-0002-2181-0454), [favorskaya@sibsau.ru](mailto:favorskaya@sibsau.ru)В. В. Буряченко<sup>а</sup>, канд. техн. наук, доцент, [orcid.org/0000-0003-1151-1159](http://orcid.org/0000-0003-1151-1159)<sup>а</sup>Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнёва, Красноярский рабочий пр., 31, Красноярск, 660037, РФ

**Постановка проблемы:** автоматическое обнаружение животных и птиц в природе на изображениях, полученных от фотоловушек, остается нерешенной проблемой из-за условий съемки и погодных факторов. В результате таких наблюдений формируется большой объем изображений, тысячи или миллионы, которые невозможно анализировать вручную. Обычно в заповедниках и национальных парках используются бюджетные фотоловушки. Поэтому низкокачественные изображения, полученные с их помощью, требуют тщательной многократной обработки перед тем, как распознавать виды животных или птиц. **Цель:** разработка метода извлечения фона на основе модели смеси гауссианов для обнаружения объекта интереса при любых временных/сезонных/метеорологических условиях. **Результаты:** предложен метод извлечения фона на основе модифицированной модели смеси гауссианов. Модификация заключается в усечении значений пикселей (младшие разряды) для уменьшения зависимости от изменений освещенности и наличия теней с последующим созданием и обработкой бинарных масок вместо реальных значений интенсивностей. Предлагаемый метод предназначен для оценки фона естественных сцен в заповедниках и национальных парках. Структурные элементы (стволы растущих и (или) упавших деревьев) считаются регионами, медленно изменяющимися в течение сезонов, в то время как другие текстурированные области моделируются текстурными шаблонами, соответствующими текущему сезону. Такой подход обеспечивает компактную модель фона сцены. Помимо этого, мы рассматриваем влияние временных/сезонных/метеорологических атрибутов сцены относительно возможности ее восстановления. Метод был протестирован с использованием богатого набора данных естественных изображений, полученных на территории заповедника «Ергаки», Красноярский край, Россия. **Практическая значимость:** применение модифицированной модели смеси гауссианов показывает точность распознавания объектов 79–83 % в дневное время и 60–69 % в ночное время суток при нормальных метеорологических условиях. При этом точность восстановленных изображений, полученных при плохих метеорологических условиях, снижается на 5–8 %.

**Ключевые слова** — вычитание фона, естественная сцена, модель смеси гауссианов, обнаружение животного, модель фона.

**Цитирование:** Favorskaya M. N., Buryachenko V. V. Background extraction method for analysis of natural images captured by camera traps. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 35–45. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-35-45

**Citation:** Favorskaya M. N., Buryachenko V. V. Background extraction method for analysis of natural images captured by camera traps. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 35–45. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-35-45

## Наглядность визуализации данных в геоинформационной системе при использовании свойств золотого сечения

А. В. Воронин<sup>а</sup>, канд. техн. наук, доцент, [orcid.org/0000-0002-0956-0413](https://orcid.org/0000-0002-0956-0413), [aleksey.v.v@mail.ru](mailto:aleksey.v.v@mail.ru)

Г. Н. Мальцев<sup>б</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0002-6755-5700](https://orcid.org/0000-0002-6755-5700)

М. Ю. Сохен<sup>в</sup>, канд. техн. наук, [orcid.org/0000-0001-9080-4368](https://orcid.org/0000-0001-9080-4368)

<sup>а</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Вавилова ул., д. 44, кор. 2, Москва, 119333, РФ

<sup>б</sup>Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Ждановская наб., 13, Санкт-Петербург, 197198, РФ

<sup>в</sup>Закрытое акционерное общество «Эврика», Московский пр., 118, Санкт-Петербург, 196184, РФ

**Постановка проблемы:** наглядность визуализации данных имеет важное значение для работы оператора геоинформационной системы и определяет условия, в которых он принимает решения по отображаемым данным. Использование связанных со свойствами золотого сечения закономерностей зрительного восприятия изображений позволяет сформулировать критерий наглядности визуализации данных, характеризующий возможности комплексного восприятия оператором геоинформационной системы видеоданных, отображаемых на экране видеоконтрольного устройства в виде электронной карты. **Цель:** обоснование критерия наглядности визуализации данных в геоинформационных системах с использованием свойств золотого сечения и исследование условий обеспечения наглядности отображения геоданных и метаданных на экране видеоконтрольного устройства в соответствии с предложенным критерием. **Метод:** формальное определение и исследование свойств критерия наглядности визуализации данных в геоинформационных системах с использованием в качестве показателя коэффициента покрытия площади экрана информацией, оптимальное значение которого соответствует математическому определению золотого сечения. **Результаты:** на основе проведенного анализа особенностей зрительного восприятия видеоданных и свойств золотого сечения при визуализации информации предложен критерий наглядности визуализации данных, использующий свойства золотого сечения и характеризующий возможности комплексного восприятия оператором геоинформационной системы видеоданных, отображаемых в виде электронной карты. Разработаны итерационные алгоритмы выбора масштаба отображения видеоданных по критерию наглядности, связанные со свойствами золотого сечения: базовый алгоритм, который применяется для каждого слоя отображаемых на электронной карте геоданных, и алгоритм последовательного анализа различных слоев отображаемых геоданных. Выбор масштаба отображения видеоданных в соответствии с разработанными алгоритмами может осуществляться оператором геоинформационной системы предварительно на основе параметров типовых электронных карт и наборов геоданных и метаданных, характерных для решаемой прикладной задачи. Исследовано влияние масштаба отображаемых на электронной карте геоданных и метаданных на наглядность их визуализации на экранах различных размеров: для рассмотренных типовых объемов отображаемых геоданных и метаданных наилучшая наглядность имеет место при их отображении на экране стандартного компьютерного монитора в сравнении с портативным ноутбуком и визуализационным экраном. **Практическая значимость:** предложенный критерий и рекомендации по выбору размера экрана видеоконтрольного устройства и структуры отображаемых геообъектов и метаданных могут быть использованы при проектировании геоинформационных систем, а также для предварительного выбора оператором геоинформационной системы структуры отображаемых данных.

**Ключевые слова** — геоинформационная система, электронная карта, наглядность визуализации данных, золотое сечение.

**Цитирование:** Воронин А. В., Мальцев Г. Н., Сохен М. Ю. Наглядность визуализации данных в геоинформационной системе при использовании свойств золотого сечения. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 46–57. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-46-57

**Citation:** Voronin A. V., Maltsev G. N., Sokhen M. Yu. Data visualization quality in a geographic information system using golden ratio properties. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 46–57 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-46-57

### Введение

Визуализация данных играет важную роль в практике применения геоинформационных систем (ГИС) [1–4]. Качество и наглядность визуализации данных, прежде всего геопространственной информации, определяют удобство работы оператора ГИС и условия, в которых он принимает решения по отображаемым данным. В общем случае оператор ГИС, как правило, имеет дело с динамически изменяющейся отобража-

емой ситуацией, большим числом геообъектов и метаданных, которые при отображении на экране видеоконтрольного устройства формируют сложные представления, которые не должны затруднять зрительное восприятие информации, оценку ситуации и принятие решения. Поэтому визуализация данных в ГИС должна быть информативна и наглядна.

В широком смысле под наглядностью понимается свойство психических образов объектов познания, выражающее степень доступности и по-



нятности этих образов для познающего субъекта [5, 6]. Применительно к отображаемым в ГИС видеоданным под наглядностью следует понимать возможность легкого их зрительного восприятия оператором ГИС. Поскольку видеоданные в ГИС представляют собой изображения, формируемые расположением и размерами геообъектов, блоков сопроводительной и другой информации, которые отображаются на экране видеоконтрольного устройства в виде электронной карты (ЭК) соответствующего масштаба, наглядность визуализации данных в ГИС может быть формализована в рамках моделей зрительного восприятия и распознавания объектов по изображениям [7, 8].

В литературе по вопросам построения ГИС основное внимание уделяется архитектуре ГИС при решении различных прикладных задач, хранению и логическому выводу данных для отображения, программным решениям обработки и доступа к информации, а вопросы визуализации данных рассматриваются, в основном, применительно к отдельным видам отображаемой информации [9–12]. В настоящей работе, исходя из анализа закономерностей зрительного восприятия и распознавания объектов по изображениям, сформулирован общий подход к повышению наглядности визуализации данных в ГИС на основе выбора параметров и структуры отображаемых видеоданных с использованием свойств золотого сечения. Предложен критерий наглядности визуализации данных в ГИС и представлены рекомендации по выбору структуры геоданных и метаданных при отображении ЭК с разнородной информацией о большом числе геообъектов.

### Анализ особенностей зрительного восприятия видеоданных и свойств золотого сечения при визуализации информации

Визуализация данных в ГИС на современном этапе их развития предполагает отображение геопространственной информации преимущественно в виде ЭК совместно с метаданными — сопроводительной текстовой информацией и графическими объектами. При этом сопроводительная информация выводится на экран с затемнением (закрытием) элементов ЭК. Большинство имеющихся решений предполагают использование прозрачных или «всплывающих» форм на ЭК. При большом числе отображаемых геообъектов и метаданных на экране формируются сложные представления разнородных данных, что затрудняет восприятие оператором ГИС отображаемой информации в целом.

Видеоданные в ГИС представляют собой изображения, формируемые расположением и размерами геообъектов и разнообразных метадан-

ных, которые отображаются в виде ЭК. Поэтому для повышения наглядности отображения видеоданных в ГИС необходимо при выборе форм, размеров и взаимного расположения отображаемых графических и неграфических объектов учитывать объективные и субъективные закономерности зрительного восприятия и распознавания объектов по изображениям.

При зрительном восприятии изображений оператор ГИС реализует структурное распознавание отображаемых на экране объектов [6, 7]. Основными структурными признаками при визуальном распознавании объектов являются их топологические (размеры и форма) и яркие (тон, цвет) признаки. При структурном распознавании наблюдаемые объекты характеризуются описанием их структуры (образа) совокупностью нескольких структурных признаков. При этом любой сложный по структуре наблюдаемый объект можно представить в виде структурированной в пространстве совокупности более простых объектов (объектов с простой геометрической формой, характеризующихся однородной яркостной структурой).

К числу основных закономерностей зрительного восприятия изображений человеком-оператором можно отнести следующие [13–15]:

- достоверность визуального распознавания человеком-оператором простых объектов на изображениях зависит от линейного разрешения на объекте, формы объекта и максимального линейного размера объекта на изображении, для классификации объекта на его линейный размер должно приходиться 5–8 элементов разрешения;

- при одинаковом числе входящих на объект элементов разрешения объекты, отличающиеся по контрасту и по форме контура, распознаются человеком-оператором с различной вероятностью;

- вероятность распознавания человеком-оператором простого объекта на изображении повышается, если этот объект находится в упорядоченном окружении других простых объектов, и при этом имеют место определенные пропорции линейных размеров простых объектов, совместно образующих объект более сложной формы;

- пропускная способность человека-оператора по запоминанию и совместному анализу нескольких изображений ограничена, практически объем оперативной памяти человека позволяет сохранять в памяти одновременно не более 5–8 изображений.

Зависимость вероятности визуального распознавания объекта на изображении от свойств изображения имеет вид [14, 16]

$$P_{\text{расп}} = \exp \left[ -K_{\Phi} \left( \frac{\Delta l}{L} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где  $K_{\phi}$  — коэффициент формы наблюдаемого объекта;  $\Delta l$  — линейное разрешение на объекте в изображении;  $L$  — линейный размер объекта в изображении. Величина  $N = (\Delta l/L)^2$ , входящая в выражение (1), есть число элементов разрешения, приходящихся в изображении на наблюдаемый объект. Коэффициент формы  $K_{\phi}$  для различных объектов определяется эмпирически. Вероятность визуального распознавания объекта на изображении увеличивается с увеличением числа элементов разрешения в изображении объекта  $N$  и коэффициента его формы  $K_{\phi}$ .

Линейное разрешение  $\Delta l$  на объекте в изображении определяется в результате решения частотно-контрастного уравнения

$$CT(\kappa) = K_{\text{пор}}(\kappa), \quad (2)$$

где  $C$  — яркостной контраст объекта;  $T(\kappa)$  — частотно-контрастная характеристика изображения;  $K_{\text{пор}}(\kappa)$  — пороговая характеристика системы регистрации, учитывающая влияние всех значимых источников зашумления изображения и пороговое отношение сигнал/шум зрительного анализатора. Разрешающей способности  $\Delta l$  соответствует пространственная частота  $\kappa_0$ , являющаяся наименьшим корнем уравнения (2):  $\Delta l = 1/\kappa_0$ .

Выражения (1) и (2) составляют основу большинства моделей визуального распознавания объектов по изображениям. Разрешающая способность рассчитывается для частотно-контрастных характеристик изображений тест-объектов, пороговой характеристики их зрительного восприятия и технических характеристик видео-контрольного устройства. При отображении видеоданных в ГИС линейное разрешение на объекте определяется размером элемента изображения, соответствующего элементу разрешения на экране при предъявлении изображения оператору ГИС, нижний предел линейного разрешения ограничивается размером пикселя экрана видео-контрольного устройства. Контраст объекта  $C$  рассчитывается по отношению к окружающему его на изображении фону. Пространственная частота  $\kappa_0$ , соответствующая разрешающей способности  $\Delta l$ , тем выше, чем выше граничная частота частотно-контрастной характеристики изображения  $T(\kappa)$ , чем меньше в области этой граничной частоты пороговая характеристика системы регистрации  $K_{\text{пор}}(\kappa)$  и чем выше контраст объекта на изображении  $C$ .

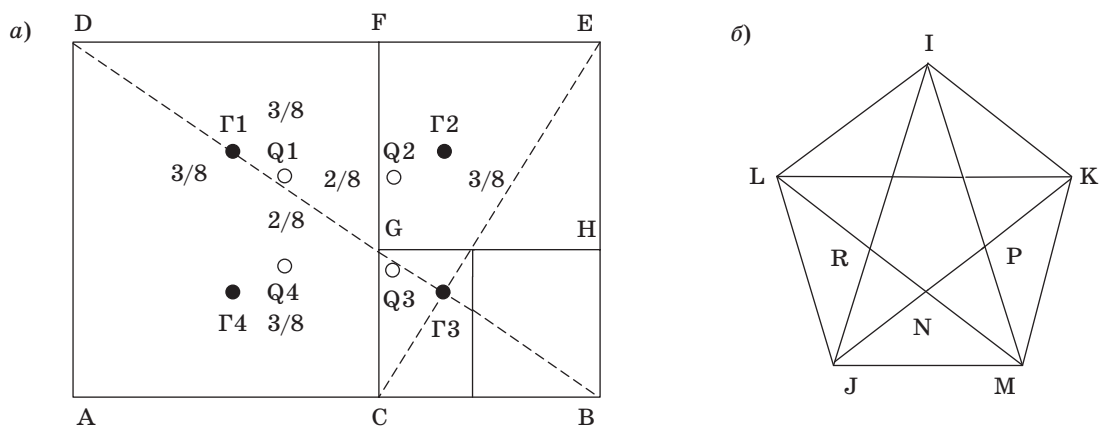
Отображаемые в ГИС видеоданные в виде ЭЖ с геообъектами и метаданными представляют собой совокупность большого числа простых и сложных объектов на одном изображении. При выполнении условий хорошего их зрительного восприятия в отдельности (линейное разрешение и контраст), определяемых моделью визуального

распознавания объектов по изображениям, для повышения качества восприятия изображения в целом (его наглядности) должны быть учтены особенности совместного зрительного восприятия простых объектов в составе сложных объектов. К числу таких особенностей относится наличие золотого сечения, определяющего пропорции между размерами элементов сложных объектов, при котором их изображения наилучшим образом воспринимаются человеком.

Золотое сечение с математической точки зрения — это иррациональное бесконечное число  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ , которое определяется из отношения  $1/x = x/(1 - x)$ , где  $x$  — длина большего отрезка в геометрической трактовке золотого сечения [17]. Геометрическая трактовка золотого сечения состоит в делении отрезка АВ единичной длины ( $|AB| = 1$ ) точкой С на две части, при этом длина большего отрезка составляет  $|BC| = x$ , длина меньшего отрезка составляет  $|AC| = (1 - x)$  и выполняется соотношение  $|AB|/|BC| = |BC|/|AC|$ . В процентном значении величина золотого сечения  $\Phi$  есть отношение величин 61,8/38,2. Золотое сечение присутствует в большинстве шедевров изобразительного искусства и архитектуры и гармонизирует восприятие изображений сложных объектов, чему посвящен ряд специальных исследований [18, 19]. Поэтому связанные с золотым сечением закономерности зрительного восприятия изображений, являясь субъективными, находят многочисленные проявления, и их целесообразно использовать при визуализации данных в ГИС для их наилучшего комплексного зрительного восприятия оператором ГИС.

С золотым сечением связаны золотые фигуры геометрии — золотой прямоугольник и правильный пятиугольник.

В золотом прямоугольнике (рис. 1, а) отношение сторон (форматное отношение) равно числу  $\Phi$ . Если отделить от золотого прямоугольника АВДЕ квадрат АDFС со стороны, равной меньшей стороне золотого прямоугольника, то оставшийся прямоугольник СFЕВ тоже будет золотым. То же самое произойдет, если от золотого прямоугольника СFЕВ отделить квадрат GFЕН, и т. д. Если провести диагонали в двух золотых прямоугольниках СFЕВ и СGНВ, то они всегда пересекаются под прямым углом. Точка пересечения диагоналей является геометрической точкой притяжения, куда уходит бесконечная последовательность получаемых золотых прямоугольников. В золотом прямоугольнике точками притяжения могут быть четыре точки Г1, Г2, Г3, Г4 — в зависимости от того, каким образом выделяются более мелкие золотые прямоугольники. Кроме того, в золотом прямоугольнике существуют так называемые фокусные точки или



■ **Рис. 1.** Золотые фигуры геометрии: *a* — золотой прямоугольник; *b* — правильный пятиугольник  
 ■ **Fig. 1.** Golden figures of geometry: *a* — golden rectangle; *b* — a regular pentagon

зрительные центры, расположенные на удалении  $|AB|/\Phi$  и  $|AD|/\Phi$  от его сторон. Таких точек также четыре: Q1, Q2, Q3, Q4 — они являются центрами зрительного восприятия.

В правильном пятиугольнике (рис. 1, б) отношение длины диагонали к длине стороны равно числу  $\Phi$ , например:  $|IM|/|IK| = |IJ|/|IL| = \Phi$ . Диагонали правильного пятиугольника образуют правильную пятиконечную звезду, у которой каждый отрезок делится пересекающим его отрезком в золотом сечении, например:  $|JK|/|JP| = |JP|/|PK| = \Phi$ . Кроме того, выполняется  $|LK|/|LN| = |LN|/|PK| = |PK|/|NP| = \Phi$ . Известен также золотой треугольник — равносторонний треугольник, длины сторон которого равны длине стороны правильного десятиугольника, вписанного в круг, и радиусу этого круга.

Свойства золотого сечения могут быть положены в основу критерия наглядности визуализации данных, использование которого при отображении видеоданных в ГИС позволяет улучшить их субъективное восприятие оператором ГИС и, как следствие, создать ему более комфортные условия при принятии решений по отображаемым данным при решении прикладных задач.

**Определение критерия наглядности визуализации данных в ГИС с использованием свойств золотого сечения**

Рассмотрим случай отображения в ГИС ЭК с геообъектами и метаданными, представляющими собой разнородную сопроводительную информацию [20, 21]. Визуализация геопространственной информации и метаданных осуществляется согласно масштабу участка отображения геоподложки, числу геообъектов и блоков сопроводи-

тельной информации, соотношенных к каждому геообъекту. Для наглядного восприятия геопространственной и сопроводительной информации в виде, удобном для понимания и визуального анализа, требуется отображение геообъектов и сопроводительной информации без затемнения (закрытия) существенных для визуального анализа элементов изображения.

Общая площадь геообъектов, отображаемых на ЭК, занимаемая ими на экране видеоконтрольного устройства с учетом пространственных размеров объектов и масштаба ЭК, может быть определена в виде

$$S_{\Sigma\text{Гео}} = M^2 \sum_{i=1}^I X_i Y_i, \tag{3}$$

где  $M$  — масштаб электронной карты;  $I$  — число геообъектов;  $X_i$  — длина  $i$ -го геообъекта в реальности;  $Y_i$  — ширина  $i$ -го геообъекта в реальности. Длина и ширина изображения  $i$ -го геообъекта при отображении на ЭК составляют  $L_{X_i} = M X_i$  и  $L_{Y_i} = M Y_i$  соответственно.

Изменение масштаба просмотра ЭК ведет к динамическому конфигурированию (изменению) размеров отображаемых геообъектов. При этом размеры изображения геообъекта на ЭК должны быть не менее линейного разрешения на изображении  $\Delta l$ , необходимого в соответствии с выражением (1) для обеспечения заданного уровня визуального распознавания объекта, но не более размера, выделяющего геообъект по отношению к другим соизмеримым объектам, расположенным на ЭК. Нижний предел следует из модели визуального распознавания объектов по изображениям, а верхний предел — из субъективных особенностей зрительного восприятия сложных изображений. Для площади изображения  $i$ -го геообъекта  $S_{\text{Гео}i}$  это условие имеет следующий вид:

$S_{\min} \leq S_{\text{го}i} \leq S_{c_i}$ , где  $S_{\min} = \Delta l^2$  — площадь минимальной размерности;  $S_{c_i}$  — площадь соизмеримой размерности по отношению к другим объектам, расположенным на ЭК.

Общая площадь, занимаемая на экране видеоконтрольного устройства метаданными (сопроводительной информацией), выводимыми на ЭК совместно с геообъектами, может быть определена в виде

$$S_{\Sigma\text{мд}} = \sum_{j=1}^J U_j V_j, \quad (4)$$

где  $J$  — число блоков метаданных;  $U_j$  — длина  $j$ -го блока метаданных;  $V_j$  — ширина  $j$ -го блока метаданных. Наиболее распространенным видом метаданных в ГИС являются текстовые данные. Они выводятся на экран в виде текстовых фрагментов прямоугольной формы или выносок, отнесенных к соответствующим геообъектам.

Определяемые выражениями (3) и (4) общие площади, занимаемые на экране видеоконтрольного устройства отображаемыми геообъектами и блоками метаданных, суммируются и образуют суммарную площадь, занимаемую на экране геообъектами и метаданными:

$$S_{\Sigma} = S_{\Sigma\text{го}} + S_{\Sigma\text{мд}}. \quad (5)$$

Отношение суммарной площади, занимаемой на экране геообъектами и метаданными, к площади экрана назовем коэффициентом покрытия площади экрана информацией:

$$k = S_{\Sigma} / S_{\text{э}}, \quad (6)$$

где  $S_{\text{э}}$  — площадь экрана, определяемая его линейными размерами  $H_X$  и  $H_Y$ :  $S_{\text{э}} = H_X H_Y$ . В соответствии с определением коэффициент  $k$  нормирован:  $0 < k < 1$ .

Отметим, что форматы отображения изображений в современных видеоконтрольных устройствах характеризуются определенными соотношениями числа пикселей по каждому линейному размеру экрана. Поэтому увеличение размера экрана может сопровождаться увеличением величины  $\Delta l$ , определяющей линейное разрешение в изображении, и не влиять на увеличение числа элементов разрешения  $N = (\Delta l/L)^2$ , приходящихся в изображении на наблюдаемый объект.

Коэффициент покрытия площади экрана информацией  $k$ , определяемый выражением (6), влияет на визуальное восприятие (наглядность) отображаемого на экране сложного изображения, представляющего собой совокупность геопространственной и сопроводительной информации. Чем коэффициент  $k$  больше и ближе к единице, тем больше закрытие геообъектами и метаданными

ми картографической подложки и насыщенность изображения в целом. Чем коэффициент  $k$  меньше и ближе к нулю, тем меньше вероятность распознавания малоразмерных объектов на изображении и ниже информативность изображения в целом. В обоих случаях ухудшается качество зрительного восприятия изображения в целом и снижается наглядность визуализации отображаемых данных.

Исходя из качественного анализа влияния коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k$  на комплексное восприятие видеоданных может быть предложен критерий наглядности визуализации данных в ГИС с использованием свойств золотого сечения. В данном случае пропорции, определяемые золотым сечением, сопоставляются с долей площади экрана видеоконтрольного устройства, занимаемой отображаемыми видеоданными. В качестве критерия наглядности визуализации данных предлагается использовать значение коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k$ , близкое к 0,382. Данное значение коэффициента  $k$  соответствует значению знаменателя дроби, определяющей величину  $\Phi$ . В этом случае покрытие площади экрана выводимыми на него геообъектами и метаданными менее половины всей площади экрана и наглядность визуализации отображаемых данных высокая — имеет место наилучшее комплексное восприятие видеоданных оператором ГИС. При этом значение коэффициента  $k$ , близкое к значению 0,618 числителя дроби, определяющей величину  $\Phi$ , полагается предельно допустимым. В этом случае покрытие площади экрана выводимыми на него геообъектами и метаданными более половины всей площади экрана и полагается, что комплексное восприятие видеоданных оператором ГИС затруднено. В диапазоне значений коэффициента покрытия площади экрана информацией  $0,382 < k < 0,618$  в соответствии с субъективными данными качества зрительного восприятия изображений комплексное восприятие видеоданных оператором ГИС возможно, но не наглядно. Введенный критерий наглядности визуализации данных может быть использован при проектировании ГИС, а также оператором ГИС в процессе решения им прикладных задач.

На практике для выбора масштаба отображения ЭК, обеспечивающего наилучшую наглядность визуализации данных в соответствии с предложенным критерием, необходимо учитывать зависимость коэффициента  $k$  от числа и геометрических размеров выводимых на экран видеоконтрольного устройства геообъектов и блоков метаданных, а также от размеров самого экрана. В общем случае коэффициент  $k$  является функцией ряда параметров:

$$\begin{aligned}
& k(M, I, X_1, \dots, X_I, Y_1, \dots, Y_I, J, \\
& U_1, \dots, U_J, V_1, \dots, V_J, H_X, H_Y) = \\
& = (S_{\Sigma_{ГО}}(M, I, X_1, \dots, X_I, Y_1, \dots, Y_I) + \\
& + S_{\Sigma_{МД}}(J, U_1, \dots, U_J, V_1, \dots, V_J)) / \\
& (S_0(H_X, H_Y)). \quad (7)
\end{aligned}$$

Определение коэффициента  $k$  в соответствии с его зависимостью от параметров отображаемых на экране геообъектов и блоков метаданных и размеров экрана, определяемой выражением (7), и выбор масштаба отображения ЭК, обеспечивающего наилучшую наглядность визуализации данных в соответствии с предложенным критерием, соответствующим золотому сечению ( $k \approx 0,382$ ), может быть алгоритмизировано.

#### **Алгоритмы выбора масштаба отображения видеоданных, обеспечивающего высокую наглядность визуализации, с использованием свойств золотого сечения**

На основе проведенного анализа свойств золотого сечения и введенного критерия наглядности визуализации данных в ГИС с использованием свойств золотого сечения разработаем последовательность действий и счетную процедуру, определяющие алгоритм выбора масштаба отображения видеоданных, обеспечивающего высокую наглядность визуализации данных в ГИС. В основе выбора масштаба отображения видеоданных лежит анализ зависимости коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k$  от геометрических параметров отображаемых на экране геообъектов и блоков метаданных и размеров экрана, определяемой выражением (7). Совокупность параметров, от которых зависит коэффициент  $k$ , может быть объединена понятиями структуры геоанных и метаданных.

Вследствие зависимости коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k$  от большого числа параметров ( $M, I, X_1, \dots, X_I, Y_1, \dots, Y_I, J, U_1, \dots, U_J, V_1, \dots, V_J, H_X, H_Y$ ) выбор масштаба отображения видеоданных осуществляется итерационно в результате последовательной трансформации структуры геоанных и метаданных с поиском сочетания параметров, обеспечивающих достижение выбранного критерия наглядности визуализации данных. Очевидно, что при многообразии данных, отображаемых в ГИС, и решаемых на основе их анализа прикладных задач выбор структуры геоанных и метаданных может осуществляться оператором ГИС предварительно на основе параметров типовых ЭК и наборов геоанных и метаданных, характерных

для решаемой прикладной задачи. Основные этапы выбора масштаба отображения видеоданных следующие.

1. Определяется слой (слои) выводимых на ЭК геоанных и перечень отображаемых геообъектов.

2. Определяются отображаемые метаданные (сопроводительная информация), соотнесенные к каждому отображаемому геообъекту.

3. Рассчитывается суммарная площадь геообъектов, выводимых на экран, с учетом их пространственных размеров и масштаба ЭК.

4. Рассчитывается суммарная площадь блоков метаданных, выводимых на экран, с учетом их пространственных размеров.

5. Определяется суммарная площадь, занимаемая на экране геоанными и метаданными, и для заданного размера экрана рассчитывается коэффициент покрытия площади экрана информацией  $k$ .

6. Полученное значение коэффициента  $k$  сравнивается с критериальным значением (диапазоном значений), соответствующим выполнению критерия наглядности визуализации данных.

7. Если значение коэффициента  $k$  отличается от критериального значения (диапазона значений), соответствующего выполнению критерия наглядности визуализации данных, то структура геоанных и метаданных трансформируется и повторяется выполнение этапов 3–6 до выполнения критерия наглядности визуализации данных.

8. Если значение коэффициента  $k$  совпадает с критериальным значением (диапазоном значений), соответствующим выполнению критерия наглядности визуализации данных, то выбранная структура геоанных и метаданных соответствует масштабу наиболее наглядного отображения видеоданных.

9. Для визуализации выводимых на экран данных используется выбранная структура геоанных и метаданных, определяющая масштаб отображения видеоданных для работы оператора ГИС.

Практически для выполнения алгоритма целесообразно задавать диапазон значений коэффициента  $k$ . Это может быть либо диапазон значений  $0,382 - \Delta k < k < 0,382 + \Delta k$  в окрестности золотого сечения, где  $\Delta k$  — допустимое отклонение от оптимального с точки зрения комплексного восприятия видеоданных оператором ГИС значения  $k = 0,382$ , либо диапазон значений  $0,382 < k < 0,618$ , в котором комплексное восприятие видеоданных оператором ГИС возможно, но недостаточно наглядно.

Рассмотренный алгоритм является базовым, на практике целесообразно его применять последовательно в несколько проходов для каждого слоя отображаемых на ЭК геоанных, причем

каждый последующий слой рассматривается совместно с уже рассмотренными слоями, и оптимальная структура геоданных и метаданных выбирается для совокупности слоев, рассматриваемых на данном проходе. При использовании для отображения геобъектов на ЭК  $L$  слоев общее число проходов составляет  $L$ . На первом проходе рассматривается один слой, на втором проходе — два слоя и т. д., на последнем проходе — все  $L$  слоев. Выбор масштаба отображения видеоданных с последовательным рассмотрением различных слоев отображаемых на ЭК геоданных на каждом  $l$ -м проходе,  $l = 1, 2, \dots, L$ , проходит по следующим этапам.

1. Определяются слои выводимых на ЭК геоданных и перечень отображаемых геобъектов.

2. Определяются отображаемые на ЭК геобъекты очередного  $l$ -го слоя.

3. Определяются отображаемые метаданные (сопроводительная информация), соотнесенные к каждому отображаемому геобъекту  $l$ -го слоя.

4. Если  $l = 1$ , то анализируются только геобъекты и метаданные, относящиеся к одному  $l$ -му слою; если  $1 < l \leq L$ , то геобъекты и метаданные, относящиеся к  $l$ -му слою, объединяются с геобъектами и метаданными, которые анализировались и для которых была выбрана структура на предыдущем  $(l - 1)$ -м проходе, и анализируется полученная совокупность геобъектов и метаданных  $l$  слоев.

5. Рассчитывается суммарная площадь совокупности анализируемых на  $l$ -м проходе геобъектов, выводимых на экран, с учетом их пространственных размеров и масштаба ЭК.

6. Рассчитывается суммарная площадь совокупности анализируемых на  $l$ -м проходе блоков метаданных, выводимых на экран, с учетом их пространственных размеров.

7. Определяется суммарная площадь, занимаемая на экране совокупностью анализируемых на  $l$ -м проходе геобъектов и метаданных, и для заданного размера экрана рассчитывается коэффициент покрытия площади экрана информацией  $k$ .

8. Полученное значение коэффициента  $k$  для совокупности анализируемых на  $l$ -м проходе геобъектов и метаданных сравнивается с критериальным значением (диапазоном значений), соответствующим выполнению критерия наглядности визуализации данных.

9. Если значение коэффициента  $k$  отличается от критериального значения (диапазона значений), соответствующего выполнению критерия наглядности визуализации данных, то структура совокупности анализируемых на  $l$ -м проходе геоданных и метаданных трансформируется и повторяется выполнение этапов 5–8 до выполнения критерия наглядности визуализации данных.

10. Если значение коэффициента  $k$  совпадает с критериальным значением (диапазоном значений), соответствующим выполнению критерия наглядности визуализации данных, то выбранная совокупность анализируемых на  $l$ -м проходе геоданных и метаданных соответствует масштабу наиболее наглядного отображения видеоданных.

11. Если  $1 \leq l < L$ , то повторяется выполнение этапов 4–10 с совместным анализом найденной совокупности геоданных и метаданных для  $l$  слоев и геоданных и метаданных, относящихся к  $(l + 1)$ -му слою; если  $l = L$ , то выбранная структура геоданных и метаданных всех  $L$  слоев соответствует масштабу наиболее наглядного отображения видеоданных.

12. Для визуализации выводимых на экран данных используется выбранная структура геоданных и метаданных, определяющая масштаб отображения видеоданных для работы оператора ГИС.

Преимущества данного алгоритма с последовательным рассмотрением на каждом проходе различных слоев отображаемых на ЭК геоданных по сравнению с базовым алгоритмом, на основе которого он построен, заключаются в ускорении поиска оптимальной структуры геоданных и метаданных и в оперативной результативности промежуточной и итоговой визуализации. При введении дополнительных условий выполнения каждого прохода и промежуточной визуализации результатов выполнения алгоритма на каждом проходе алгоритм позволяет выполнять оптимизацию послойной и поэлементной визуализации данных, что дает возможность оператору ГИС оперативно получать представление об интересующих его геобъектах с наглядным отображением данных, удобным для комплексного восприятия. Как и при выполнении базового алгоритма, для выполнения алгоритма с последовательным рассмотрением различных слоев отображаемых на ЭК геоданных целесообразно задавать диапазон значений коэффициента  $k$  либо в виде диапазона допустимых отклонений в окрестности золотого сечения, либо в виде диапазона значений, в котором комплексное восприятие видеоданных оператором ГИС возможно, но недостаточно наглядно.

#### **Исследование условий обеспечения наглядности визуализации данных в ГИС с использованием свойств золотого сечения**

Было проведено исследование условий обеспечения наглядности визуализации данных в ГИС в соответствии с предложенным критерием на-

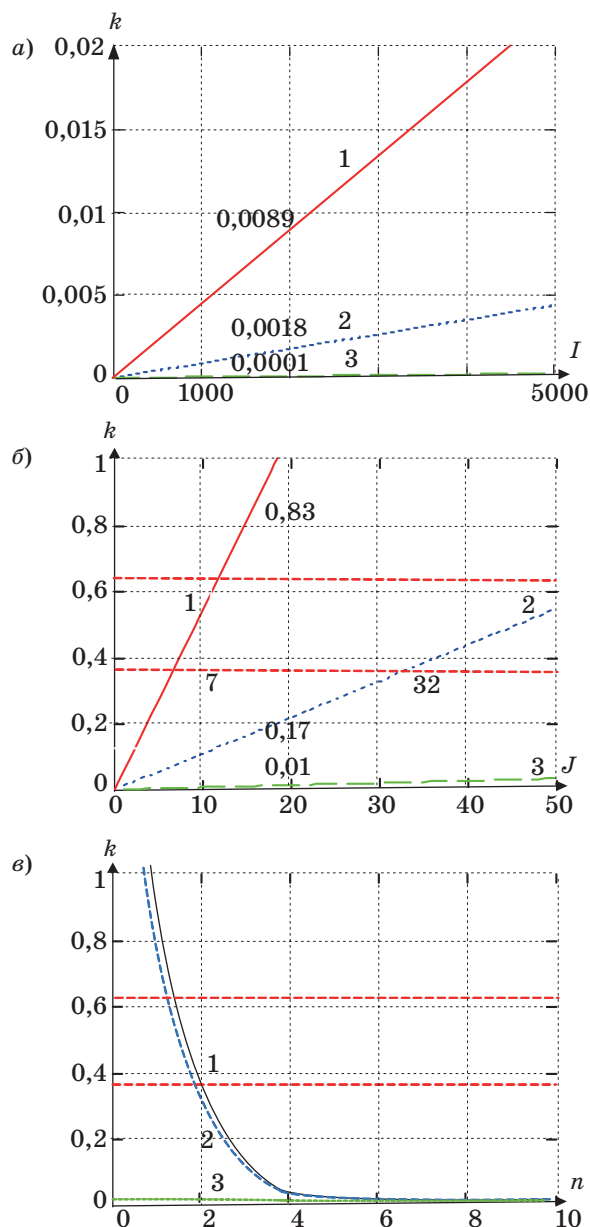
глядности визуализации данных с использованием свойств золотого сечения. Анализировались зависимости коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k$  от структуры геоданных и метаданных — числа и геометрических параметров отображаемых на экране геообъектов и блоков метаданных и размеров экрана. Расчеты коэффициента  $k$  проводились в соответствии с выражениями (3)–(7) для различных сочетаний параметров геообъектов и блоков метаданных, определяющих масштаб отображения видеоданных на экране видеоконтрольного устройства ГИС.

Графики зависимости коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k$  от числа геообъектов  $I$  при различной площади экрана  $S_э$  представлены на рис. 2, а. Полагалось, что площадь изображения каждого геообъекта  $S_{гоi} = 2 \text{ мм}^2$  (размер геообъекта  $1 \times 2 \text{ м}$ , масштаб ЭК 1:1000) и блоки метаданных отсутствуют. Кривая 1 соответствует  $S_э = 0,15 \times 0,3 \text{ м}$  (экран портативного ноутбука), кривая 2 —  $S_э = 0,35 \times 0,65 \text{ м}$  (экран монитора ПЭВМ), кривая 3 —  $S_э = 1,50 \times 2,50 \text{ м}$  (визуализационный экран).

В данном случае значения коэффициента  $k$  невелики и существенно меньше оптимального значения  $k = 0,382$ , соответствующего золотому сечению, даже при  $I = 5000$ , а при  $I = 2000$  имеет место  $k < 0,1$ . Это является следствием малого размера площади изображения каждого геообъекта  $S_{гоi}$  и отсутствия отображаемых метаданных. С увеличением площади экрана  $S_э$  величина коэффициента  $k$ , и без того меньшая оптимального значения, уменьшается, что показывает нецелесообразность увеличения размеров экрана при отображении ЭК, на которых отображаемые геообъекты занимают небольшую площадь. В рассмотренном случае наилучшая наглядность имеет место при отображении данных на экране портативного ноутбука.

Графики зависимости коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k$  от числа блоков метаданных  $J$  при различной площади экрана  $S_э$  представлены на рис. 2, б. Полагалось, что площадь изображения каждого блока метаданных  $S_{мдi} = 25 \text{ см}^2$  (размер блока метаданных  $5 \times 5 \text{ см}$ ) и геообъекты отсутствуют. Кривая 1 соответствует  $S_э = 0,15 \times 0,3 \text{ м}$  (экран портативного ноутбука), кривая 2 —  $S_э = 0,35 \times 0,65 \text{ м}$  (экран монитора ПЭВМ), кривая 3 —  $S_э = 1,50 \times 2,50 \text{ м}$  (визуализационный экран), штриховыми линиями показаны уровни, соответствующие значениям коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k = 0,382$  и  $k = 0,618$ .

В данном случае значения коэффициента  $k$  изменяются в широких пределах и в зависимости от соотношения между размером экрана и числом блоков метаданных принимают значения



■ Рис. 2. Зависимости коэффициента покрытия площади экрана информацией от числа геообъектов (а); числа блоков метаданных (б); размера экрана видеоконтрольного устройства ГИС (в)

■ Fig. 2. Dependences of the information coverage coefficient of the screen area of the number of geobjects (a); number of metadata blocks (b); screen size of the device monitoring GIS (c)

меньшие, большие и близкие к оптимальному значению  $k = 0,382$ , соответствующему золотому сечению. Это является следствием достаточно большого размера площади изображения блоков метаданных  $S_{мдi}$ . Значение  $k = 0,382$  достигается при следующих сочетаниях значений  $J$  и  $S_э$ :  $J = 7$  и  $S_э = 0,15 \times 0,30 \text{ м}$ ;  $J = 32$  и  $S_э = 0,35 \times 0,65 \text{ м}$ . При  $J \leq 50$  и  $S_э = 1,50 \times 2,50 \text{ м}$  значение  $k = 0,382$  не достигается. При  $J = 10$  и  $S_э = 0,15 \times 0,30 \text{ м}$

имеет место  $k > 0,618$ . С увеличением площади экрана  $S_0$  величина коэффициента  $k$  уменьшается. Так, при  $J = 15$  для экрана портативного ноутбука  $k = 0,83$ , для экрана монитора ПЭВМ  $k = 0,17$ , для визуализационного экрана  $k = 0,01$ . В рассмотренном случае при широком диапазоне изменения его значений за счет выбора размеров экрана при отображении ЭК, на которых отображаемые блоки метаданных занимают большую площадь, может быть обеспечено значение коэффициента  $k$ , близкое к оптимальному, при этом наилучшая наглядность имеет место при отображении данных на экране монитора ПЭВМ.

На рис. 2, в представлены графики зависимости коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k$  от размера экрана видеоконтрольного устройства ГИС, характеризуемого номером варианта размера экрана  $n$ , при различных значениях числа геобъектов  $I$  и блоков метаданных  $J$ . Значения линейных размеров экрана  $H_X$  и  $H_Y$  для рассмотренных вариантов  $n = 1, \dots, 10$  приведены в таблице. Остальные значения указаны выше. Кривая 1 соответствует  $I = 50, J = 50$ , кривая 2 —  $I = 1, J = 50$ , кривая 3 —  $I = 50, J = 1$ , штриховыми линиями показаны уровни, соответствующие значениям коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k = 0,382$  и  $k = 0,618$ .

В данном случае доминирующее влияние на значения коэффициента  $k$  оказывает число блоков метаданных вследствие достаточно большо-

го размера площади блоков метаданных  $S_{мдi}$  по сравнению с размером площади геобъектов  $S_{гоi}$ . В результате значения коэффициента  $k$  в случаях, когда  $I = 50, J = 50$  и  $I = 1, J = 50$ , отличаются незначительно. С увеличением площади экрана  $S_0 = H_X H_Y$  величина коэффициента  $k$  уменьшается, что свидетельствует о нецелесообразности увеличения размеров экрана при отображении ЭК, на которых отображаемые геобъекты и блоки метаданных занимают небольшую площадь. В рассмотренном случае при малом объеме метаданных ( $I = 50, J = 1$ ) значения коэффициента  $k$  невелики и существенно меньше оптимального значения  $k = 0,382$ , соответствующего золотому сечению, а при большом объеме метаданных ( $I = 50, J = 50$  и  $I = 1, J = 50$ ) значения коэффициента  $k$ , близкие к оптимальному значению, имеют место для варианта  $n = 2$  ( $S_0 = 0,4 \times 0,8$  м), близкого к параметрам экрана монитора ПЭВМ. В то же время для варианта  $n = 1$  ( $S_0 = 0,2 \times 0,4$  м), близкого к параметрам экрана портативного ноутбука, при большом объеме метаданных имеет место  $k > 0,618$ , что соответствует условиям, когда комплексное восприятие видеоданных оператором ГИС затруднено.

Таким образом, с точки зрения наглядности визуализации данных и комплексного восприятия видеоданных оператором ГИС во всех рассмотренных случаях нецелесообразно использовать визуализационные экраны больших размеров, которым соответствуют варианты  $n = 5, \dots, 10$ . Они могут использоваться лишь как средство коллективного отображения информации. При большом объеме метаданных также нецелесообразно использование портативных ноутбуков с экранами малых размеров, которым соответствует вариант  $n = 1$ , поскольку при этом существенно затрудняется комплексное восприятие видеоданных оператором ГИС. Следует отметить, что при анализе не учитывались форматы отображения изображений на экране видеоконтрольного устройства ГИС, характеризующиеся соотношением числа пикселей по каждому линейному размеру экрана [22]. При задании формата отображения изображения и размера пикселя видеоконтрольного устройства достижимые значения коэффициента покрытия площади экрана информацией  $k$  могут быть уточнены, однако общие рекомендации о выборе размера экрана и структуры отображаемых геобъектов и метаданных следуют уже из результатов проведенных исследований.

### Заключение

Для оценки наглядности визуализации данных в ГИС предложен критерий, использующий свойства золотого сечения и характеризующий

■ Варианты размеров экрана видеоконтрольного устройства ГИС

■ Screen size options for a GIS video monitoring device

Вариант $n$	$H_X$ , м	$H_Y$ , м
1	0,2	0,4
2	0,4	0,8
3	0,6	1,2
4	0,8	1,6
5	1,0	2,0
6	1,2	2,4
7	1,4	2,8
8	1,6	3,2
9	1,8	3,6
10	2,0	4,0



возможности комплексного восприятия оператором ГИС видеоданных, отображаемых на экране видеоконтрольного устройства в виде ЭК. Связанные с золотым сечением закономерности зрительного восприятия изображений, являясь субъективными, находят многочисленные проявления, и их целесообразно использовать при визуализации данных в ГИС. В качестве показателя наглядности визуализации данных выступает коэффициент покрытия площади экрана информацией, значение которого в соответствии с введенным критерием должно быть близким к 0,382, что соответствует математическому определению золотого сечения. Практически может задаваться диапазон значений данного коэффициента либо в виде диапазона допустимых отклонений в окрестности золотого сечения, либо в виде диапазона значений, в котором комплексное восприятие видеоданных оператором ГИС возможно, но недостаточно наглядно.

Величина коэффициента покрытия площади экрана информацией зависит от ряда геометрических параметров отображаемых геообъектов и блоков метаданных и размеров экрана. Условие

наилучшей наглядности визуализации соответствует определенный масштаб отображения видеоданных и соответствующая ему структура геоданных и метаданных. Представлено описание базового алгоритма выбора масштаба отображения видеоданных по критерию наглядности, использующему свойства золотого сечения, и построенного на его основе алгоритма выбора масштаба отображения видеоданных с последовательным анализом слоев отображаемых на ЭК геоданных. Исследованы условия обеспечения наглядности визуализации данных в ГИС в соответствии с предложенным критерием. Для различных объемов отображаемых на ЭК геоданных и метаданных проанализирована наглядность их визуализации на экранах различных размеров и сделаны общие рекомендации по выбору размера экрана видеоконтрольного устройства ГИС и структуры отображаемых геообъектов и метаданных. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании ГИС, а также для предварительного выбора оператором ГИС структуры отображаемых геоданных и метаданных для решаемой прикладной задачи.

## Литература

1. *Геоинформатика*. в 2 кн. / под ред. В. С. Тикунова. М., Издательский центр «Академия», 2010. Кн. 1. 400 с.; Кн. 2. 432 с.
2. **Журкин И. Г., Шайтура С. В.** *Геоинформационные системы*. М., Кудиц-Пресс, 2009. 272 с.
3. **Шокин Ю. И., Потапов В. П.** ГИС сегодня: состояние, перспективы, решения. *Вычислительные технологии*, 2015, № 5, с. 175–213.
4. **Воронин А. В.** Результаты анализа перспектив развития геоинформационных систем. *Системы высокой доступности*, 2017, № 4, с. 68–75.
5. **Михайлов А. Ю.** *Принцип наглядности. От традиции к инновации в обучении*. Saarbrücken, Lambert Academic Publishing, 2012. 84 с.
6. **Трофимов Е. А.** *Эргономика зрительного восприятия*. М., Актуальные издательские решения, 2013. 192 с.
7. **Marr D.** *Vision: A computational investigation into the human representation and processing of visual information*. Massachusetts, MIT press, 2010. 362 p.
8. **Красильников Н. Н.** *Цифровая обработка изображений*. М., Вуз. кн., 2001. 320 с.
9. **Лурье И. К.** *Геоинформационное картографирование. Методы геоинформатики и цифровой обработки космических снимков*. М., КДУ, 2008. 422 с.
10. *Интеллектуальные географические информационные системы для мониторинга морской обстановки* / под ред. Р. М. Юсупова и В. В. Поповича. СПб., Наука, 2013. 284 с.
11. **Матерухин А. В.** Проблематика создания ГИС на основе систем управления потоками данных. *Геодезия и картография*, 2017, № 4, с. 44–47.
12. **Воронин А. В., Зацаринный А. А., Ионенков Ю. С.** Особенности оценки эффективности геоинформационной системы как элемента ситуационного центра. *Системы и средства информатики*, 2018, № 2, с. 75–87.
13. **Книжников Ю. Ф., Кравцова В. И., Тутубалина О. В.** *Аэрокосмические методы географических исследований*. М., Академия, 2004. 336 с.
14. **Лабутина И. А.** *Дешифрирование аэрокосмических снимков*. М., Аспект-Пресс, 2004. 184 с.
15. О количественной оценке эффективности алгоритмов анализа изображений / П. П. Кольцов, А. С. Осипов, А. С. Куцаев и др. *Компьютерная оптика*, 2015, № 4, с. 542–556.
16. **Гулина Ю. С., Колочкин В. Я.** Методика расчета вероятности распознавания изображений человеком-оператором. *Вестник Московского государственного университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Приборостроение*, 2012, № 1, с. 100–107.
17. **Аракелян Г. Б.** *Математика и история золотого сечения*. М., Логос, 2014. 404 с.
18. **Короленко П. В., Грушина Н. В.** *Золотое сечение и самоподобные структуры в оптике*. М., УРСС, 2010. 136 с.
19. **Ковалев Ф. В.** *Золотое сечение в живописи*. М., РИП-Холдинг, 2016. 192 с.
20. **Косиков А. Г., Ушакова Л. А.** Виртуальные геоизображения пространственно-временных моделей ок-

ружающей среды. *Геодезия и картография*, 2016, № 5, с. 43–51.

21. Мироненко А. Н., Радионов В. А. Структура и основные свойства цифровой модели местности с координатной идентификацией топографической информации. *Геодезия и картография*, 2017, № 9. с. 37–41.

22. Мальцев Г. Н., Сазонов К. В., Панкратов А. В. Метод обнаружения начальных кадров видеопотока. *Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения*, 2016, вып. 1, с. 31–37.

UDC 681.518

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-46-57

### Data visualization quality in a geographic information system using golden ratio properties

A. V. Voronin<sup>a</sup>, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-0956-0413, aleksey.v.v@mail.ru

G. N. Maltsev<sup>b</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-6755-5700

M. Yu. Sokhen<sup>c</sup>, PhD, Tech., orcid.org/0000-0001-9080-4368

<sup>a</sup>Federal Research Center «Computer Science and Control» of RAS, 44, cor. 2, 119333, Vavilova St., Moscow, Russian Federation

<sup>b</sup>A. F. Mozhaiskii Military Space Academy, 13, Zhdanovskaia Emb., 197198, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>c</sup>Closed Joint Stock Company «Evrika», 118, Moskovskiy Pr., 196084, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** Data visualization quality is important for the work of a geographic information system operator, determining the conditions under which he or she makes decisions concerning the displayed data. Visual perception patterns associated with the golden ratio properties allow us to formulate a criterion for data visualization quality which would characterize the possibilities of the operator's complex perception of the video data displayed on a control device screen in the form of an electronic card. **Purpose:** Substantiation of a data visualization quality criterion for geoinformation systems using the golden ratio properties, and the study of the conditions for providing good visualization quality for geodata and metadata on a video control device screen in accordance with the proposed criterion. **Methods:** A formal definition of the data visualization quality criterion in geoinformation systems using the coefficient of the screen area information coverage as an index whose optimal value corresponds to the mathematical definition of the golden ratio; and the study of the properties of this criterion. **Results:** Based on the conducted analysis of visual perception of video data and golden ratio properties during the data visualization, a criterion is proposed for data visualization quality, which uses the golden ratio properties and characterizes the possibilities of complex perception of video data in an electronic map form by a geographic information system operator. Iteration algorithms for choosing the video data display scale are developed, based on the visualization quality criterion and related to the golden ratio properties. These are the basic algorithm used for each geodata layer represented on the electronic map, and an algorithm of successive analysis of various layers of the displayed geodata. The choice of a video data display scale in accordance with the developed algorithms can be preliminarily carried out by the system operator using the parameters of standard electronic maps and geodata/metadata sets typical for the current applied problem. We have studied how the scale of the geodata and metadata displayed on an electronic map affects their visualization quality on screens of various sizes. For the considered standard volumes of displayed geodata and metadata, the best visualization quality was achieved when they were displayed on a standard computer monitor, as opposed to a portable notebook or visualization screen. **Practical relevance:** The proposed criterion and the recommendations for choosing a screen size for the video monitoring device or the structures of the displayed geo-objects and metadata can be used in the design of geoinformation systems, or for preliminary choice of the displayed data structure by a geoinformation system operator.

**Keywords** — geoinformation system, electronic card, data visualization quality, golden ratio.

**Citation:** Voronin A. V., Maltsev G. N., Sokhen M. Yu. Data visualization quality in a geographic information system using golden ratio properties. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 46–57 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-46-57

### References

1. *Geoinformatika* [Geoinformatics]: in 2 books / ed. by V. S. Tikunov. Moscow, Akademiya Publ., 2010. Book 1. 400 p. Book 2. 432 p. (In Russian).
2. Zhurkin I. G., Shaitura S. V. *Geoinformatsionnye sistemy* [Geoinformation systems]. Moscow, Kudits-Press Publ., 2009. 272 p. (In Russian).
3. Shokin Yu. I., Potapov V. P. GIS today: state, prospects, solutions. *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2015, no. 5, pp. 175–213 (In Russian).
4. Voronin A. V. Results of the analysis of the prospects for the development of geo information systems. *Sistemy vysokoi dostupnosti*, 2017, no. 4, pp. 68–75 (In Russian).
5. Mikhailov A. Yu. Printsip naglyadnosti. Ot traditsii k innovatsii v obuchenii [The principle of clarity. From the tradition to the innovation in teaching]. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2012. 84 p. (In Russian).
6. Trofimov E. A. *Ehrgonomika zritel'nogo vospriyatiya* [Ergonomics of visual perception]. Moscow, Aktual'nye izdatel'skie resheniya Publ., 2013. 192 p. (In Russian).
7. Marr D. *Vision: A Computational Investigation into Visual Information*. Massachusetts, MIT press Publ., 2010. 362 p.
8. Krasilnikov N. N. *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenij* [Digital image processing]. Moscow, Vuzovskaya kniga Publ., 2001. 320 p. (In Russian).
9. Lurie I. K. *Geoinformatsionnoe kartografirovanie. Metody geoinformatiki i tsifrovoj obrabotki kosmicheskikh snimkov* [Geoinformation mapping. Geoinformatics and digital processing methods of space images]. Moscow, KDU Publ., 2008. 422 p. (In Russian).
10. *Intellektual'nye geograficheskie informatsionnye sistemy dlya monitoringa morskoy obstanovki* [Intellectual geographic information systems for monitoring the marine environment] / ed. by R. M. Yusupov and V. V. Popovich. Saint-Petersburg, Nauka Publ., 2013. 284 p. (In Russian).
11. Materukhin A. V. The problem of creating a GIS based on data flow control systems. *Geodeziya i kartografiya*, 2017, no. 4, pp. 44–47 (In Russian).
12. Voronin A. V., Zatsarinny A. A., Ionenkov Yu. S. Features of assessing the effectiveness of geoinformation system as an element of the situational center. *Sistemy i sredstva informatiki*, 2018, no. 2, pp. 75–87 (In Russian).

13. Knizhnikov Yu. F., Kravtsova V. I., Tutubalina O. V. *Aerokosmicheskie metody geograficheskikh issledovaniy* [Aerospace methods of geographical research]. Moscow, Academy Publ., 2004. 336 p. (In Russian).
14. Labutina I. A. *Deshifrirovaniye aerokosmicheskikh snimkov* [Interpretation of aerospace images]. Moscow, Aspect-Press Publ., 2004. 184 p. (In Russian).
15. About a quantitative assessment of the effectiveness of image analysis algorithms / P. P. Koltsov, A. S. Osipov, A. S. Kutsaev, et al. *Komp'yuternaya optika*, 2015, no. 4, pp. 542–556 (In Russian).
16. Gulina Yu. S., Kolyuchkin V. Ya. The method of calculating the probability of image recognition by a human operator. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. E. Baumana. Ser. Priborostroenie*, 2012, no. 1, pp. 100–107 (In Russian).
17. Arakelyan G. B. *Matematika i istoriya zolotoy secheniya* [Mathematics and history of the golden section]. Moscow, Logos Publ., 2014. 404 p. (In Russian).
18. Korolenko P. V., Grushina N. V. *Zolotoe sechenie i samopodobnye struktury v optike* [The golden section and self-similar structures in optics]. Moscow, URSS Publ., 2010. 136 p. (In Russian).
19. Kovalev F. V. *Zolotoe sechenie v zhivopisi* [The golden section in painting]. Moscow, RIP-Holding Publ., 2016. 192 p. (In Russian).
20. Kosikov A. G., Ushakova L. A. Virtual geo-images of space-time models of the environment. *Geodeziya i kartografiya*, 2016, no. 5, pp. 43–51 (In Russian).
21. Mironenko A. N., Radionov V. A. The structure and basic properties of a digital terrain model with coordinate identification of topographic information. *Geodeziya i kartografiya*, 2017, no. 9, pp. 37–41 (In Russian).
22. Maltsev G. N., Sazonov K. V., Pankratov A. V. The method of detecting the initial frames of the video stream. *Voprosy radioelektroniki. Seriya: Tekhnika televideniya*, 2016, no. 1, pp. 31–37 (In Russian).

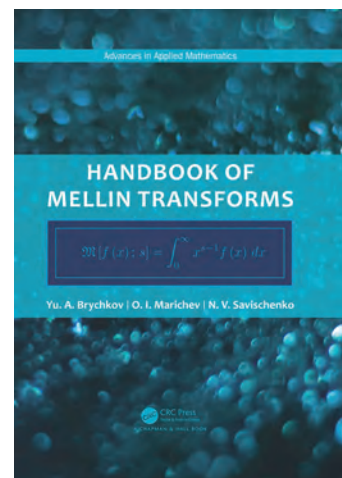
**Brychkov Yu. A., Marichev O. I., Savischenko N. V.** Handbook of Mellin Transforms. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2019. 587 p. ISBN 9781138353350

Преобразование Меллина широко используется в различных задачах чистой и прикладной математики, в частности в теории дифференциальных и интегральных уравнений и теории рядов Дирихле. Оно находит широкое применение в математической физике, теории чисел, математической статистике, теории асимптотических разложений и особенно в теории специальных функций и интегральных преобразований, а также в алгоритмах интегрирования в системах компьютерной алгебры.

Поскольку большинство интегралов, встречающихся в приложениях, можно свести к виду соответствующих преобразований Меллина с определенными параметрами, эта книга также может быть использована как справочник по определенным и неопределенным интегралам. Заменой переменных преобразование Меллина превращается в преобразования Фурье и Лапласа.

Справочник предназначен математикам и специалистам во всех областях науки и техники, где используются математические методы, а также аспирантам и студентам университетов.

Книгу можно приобрести на сайте издательства CRC Press: <https://www.crcpress.com/Handbook-of-Mellin-Transforms/Brychkov-Marichev-Savischenko/p/book/9781138353350>



## Математическое моделирование процессов обработки визуальной сенсорной информации по многоканальным сигналам ЭЭГ

В. А. Максименко<sup>а</sup>, канд. физ.-мат. наук, доцент, [orcid.org/0000-0002-4632-6896](https://orcid.org/0000-0002-4632-6896), [maximenkovl@gmail.com](mailto:maximenkovl@gmail.com)  
А. К. Куц<sup>а</sup>, магистрант, [orcid.org/0000-0001-6233-2594](https://orcid.org/0000-0001-6233-2594)

А. Н. Писарчик<sup>б</sup>, канд. физ.-мат. наук, профессор, [orcid.org/0000-0003-2471-2507](https://orcid.org/0000-0003-2471-2507)

А. Е. Храмов<sup>а</sup>, доктор физ.-мат. наук, профессор, [orcid.org/0000-0003-2787-2530](https://orcid.org/0000-0003-2787-2530)

<sup>а</sup>Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., Политехническая ул., 77, Саратов, 410054, РФ

<sup>б</sup>Мадридский политехнический университет, Рамиро де Маесту ул., 7, Мадрид, 28040, Испания

**Введение:** в настоящий момент возрастает интерес к анализу процессов, протекающих в коре головного мозга во время восприятия и обработки сенсорной информации, с использованием многоканальных сигналов его электрической активности. При этом особое внимание сфокусировано на выявлении характерных сценариев вовлечения различных отделов головного мозга в процесс сенсорного восприятия. **Цель:** исследование особенностей пространственно-временной и частотно-временной структуры сигналов электрической активности головного мозга во время обработки визуальной сенсорной информации. **Результаты:** на основе методов частотно-временного анализа исследованы процессы изменения энергии электрической нейронной активности в частотных областях 8–12 Гц (альфа-активность) и 15–30 Гц (бета-активность) в различных отделах головного мозга. Показано, что восприятие и обработка визуального стимула вызывают уменьшение энергии альфа-активности и увеличение энергии бета-активности. При этом данные процессы наблюдаются в различных отделах головного мозга. Также отмечено, что характерный паттерн возникает в затылочной и теменной долях и затем вовлекает нейроны центральной и лобной областей головного мозга. **Практическая значимость:** выявленный сценарий нейронной активности может быть использован при разработке пассивных интерфейсов мозг-компьютер, осуществляющих мониторинг и контроль состояния человека в процессе обработки больших объемов визуальной сенсорной информации.

**Ключевые слова** – многоканальные сигналы ЭЭГ, визуальное восприятие, частотно-временной анализ, обработка сенсорной информации.

**Цитирование:** Максименко В. А., Куц А. К., Писарчик А. Н., Храмов А. Е. Математическое моделирование процессов обработки визуальной сенсорной информации по многоканальным сигналам ЭЭГ. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 58–65. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-58-65

**Citation:** Maksimenko V. A., Kuc A. K., Pisarchik A. N., Hramov A. E. Mathematical modeling of visual sensory information processing using multi-channel EEG signals. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 58–65 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-58-65

### Введение

Анализ процессов, протекающих в коре головного мозга во время восприятия и обработки сенсорной информации, является актуальной задачей на стыке физико-математических наук и нейрофизиологии [1, 2]. Интерес к решению данной задачи связан с возможностью обнаружения сценариев нейронной активности, характерных для восприятия больших объемов сенсорной информации в условиях высокой когнитивной нагрузки [3, 4].

Известно, что нейронная сеть коры головного мозга представляет собой распределенную вычислительную систему, которая обладает свойством адаптивного перестроения своей конфигурации для эффективной обработки сенсорной информации и принятия решений. Согласно результатам нейрофизиологических исследований, при решении простых задач, которые не требуют обработки и анализа большого объема сенсорной информа-

ции, головной мозг активизирует небольшие нейронные группы кортекса. В то же время, когда решение задачи требует больших усилий, мозг задействует большое число нейронных структур, расположенных в отдаленных областях, и активизирует связи между ними [5, 6]. Данная теория известна в научной литературе как теория глобального рабочего пространства (Global workspace theory) [7].

В частности, известно, что восприятие визуальной информации связано с возбуждением первичного зрительного центра-анализатора, расположенного в затылочной коре головного мозга, и центра визуального внимания, расположенного в теменной области [8]. При этом, согласно результатам нейрофизиологических исследований, при увеличении времени выполнения визуальной задачи или при увеличении сложности предъявляемых визуальных стимулов наряду с теменно-затылочной областью наблюдается активация лобной области головного мозга [9].

Несмотря на большое число работ, посвященных анализу особенностей нейронной активности, ассоциирующихся с обработкой сенсорной информации, механизмы, отвечающие за формирование подобной пространственно-распределенной структуры в нейронной сети мозга, остаются неизвестными. Так, слабо изучены механизмы, позволяющие нейронам, расположенным в различных областях мозга, взаимодействовать друг с другом.

Одним из эффективных неинвазивных методов анализа динамики нейронной сети головного мозга является детектирование характерных частотно-временных и пространственно-временных особенностей электрической активности путем рассмотрения многоканальных электроэнцефалограмм (ЭЭГ). В данном контексте применение методов статистического и спектрального анализа для изучения свойств сигналов ЭЭГ позволяет моделировать различные сценарии активности нейронных ансамблей мозга на микроскопическом уровне [10–12].

С учетом вышесказанного в настоящей работе исследуются частотно-временная и пространственно-временная структуры многоканальных сигналов ЭЭГ в процессе восприятия визуальной информации. На основании полученных результатов описывается сценарий нейронной активности головного мозга, ассоциирующийся с восприятием и обработкой визуальной сенсорной информации.

### Нейрофизиологический эксперимент

В экспериментах принимали участие восемь здоровых добровольцев в возрасте от 20 до 43 лет. Все добровольцы предоставили информированное письменное согласие на участие в эксперименте и были осведомлены об особенностях экспериментальной работы. Исследования проводились в соответствии с Хельсинкской декларацией Всемирной медицинской ассоциации. Дизайн и оборудование экспериментальной работы одобрены комиссией по этике СГТУ им. Гагарина Ю. А.

В качестве визуального стимула использовался куб Неккера, который часто применяется в нейрофизиологических и психологических экспериментах [6]. Куб Неккера является неоднозначным стимулом и допускает две возможные интерпретации. В результате процесс восприятия данного объекта включает как фазу первичного восприятия зрительной информации, так и более сложную когнитивную активность, связанную с обработкой визуальной информации и принятием решения относительно интерпретации графического изображения.

В ходе эксперимента испытуемому поочередно показывали кубы Неккера, характеризующиеся различными конфигурациями внутренних гра-

ней. Предъявляемые кубы отличались друг от друга, что позволяло минимизировать эффект привыкания испытуемого к предъявляемому объекту. Время предъявления каждого стимула варьировалось в диапазоне 1–1,5 с, а периодичность предъявления составляла 5–7 с. Весь эксперимент длился около 15 мин для каждого участника, включая короткие записи фоновой активности головного мозга до и после предъявления визуальных стимулов (по 2 мин). Чтобы сделать восприятие следующего куба Неккера независимым от предыдущего, между последующими демонстрациями куба на экране монитора показывался абстрактный рисунок.

Электрическая активность мозга регистрировалась с помощью электроэнцефалографического оборудования «Энцефалан-ЭЭГР-19/26» (ООО НПКФ «Медиком», РФ). При записи сигналов использовался метод монополярной регистрации и классическая расстановка электродов ЭЭГ «10–20» [13].

### Обработка данных и обсуждение полученных результатов

Основные этапы алгоритма обработки экспериментальных данных показаны на рис. 1, а.

Сигналы ЭЭГ регистрировались при помощи набора электродов (O1, O2 — затылочная часть; P3, P4, Pz — теменная часть; C3, C4, Cz — центральная часть; F3, F4, Fz, Fp1, Fp2 — лобные доли) (рис. 1, б). Для каждого канала ЭЭГ в диапазоне частот 1–30 Гц был рассчитан вейвлетный энергетический спектр  $E^n(f, t) = \sqrt{W_n(f, t)^2}$ . В данном случае  $W_n(f, t)$  — комплексные коэффициенты вейвлетного преобразования, которые вычисляются при помощи соотношения

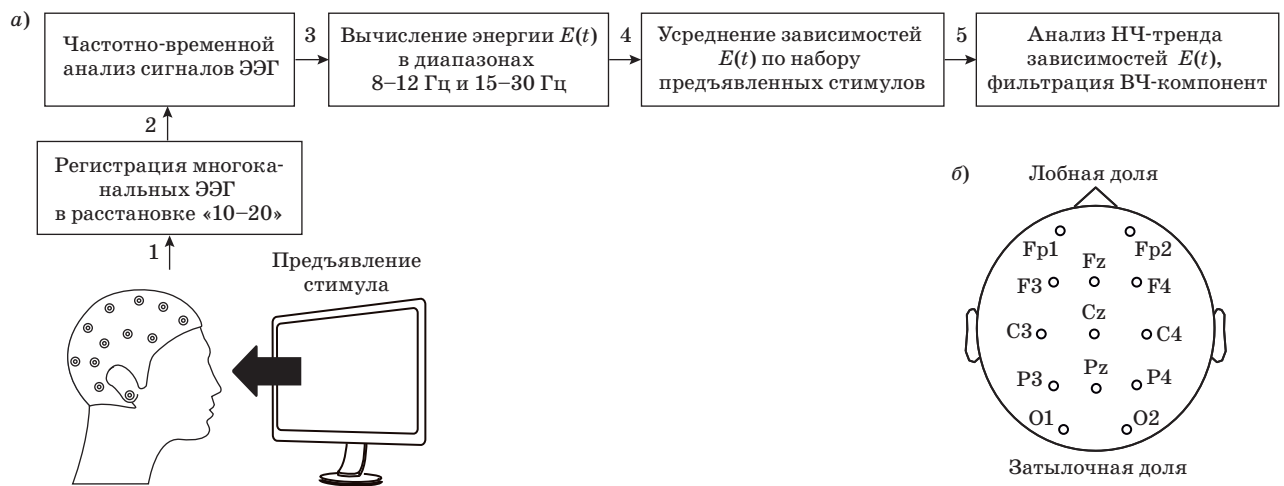
$$W_n(f, t) = \sqrt{f} \int_{t-4/f}^{t+4/f} X_n(t) \psi^*(f, t) dt, \quad (1)$$

где  $n = 1 \dots N$  — номера каналов ЭЭГ ( $N = 13$  — общее количество каналов, используемых для анализа); символ «\*» означает комплексное сопряжение. В качестве материнского вейвлета  $\psi(f, t)$  был выбран вейвлет Морле, который часто используется для анализа нейрофизиологических сигналов [14]:

$$\psi(f, t) = \sqrt{f} \pi^{1/4} e^{j\omega_0 f(t-t_0)} e^{-f(t-t_0)^2/2}, \quad (2)$$

где  $\omega_0 = 2\pi$  — параметр, характеризующий вейвлетную функцию.

Анализ вейвлетного спектра проводился в двух частотных диапазонах:  $\Delta f_\alpha$ : 8–12 Гц (диа-



■ **Рис. 1.** Основные этапы проведения экспериментального исследования и обработки данных (а) и расположение регистрирующих электродов в соответствии с международной системой «10-20» (б)

■ **Fig. 1.** Schematic illustration of main stages of experimental procedure and data analysis (a) and position of recording electrodes according to 10-20 EEG electrode layout (b)

пазон альфа-активности) и  $\Delta f_\beta$ : 15–30 Гц (диапазон бета-активности). Согласно последним работам, визуальное внимание связано с возникновением характерных паттернов нейронной активности в частотных диапазонах альфа- и бета-ритмов в затылочной и теменной областях [8]. Известно также, что изменения альфа-активности связаны с визуальным [15] или звуковым [16] вниманием, а изменения бета-активности — с обработкой сенсорной информации [17] и переключением режима активности нейронного ансамбля в состояние внимания [18, 19]. Роль нейронной активности в альфа- и бета-областях в процессе восприятия визуальной информации анализируется также в работе [20] в контексте передачи информации в зрительной коре.

Для указанных частотных диапазонов соответствующие значения вейвлет-энергии  $E_\alpha(t)$  и  $E_\beta(t)$  рассчитывались путем усреднения спектральной энергии  $E^n(f, t)$  по соответствующим областям спектра:

$$E_{\alpha,\beta}^n(t) = \frac{1}{E_*^n(t)} \int_{\Delta f_{\alpha,\beta}} E^n(f', t) df', \quad (3)$$

где  $E_*^n(t)$  — значение энергии  $E^n(f, t)$ , усредненное по всему рассматриваемому спектру сигнала ЭЭГ:

$$E_*^n(t) = \int_{1 \text{ Гц}}^{30 \text{ Гц}} E^n(f', t) df'. \quad (4)$$

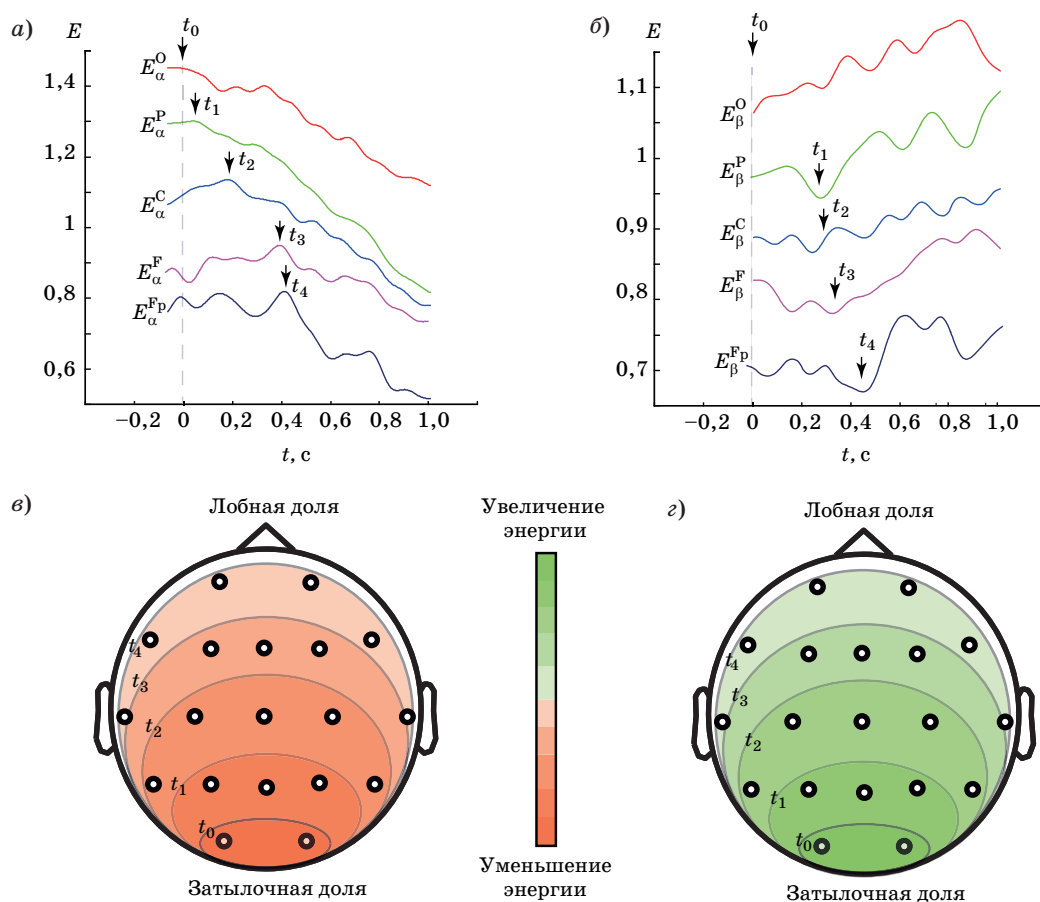
Полученные коэффициенты  $E_{\alpha,\beta}^n(t)$  были усреднены по  $K = 20$  интервалам времени длительностью 1 с, соответствующим восприятию

и обработке 20 визуальных стимулов. На последнем этапе обработки полученные коэффициенты усреднялись по каналам ЭЭГ, расположенным в различных отделах мозга.

Известно, что восприятие визуального стимула связано с увеличением энергии электрической активности нейронов в затылочной доле [21, 22]. Этот эффект объясняется локализацией в данной области мозга зрительных областей [23].

Для анализа изменений энергии, вызванных восприятием и обработкой визуальной информации, полученные коэффициенты (3) были обработаны высокочастотным фильтром. Все спектральные компоненты, лежащие выше 10 Гц, были удалены. Полученные в результате фильтрации сигналы показаны на рис. 2. Представленные кривые характеризуют изменение во времени энергии альфа-активности (рис. 2, а) и бета-активности (рис. 2, б) в различных участках головного мозга.

Сразу после предъявления визуального стимула (момент времени  $t_0$ ) наблюдается выраженное уменьшение энергии альфа-активности  $E_\alpha^O(t)$  в затылочной области (см. рис. 2, а). Согласно полученным ранее результатам [23], это связано с возбуждением первичного зрительного центра. В момент времени  $t_1$  наблюдается выраженное уменьшение энергии альфа-активности  $E_\alpha^P(t)$  в теменной области, что связано с активацией центра визуального внимания. Стоит отметить, что затылочная и теменная области активируются практически одновременно, что подтверждает их ведущую роль в процессе первичной обработки визуальных стимулов. Схожая тенденция, заключающаяся в уменьшении энергии альфа-активности, наблюдается также и в других областях мозга. В частности, из рис. 2, а можно ви-



■ **Рис. 2.** Зависимость от времени энергии ЭЭГ сигналов в области альфа-активности (8–12 Гц) (а) и бета-активности (15–30 Гц) (б) в процессе восприятия визуального стимула. Кривые получены в результате усреднения энергии по каналам ЭЭГ, расположенным в различных областях коры мозга; области мозга, характеризующиеся уменьшением энергии альфа-активности (в) и увеличением энергии бета-активности (г) в характерные моменты времени  $t_0-t_4$

■ **Fig. 2.** Temporal evolution of EEG spectral energy in alpha-band (8–12 Hz) (a) and beta-band (15–30 Hz) (б). Different curves obtained by averaging energy values over corresponding EEG channels; brain regions characterizing by a decrease in alpha-band energy (в) and an increase in beta-band energy (г) at time moments  $t_0-t_4$

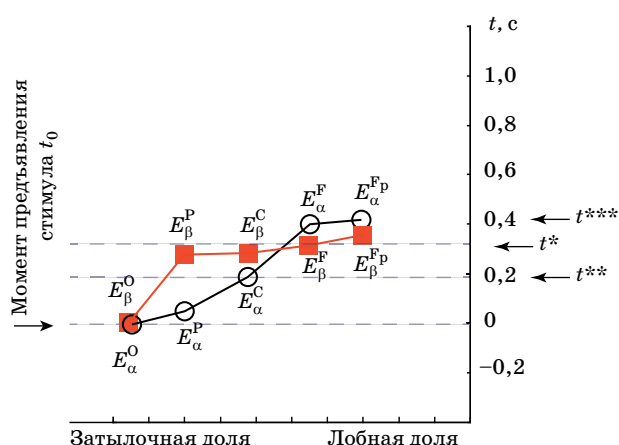
деть, что энергия альфа-ритма  $E_\alpha^C(t)$  начинает уменьшаться в центральной области ( $t_2$ ) и в лобных  $E_\alpha^{F,FP}(t)$  областях ( $t_{3,4}$ ). При этом в данных областях эффект проявляется значительно позже: в центральной части — через 0,2 с, а в лобных областях — через 0,4 с после предъявления визуального стимула.

Восприятие визуального стимула сопровождается увеличением энергии бета-активности (см. рис. 2, б). Учитывая, что бета-активность ассоциируется с обработкой сенсорной информации [17] и переключением режима активности нейронного ансамбля в состояние внимания [19], можно предположить, что увеличение области генерации бета-активности свидетельствует о вовлечении большего числа нейронов в обработку визуального стимула.

Процесс увеличения области коры мозга, вовлеченной в обработку визуального стимула (рис. 2, в, г), основан на изменении энергии элек-

трической активности головного мозга в альфа- и бета-частотных диапазонах. Видно, что в рассмотренные моменты времени  $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$  область коры мозга, демонстрирующая уменьшение энергии альфа-активности и увеличение энергии бета-активности, связанные с обработкой визуального стимула, увеличивается. В то же самое время анализ рис. 2, а, б позволяет выявить различия в динамике энергии рассмотренных ритмов. Данные различия определяются сопоставлением моментов времени, соответствующих вовлечению различных областей мозга в обработку визуальной информации. Схематически данные моменты времени обозначены на рис. 3. Различный тип символа соответствует моментам времени, определенным на основе альфа-активности и бета-активности.

Видно, что в момент времени  $t_0$ , соответствующий предъявлению визуального стимула, наблюдается активация затылочной области. Об этом



■ **Рис. 3.** Моменты времени, соответствующие вовлечению различных отделов мозга в восприятие визуальной информации, установленные в соответствии с характеристиками альфа-активности и бета-активности

■ **Fig. 3.** Time moments corresponding to the involvement of different brain parts in perception of visual information, estimated via characteristics of alpha-activity and beta-activity

свидетельствует одновременное уменьшение  $E_{\alpha}^O$  и увеличение  $E_{\beta}^O$ . Затем, с точки зрения поведения бета-активности, через 0,3 с после предъявления стимула наблюдается одновременное вовлечение затылочной, центральной и лобных областей мозга в обработку информации (момент времени  $t^*$ ). Это свидетельствует о формировании распределенной лобно-теменной нейронной активности, реализующей обработку визуально-го изображения и принятие решения.

Анализ поведения альфа-активности показывает, что вовлечение лобной области происходит постепенно. Видно, что теменная область вовлекается практически одновременно с затылочной. Центральная область вовлекается через 0,2 с после предъявления стимула (момент времени  $t^{**}$ ). Лобные области вовлекаются практически одновременно через 0,4 с после предъявления стимула (момент времени  $t^{***}$ ).

## Заключение

По итогам экспериментов можно выделить следующие особенности сценария нейронной активности во время восприятия и обработки визуальной информации:

— Непосредственно в момент предъявления визуального стимула происходит возбуждение зрительного центра в затылочной области. В этот момент электрическая активность в данной области характеризуется уменьшением альфа-активности и увеличением бета-активности.

— Через 0,3 с после предъявления стимула происходит его обработка с помощью активации распределенной лобно-теменной нейронной сети. В этот момент электрическая активность в данной области характеризуется увеличением бета-активности.

— В течение 0,3 с после предъявления стимула активация нейронов в альфа-диапазоне происходит постепенно. Последовательно вовлекаются нейроны теменной области, а затем центральной.

Полученные результаты представляют интерес для фундаментальной нейронауки и имеют потенциал дальнейшего практического использования. В контексте фундаментальных исследований заслуживает внимания продемонстрированная роль альфа-активности в установлении связи между нейронными ансамблями, расположенными в затылочно-теменной и лобной областях мозга. Потенциал практического применения обусловлен возможностью использовать результаты для мониторинга когнитивной активности человека в процессе обработки сенсорной информации при разработке пассивных интерфейсов мозг-компьютер [24, 25], осуществляющих мониторинг и контроль нейронной активности во время деятельности человека, связанной с высокой когнитивной нагрузкой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-32-20129) и Совета по грантам Президента РФ (проекты НШ-2737.2018.2 и МК-992.2018.2).

## Литература

1. Milton A., Pleydell-Pearce C. W. The phase of pre-stimulus alpha oscillations influences the visual perception of stimulus timing. *Neuroimage*, 2016, vol. 133, pp. 53–61. doi:10.1016/j.neuroimage.2016.02.065
2. Shourie N. Cepstral analysis of EEG during visual perception and mental imagery reveals the influence of artistic expertise. *Journal of Medical Signals and Sensors*, 2016, vol. 6(4), p. 203.
3. Mizuno K., Tanaka M., Yamaguti K., Kajimoto O., Kuratsune H., Watanabe Y. Mental fatigue caused by

- prolonged cognitive load associated with sympathetic hyperactivity. *Behavioral and Brain Functions*, 2011, vol. 7(1), p. 17. doi:10.1186/1744-9081-7-17
4. Tanaka M., Shigihara Y., Ishii A., Funakura M., Kanai E., Watanabe Y. Effect of mental fatigue on the central nervous system: an electroencephalography study. *Behavioral and Brain Functions*, 2012, vol. 8(1), p. 48. doi:10.1186/1744-9081-8-48
5. Dehaene S., Kerszberg M., Changeux J. P. A neuronal model of a global workspace in effortful cognitive tasks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1998, vol. 95(24), pp. 14529–14534. doi:10.1073/pnas.95.24.14529



6. Finc K., Bonna K., Lewandowska M., et al. Transition of the functional brain network related to increasing cognitive demands. *Human Brain Mapping*, 2017, vol. 38(7), pp. 3659–3674. doi:10.1002/hbm.23621
7. Baars B. J. In the theatre of consciousness. Global workspace theory, a rigorous scientific theory of consciousness. *Journal of Consciousness Studies*, 1997, vol. 4(4), pp. 292–309. doi:10.1093/acprof:oso/9780195102659.001.1
8. Maksimenko V. A., Runnova A. E., Frolov N. S., Makarov V. V., Nedaivozov V., Koronovskii A. A., Pisarchik A., Hramov A. E. Multiscale neural connectivity during human sensory processing in the brain. *Physical Review E*, 2018, vol. 97(5), p. 052405. doi:10.1103/PhysRevE.97.052405
9. Guo D., Guo F., Zhang Y., Li F., Xia Y., Xu P., Yao D. Periodic visual stimulation induces resting-state brain network reconfiguration. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2018, vol. 12, p. 21. doi:10.3389/fncom.2018.00021
10. Горшков А. А., Осадчий А. Е., Фрадков А. Л. Регуляризация обратной задачи ЭЭГ/МЭГ локальным кортикальным волновым паттерном. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 5, с. 12–20. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.5.12
11. Руннова А. Е. Математическая модель выделения паттернов сложных многоканальных сигналов в применении к обработке электроэнцефалографических данных. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 4, с. 39–44. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-39-44
12. Максименко В. А., Харченко А. А., Лютъёханн А. Автоматизированная система для предсказания эпилептических приступов по многоканальным записям электрической активности мозга. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 4, с. 115–122. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-115-122
13. Niedermeyer E., Lopes da Silva F.H. (eds.). *Electroencephalography. Basic principles, clinical applications, and related fields*. 5th ed. Lippincott, Williams & Wilkins, 2005. doi:10.1212/01.wnl.0000243257.85592.9a
14. Hramov A. E., Koronovskii A. A., Makarov V. A., Pavlov A. N., Sitnikova E. *Wavelets in Neuroscience*. Springer Heidelberg New York Dordrecht London, 2015. 314 p. doi:10.1007/978-3-662-43850-3
15. Sauseng P., Klimesch W., Stadler W., Schabus M., Doppelmayr S., Hanslmayr W. R., Gruber N., Birbaumer A. A shift of visual spatial attention is selectively associated with human EEG alpha activity. *European Journal of Neuroscience*, 2005, vol. 22(11), pp. 2917–2926. doi:10.1111/j.1460-9568.2005.04482.x
16. Foxe J. J., Snyder A. C. The role of alpha-band brain oscillations as a sensory suppression mechanism during selective attention. *Frontiers in Psychology*, 2011, vol. 2, p. 154. doi:10.3389/fpsyg.2011.00154
17. Sehatpour P., Molholm S., Schwartz T. H., Mahoney J. R., Mehta A. D., Javitt D. C., Stanton P. K., and Foxe J. J. A human intracranial study of long-range oscillatory coherence across a frontal–occipital–hippocampal brain network during visual object processing. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2008, vol. 105(11), pp. 4399–4404. doi:10.1073/pnas.0708418105
18. Wróbel A. Beta activity: a carrier for visual attention. *Acta Neurobiologiae Experimentalis*, 2000, vol. 60(2), pp. 247–260.
19. Gola M., Magnuski M., Szumska I., Wróbel A. EEG beta band activity is related to attention and attentional deficits in the visual performance of elderly subjects. *International Journal of Psychophysiology*, 2013, vol. 89(3), pp. 334–341. doi:10.1016/j.ijpsycho.2013.05.007
20. Michalareas G., Vezoli J., van Pelt S., Schoffelen J. M., Kennedy H., Fries P. Alpha-beta and gamma rhythms subserve feedback and feedforward influences among human visual cortical areas. *Neuron*, 2016, vol. 89(2), pp. 384–397. doi:10.1016/j.neuron.2015.12.018
21. Gleiss S., Kayser C. Acoustic noise improves visual perception and modulates occipital oscillatory states. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 2014, vol. 26(4), pp. 699–711. doi:10.1162/jocn\_a\_00524
22. Mulckhuysen M., Kelley T. A., Theeuwes J., Walsh V., Lavie N. Enhanced visual perception with occipital transcranial magnetic stimulation. *European Journal of Neuroscience*, 2011, vol. 34(8), pp. 1320–1325. doi:10.1111/j.1460-9568.2011.07814.x
23. Laufs H., Holt J. L., Elfont R., Krams M., Paul J. S., Krakow K., Kleinschmidt A. Where the BOLD signal goes when alpha EEG leaves. *Neuroimage*, 2006, vol. 31(4), pp. 1408–1418. doi:10.1016/j.neuroimage.2006.02.002
24. Zander T. O., Kothe C. Towards passive brain–computer interfaces: applying brain–computer interface technology to human–machine systems in general. *Journal of Neural Engineering*, 2011, vol. 8(2), pp. 025005. doi:10.1088/1741-2560/8/2/025005
25. Максименко В. А., Руннова А. Е., Куланин Р. А., Протасов П. А., Журавлев М. О., Чолак П., Писарчик А. Н., Храмов А. Е. Алгоритм для автоматического детектирования особенностей активности мозга во время выполнения когнитивных задач. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 5, с. 104–111. doi:10.31799/1684-8853-2018-5-104-111

UDC 612.822.3, 57.087.1, 51-76

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-58-65

**Mathematical modeling of visual sensory information processing using multi-channel EEG signals**

V. A. Maksimenko<sup>a</sup>, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-4632-6896, maximenkovl@gmail.com

A. K. Kuc<sup>a</sup>, Master Student, orcid.org/0000-0001-6233-2594

A. N. Pisarchik<sup>b</sup>, PhD, Phys.-Math., Professor, orcid.org/0000-0003-2471-2507

A. E. Hramov<sup>a</sup>, Dr. Sc., Phys.-Math., Professor, orcid.org/0000-0003-2787-2530

<sup>a</sup>Yuri Gagarin State Technical University, 77, Politechnicheskaya St., 410054, Saratov, Russian Federation

<sup>b</sup>Universidad Politécnica de Madrid, Calle Ramiro de Maeztú, 7, 28040 Madrid, Spain

**Introduction:** Processes in the brain cortex during the perception and processing of sensory information can now be analyzed using multichannel signals of electrical activity. A special attention is paid to the detection of common scenarios of involving various brain areas in the sensory perception process. **Purpose:** Studying the spatio-temporal and time-frequency structure of brain electrical activity signals during visual sensory information processing. **Results:** Based on time-frequency analysis, we studied the dynamics of electrical neural activity energy in the frequency ranges 8–12 Hz (alpha-activity) and 15–30 Hz (beta-activity) in various brain areas. It was shown that the perception and processing of visual stimulus lead to a lower alpha-activity energy and higher beta-activity energy. These processes are observed in several brain zones. It was revealed that a characteristic pattern emerges in the occipital and parietal lobes, and then involves the neurons of the central and frontal lobes. **Practical relevance:** The revealed neural activity scenario can be used in the development of passive brain-computer interfaces which monitor and control neural activity during the processing of big amounts of sensory information.

**Keywords** — multichannel EEG signals, visual perception, time-frequency analysis, sensory information processing.

**Citation:** Maksimenko V. A., Kuc A. K., Pisarchik A. N., Hramov A. E. Mathematical modeling of visual sensory information processing using multi-channel EEG signals. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 58–65 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-58-65

**References**

- Milton A., Pleydell-Pearce C. W. The phase of pre-stimulus alpha oscillations influences the visual perception of stimulus timing. *Neuroimage*, 2016, vol. 133, pp. 53–61. doi:10.1016/j.neuroimage.2016.02.065
- Shourie N. Cepstral analysis of EEG during visual perception and mental imagery reveals the influence of artistic expertise. *Journal of Medical Signals and Sensors*, 2016, vol. 6(4), p. 203.
- Mizuno K., Tanaka M., Yamaguti K., Kajimoto O., Kuratsune H., Watanabe Y. Mental fatigue caused by prolonged cognitive load associated with sympathetic hyperactivity. *Behavioral and Brain Functions*, 2011, vol. 7(1), p. 17. doi:10.1186/1744-9081-7-17
- Tanaka M., Shigihara Y., Ishii A., Funakura M., Kanai E., Watanabe Y. Effect of mental fatigue on the central nervous system: an electroencephalography study. *Behavioral and Brain Functions*, 2012, vol. 8(1), p. 48. doi:10.1186/1744-9081-8-48
- Dehaene S., Kerszberg M., Changeux J. P. A neuronal model of a global workspace in effortful cognitive tasks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1998, vol. 95(24), pp. 14529–14534. doi:10.1073/pnas.95.24.14529
- Finc K., Bonna K., Lewandowska M., et al. Transition of the functional brain network related to increasing cognitive demands. *Human Brain Mapping*, 2017, vol. 38(7), pp. 3659–3674. doi:10.1002/hbm.23621
- Baars B. J. In the theatre of consciousness. Global workspace theory, a rigorous scientific theory of consciousness. *Journal of Consciousness Studies*, 1997, vol. 4(4), pp. 292–309. doi:10.1093/acprof:oso/9780195102659.001.1
- Maksimenko V. A., Runnova A. E., Frolov N. S., Makarov V. V., Nedaivozov V., Koronovskii A. A., Pisarchik A., Hramov A. E. Multiscale neural connectivity during human sensory processing in the brain. *Physical Review E*, 2018, vol. 97(5), p. 052405. doi:10.1103/PhysRevE.97.052405
- Guo D., Guo F., Zhang Y., Li F., Xia Y., Xu P., Yao D. Periodic visual stimulation induces resting-state brain network reconfiguration. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2018, vol. 12, p. 21. doi:10.3389/fncom.2018.00021
- Gorshkov A. A., Ossadtchi A. E., Fradkov A. L. Regularization of EEG/MEG inverse problem with a local cortical wave pattern. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 5, pp. 12–20 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2017.5.12
- Runnova A. E. Mathematical model of pattern selection for complex multichannel data in EEG processing. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 4, pp. 39–44 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-4-39-44
- Maksimenko V. A., Harchenko A. A., Lüttjohann A. Automated system for epileptic seizures prediction based on multi-channel recordings of electrical brain activity. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 4, pp. 115–122 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-4-115-122
- Niedermeyer E., Lopes da Silva F.H. (eds.). *Electroencephalography. Basic principles, clinical applications, and related fields*. 5th ed. Lippincott, Williams & Wilkins, 2005. doi:10.1212/01.wnl.0000243257.85592.9a
- Hramov A. E., Koronovskii A. A., Makarov V. A., Pavlov A. N., Sitnikova E. *Wavelets in Neuroscience*. Springer Heidelberg New York Dordrecht London, 2015. 314 p. doi:10.1007/978-3-662-43850-3
- Sauseng P., Klimesch W., Stadler W., Schabus M., Doppelmayr S., Hanslmayr W. R., Gruber N., Birbaumer A. A shift of visual spatial attention is selectively associated with human EEG alpha activity. *European Journal of Neuroscience*, 2005, vol. 22(11), pp. 2917–2926. doi:10.1111/j.1460-9568.2005.04482.x
- Foxe J. J., Snyder A. C. The role of alpha-band brain oscillations as a sensory suppression mechanism during selective attention. *Frontiers in Psychology*, 2011, vol. 2, p. 154. doi:10.3389/fpsyg.2011.00154
- Sehatpour P., Molholm S., Schwartz T. H., Mahoney J. R., Mehta A. D., Javitt D. C., Stanton P. K., and Foxe J. J. A human intracranial study of long-range oscillatory coherence across a frontal-occipital-hippocampal brain network during visual object processing. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2008, vol. 105(11), pp. 4399–4404. doi:10.1073/pnas.0708418105
- Wróbel A. Beta activity: a carrier for visual attention. *Acta Neurobiologiae Experimentalis*, 2000, vol. 60(2), pp. 247–260.
- Gola M., Magnuski M., Szumska I., Wróbel A. EEG beta band activity is related to attention and attentional deficits in the visual performance of elderly subjects. *International Journal of Psychophysiology*, 2013, vol. 89(3), pp. 334–341. doi:10.1016/j.ijpsycho.2013.05.007

20. Michalareas G., Vezoli J., van Pelt S., Schoffelen J. M., Kennedy H., Fries P. Alpha-beta and gamma rhythms subserve feedback and feedforward influences among human visual cortical areas. *Neuron*, 2016, vol. 89(2), pp. 384–397. doi:10.1016/j.neuron.2015.12.018
21. Gleiss S., Kayser C. Acoustic noise improves visual perception and modulates occipital oscillatory states. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 2014, vol. 26(4), pp. 699–711. doi:10.1162/jocn\_a\_00524
22. Mulckhuysse M., Kelley T. A., Theeuwes J., Walsh V., Lavie N. Enhanced visual perception with occipital transcranial magnetic stimulation. *European Journal of Neuroscience*, 2011, vol. 34(8), pp. 1320–1325. doi:10.1111/j.1460-9568.2011.07814.x
23. Laufs H., Holt J. L., Elfont R., Krams M., Paul J. S., Krakow K., Kleinschmidt A. Where the BOLD signal goes when alpha EEG leaves. *Neuroimage*, 2006, vol. 31(4), pp. 1408–1418. doi:10.1016/j.neuroimage.2006.02.002
24. Zander T. O., Kothe C. Towards passive brain–computer interfaces: applying brain–computer interface technology to human–machine systems in general. *Journal of Neural Engineering*, 2011, vol. 8(2), pp. 025005. doi:10.1088/1741-2560/8/2/025005
25. Maksimenko V. A., Runnova A. E., Kulanin R. A., Protasov P. A., Zhuravlev M. O., Chholak P., Pisarchik A., Hramov A. E. Algorithm for automatic estimation of human brain activity features during mental task evaluation. *Informatsionno-upravlyaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 5, pp. 104–111 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-5-104-111

**Научный журнал  
«ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ»  
выходит каждые два месяца.**

Стоимость годовой подписки (6 номеров) для подписчиков России — 6000 рублей, для подписчиков стран СНГ — 6600 рублей, включая НДС 18%, таможенные и почтовые расходы.

Подписку на печатную версию журнала можно оформить в любом отделении связи по каталогу:

«Роспечать»: № 15385 — полугодовой индекс, а также через посредство подписных агентств:

«Северо-Западное агентство „Прессинформ“»  
Санкт-Петербург, тел.: (812) 335-97-51, 337-23-05,  
эл. почта: press@crp.spb.ru, zajavka@crp.spb.ru,  
сайт: <http://www.pinform.spb.ru>

«МК-Периодика» (РФ + 90 стран)

Москва, тел.: (495) 681-91-37, 681-87-47,  
эл. почта: export@periodicals.ru, сайт: <http://www.periodicals.ru>

«Деловая пресса»

Москва, тел.: (495) 962-11-11, эл. почта: podpiska@delpress.ru,  
сайт: <http://delpress.ru/contacts.html>

«Коммерсант-Курьер»

Казань, тел.: (843) 291-09-99, 291-09-47, эл. почта: kazan@komcur.ru,  
сайт: <http://www.komcur.ru/contacts/kazan/>

«Урал-Пресс» (филиалы в 40 городах РФ)

Сайт: <http://www.ural-press.ru>

«Идея» (Украина)

Сайт: <http://idea.com.ua>

«ВТЛ» (Узбекистан)

Сайт: <http://btl.sk.uz/ru/cat17.html> и др.

На электронную версию нашего журнала (все выпуски, годовая подписка, один выпуск, одна статья) вы можете подписаться на сайтах НЭБ: <http://elibrary.ru>; РУКОНТ: <http://www.rucont.ru>; ИВИС: <http://www.ivis.ru>; Некс-Медиа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=news&id=11196>

Полнотекстовые версии журнала за 2002–2017 гг.

в свободном доступе на сайте журнала (<http://www.i-us.ru>),

НЭБ (<http://www.elibrary.ru>)

и Киберленинки (<http://cyberleninka.ru/journal/n/informatsionno-upravlyayuschiesistemy>).

## Программно-алгоритмическая система для численного моделирования широкополосного лазерного газоанализа атмосферы

С. А. Садовников<sup>а</sup>, аспирант, младший научный сотрудник, [orcid.org/0000-0002-3082-3521](https://orcid.org/0000-0002-3082-3521), [sadsa@iao.ru](mailto:sadsa@iao.ru)  
<sup>а</sup>Институт оптики атмосферы им. В. Е. Зуева СО РАН, пл. Академика Зуева, 1, Томск, 634055, РФ

**Введение:** актуальной исследовательской задачей является разработка гибких программно-алгоритмических комплексов с возможностью эволюционного развития расчетного функционала для успешного решения проблем оперативного и качественного контроля параметров окружающей среды. **Цель:** разработка модульной системы численного моделирования лазерного газоанализа атмосферы. **Результаты:** на основе математического аппарата метода дифференциального поглощения разработана программно-алгоритмическая система, обеспечивающая расчет сечений молекулярного поглощения, коэффициентов молекулярного поглощения, спектров пропускания атмосферы и лидарных сигналов. Расчет контуров линий поглощения производится с использованием контура Фойгта. В качестве источников априорной информации используются базы спектроскопических данных HITRAN и статистические модели распределения температуры, давления и газовых компонент атмосферы. Вместе с тем для моделирования лидарных сигналов разработаны программные блоки расчета и учета коэффициента молекулярного рассеяния и коэффициентов аэрозольного поглощения и рассеяния. Для проверки применимости различных лазерных источников в задачах экологического мониторинга атмосферы разработан блок расчета ошибок восстановления концентраций исследуемых газовых компонент атмосферы при неучете поглощения лазерного излучения сторонними газами. В целях проверки корректности функционирования программного комплекса разработан программный блок сравнения результатов моделирования спектров поглощения и пропускания атмосферы с применением общепринятой информационной системы SPECTRA. Величина несовпадения результатов расчета спектров пропускания атмосферы, полученных с использованием программно-алгоритмической системы, при сравнении с результатами SPECTRA составляет менее 1 %. Таким образом, набор представленных программных блоков позволяет осуществлять комплексное моделирование дистанционного газоанализа атмосферы. **Практическая значимость:** программно-алгоритмический комплекс позволяет производить экспресс-оценку возможностей применения широкого круга источников лазерного излучения в задачах дистанционного газоанализа атмосферы.

**Ключевые слова** – атмосфера, лидарное зондирование, метод дифференциального поглощения, газовые составляющие атмосферы.

**Цитирование:** Садовников С. А. Программно-алгоритмическая система для численного моделирования широкополосного лазерного газоанализа атмосферы. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 66–73. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-66-73  
**Citation:** Sadovnikov S. A. Software system for numerical simulation of broadband laser gas analysis of the atmosphere. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 66–73 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-66-73

### Введение

В то время как прямое управление процессами глобальных масштабов на сегодня неподвластно человечеству, антропогенные факторы, побуждающие те или иные пагубные тренды, подвержены прямому контролю и минимизации при обнаружении непосредственной связи с динамикой неблагоприятных изменений.

Очевидно, что обнаружение подобных связей возможно лишь в случае применения передовых решений в области контроля параметров окружающей среды, отвечающих жестким требованиям качества, оперативности получения-обработки и информативности результатов.

Так, с развитием техники и технологий, наряду с такими устоявшимися подходами в газоанализе атмосферы, как метод дифференциального поглощения (МДП) [1] и дифференциальная оптическая абсорбционная спектроскопия (ДОАС)

[2], все чаще возникают идеи конвергенции нескольких концепций. В результате предлагаются взаимодополняющие методики (например, МДП–ДОАС [3]), решающие традиционные сложности исходных подходов.

С точки зрения дистанционного газоанализа атмосферы особое внимание сегодня уделяется ближнему и среднему ИК-диапазнам спектра ввиду расположения в них большого числа колебательных и колебательно-вращательных линий поглощения ароматических веществ [4], вредных выбросов промышленных производств [5], парниковых газов [6], а также наркотических веществ [7].

Большой интерес к указанному диапазону спектра подкрепляется как значимыми успехами в синтезе новых нелинейных кристаллов [8] и построении лазерных систем на их основе с возможностью плавной перестройки длины волны выходного излучения [9], так и существенным прогрессом в развитии фотоприемных устройств [10].

Вместе с тем бурное развитие языков программирования, рост возможностей современной вычислительной техники и плоды развития концепции свободного программного обеспечения [11] предоставляют новые инструменты для повышения производительности систем научного моделирования.

Целью работы являются разработка и апробация в численном эксперименте программно-алгоритмической системы для численного моделирования лазерного газоанализа атмосферы в ближнем и среднем ИК-диапазонах спектра.

### Математический аппарат и алгоритм моделирования спектров поглощения и пропускания атмосферы

Расчет спектров поглощения и пропускания атмосферы, а также сопутствующих функций проводится с использованием общепринятого подхода «линия-за-линией», который состоит в пошаговом расчете и учете вклада каждой линии поглощения газовых составляющих атмосферы в итоговый спектр. Эмпирической и теоретико-эмпирической опорой процесса моделирования спектров является база спектроскопических данных HITRAN [12], содержащая информацию о параметрах линий поглощения различных газов. В процессе моделирования спектров поглощения и пропускания атмосферы необходимо учитывать влияние внешних факторов различного рода.

Так, ввиду теплового движения молекул газовых компонент атмосферы возникает эффект уширения спектральных линий — эффект Доплера, при этом расчет полуширины контура производится следующим образом [13]:

$$\gamma_D(T) = \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{2RT \ln 2}{M}},$$

$$v_0 = v_{\text{line}} + \delta(p_{\text{ref}})p, \quad (1)$$

где  $v_{\text{line}}$  — центр линии поглощения газовой компоненты, а  $\delta(p_{\text{ref}})p$  — величина сдвига центра линии поглощения, обусловленная давлением окружающей среды [12].

В свою очередь эффекты столкновения также приводят к уширению линий поглощения и описываются функцией Лоренца, при этом лоренцевская полуширина, с учетом влияния температуры и давления, представляется в следующем виде [14]:

$$\gamma_L(p_{\text{GAS}}, T) = \left(\frac{T_{\text{ref}}}{T}\right)^{n_{\text{air}}} \times$$

$$\times \left( \gamma_{\text{air(ref)}} \frac{(p - p_{\text{GAS}})}{p_{\text{ref}}} + \gamma_{\text{self(ref)}} \frac{p_{\text{GAS}}}{p_{\text{ref}}} \right), \quad (2)$$

где  $p_{\text{GAS}}$  — парциальное давление газа;  $p_{\text{ref}} = 1$  атм;  $T_{\text{ref}} = 296$  К;  $n_{\text{air}}$  — коэффициент температурной зависимости уширения полуширины воздухом;  $\gamma_{\text{air(ref)}}$  — уширение полуширины воздухом при  $p = p_{\text{ref}}$  и  $T = T_{\text{ref}}$ ;  $\gamma_{\text{self(ref)}}$  — самоуширение полуширины при  $p = p_{\text{ref}}$  и  $T = T_{\text{ref}}$  [14, 15].

Вместе с тем необходимо производить температурную коррекцию интенсивностей линий поглощения [15]:

$$S(T) = S(T_{\text{ref}}) \frac{Q(T_{\text{ref}}) \exp(-c_2 E_L / T)}{Q(T) \exp(-c_2 E_L / T_{\text{ref}})} \times$$

$$\times \frac{[1 - \exp(-c_2 v / T)]}{[1 - \exp(-c_2 v / T_{\text{ref}})]},$$

$$c_2 = hc/k_B, \quad (3)$$

где  $S(T_{\text{ref}})$  — интенсивность линии при 296 К;  $Q(T)$  — общая внутренняя частичная функция;  $c_2$  — вторая радиационная постоянная;  $E_L$  — энергия нижнего состояния [14, 15].

Опираясь на приведенные параметры спектральных линий, возможно провести численное моделирование спектров поглощения и пропускания атмосферы. Так, профиль объемного коэффициента ослабления лазерного излучения за счет молекулярного поглощения можно представить в следующем виде [16, 17]:

$$\alpha_{\text{ma}}(v, R) = n(R)K_{\text{Voigt}}(v, R), \quad (4)$$

где  $n(R)$  — концентрация газовой компоненты;  $K_{\text{Voigt}}(v, R)$  — профиль коэффициента поглощения зондирующего лазерного излучения молекулами исследуемого газа [17, 18]:

$$K_{\text{Voigt}}(v, R) = \frac{S(T)}{\gamma_D(T)} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \varphi(x, y),$$

$$\varphi(x, y) = \Re\{w(z)\}, \quad (5)$$

где  $\varphi(x, y)$  — функция Фойгта, обеспечивающая учет эффекта уширения спектральных линий Доплера и столкновений одновременно.

Функцию Фойгта возможно получить путем выделения вещественной части комплексной функции [18]:

$$w(z) = \exp(-z^2) \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(t^2) dt \right),$$

$$z = x + iy,$$

$$x = \frac{|v - v_0|}{\gamma_D} \sqrt{\ln 2},$$

$$y = \frac{\gamma_L}{\gamma_D} \sqrt{\ln 2}. \quad (6)$$

Вместе с тем спектр пропускания атмосферы возможно получить следующим образом [17]:

$$T(\nu, R) = \exp\left(-2 \int_0^R \alpha(\nu, R) dR\right),$$

$$\alpha(\nu, R) = \alpha_{ma}(\nu, R) + \alpha_{ms}(\nu, R) + \alpha_{aa}(\nu, R) + \alpha_{as}(\nu, R), \quad (7)$$

где  $\alpha_{ms}(\nu, R)$  — профиль объемного коэффициента ослабления лазерного излучения за счет молекулярного рассеяния;  $\alpha_{aa}(\nu, R)$  и  $\alpha_{as}(\nu, R)$  — профили коэффициентов ослабления, обусловленных поглощением и рассеянием атмосферными аэрозолями.

На основе представленного математического аппарата разработаны алгоритм функционирования и программно-алгоритмическая система для численного моделирования широкополосного лазерного газоанализа атмосферы.

### Функциональные возможности программно-алгоритмической системы

Процесс функционирования программы можно разделить на три основных этапа, представленных в виде столбцов на рис. 1: 1) выбор и подготовка входных параметров; 2) численное моделирование; 3) представление и сохранение результатов расчета.

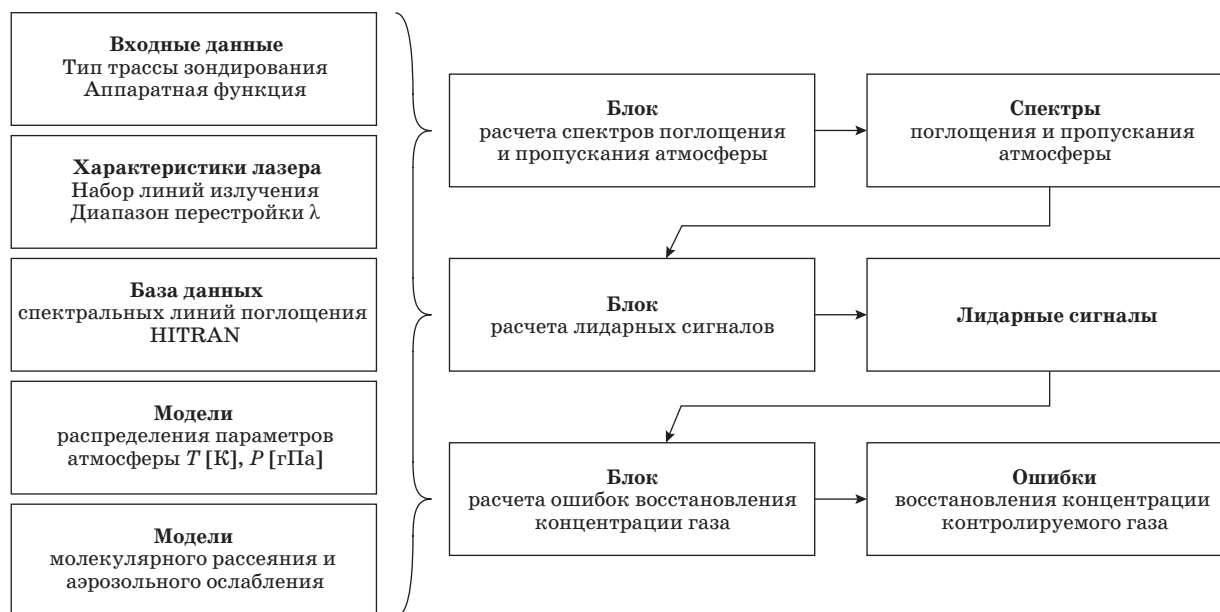
В качестве входных данных выступают параметры трассы зондирования, тип трассы (горизонтальная, вертикальная), характеристики источ-

ника излучения (набор линий излучения, диапазон перестройки, ширина линии излучения, мощность) и приемной части прибора.

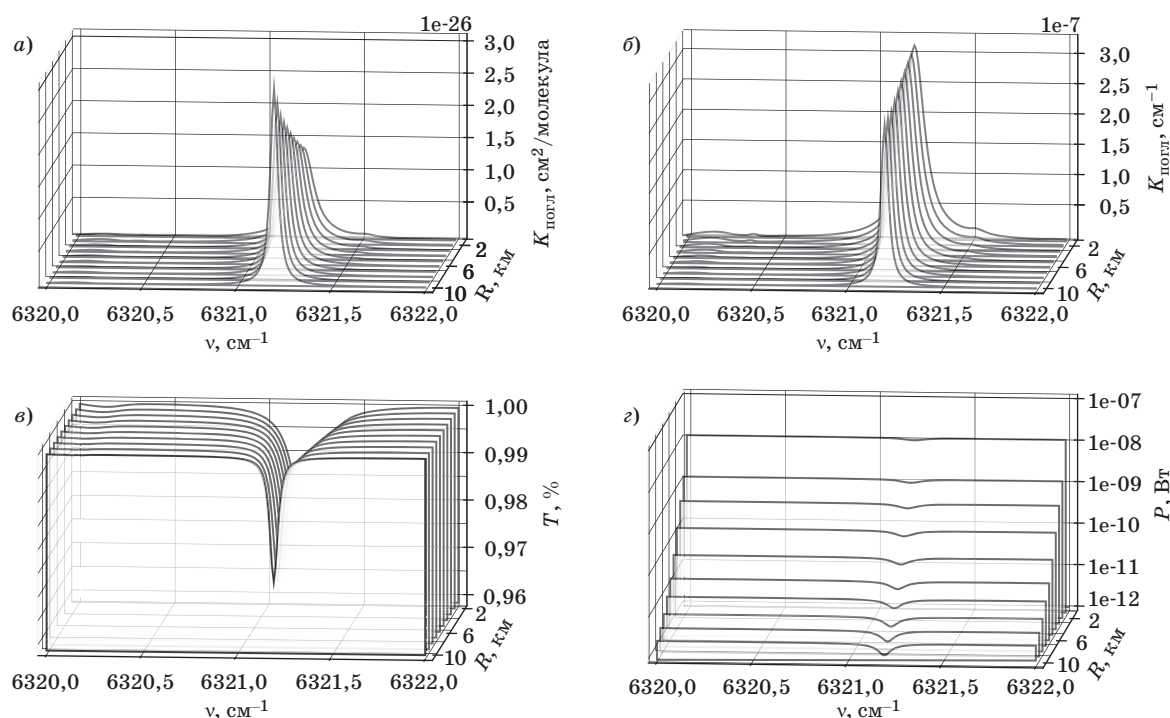
В список основных функциональных возможностей программно-алгоритмической системы входит расчет сечения молекулярного поглощения, коэффициента молекулярного поглощения (рис. 2, а и б), спектров пропускания атмосферы (рис. 2, в) на основе базы данных HITRAN [12] и статистических моделей распределения атмосферных характеристик [19]. Вместе с тем автором разработан программный блок моделирования лидарных сигналов (рис. 2, г), в процессе функционирования которого производятся расчет и учет коэффициента молекулярного рассеяния (рис. 3, а) [20] и коэффициентов аэрозольного поглощения (рис. 3, б) и рассеяния [21] соответственно.

Необходимо отметить, что при расчете указанных спектров предусмотрена возможность выбора различных аппаратных функций: прямоугольника, треугольника, Гаусса, Лоренца и др. [22]. При этом, как отмечалось ранее, расчет контуров линий поглощения производится с использованием контура Фойгта [18].

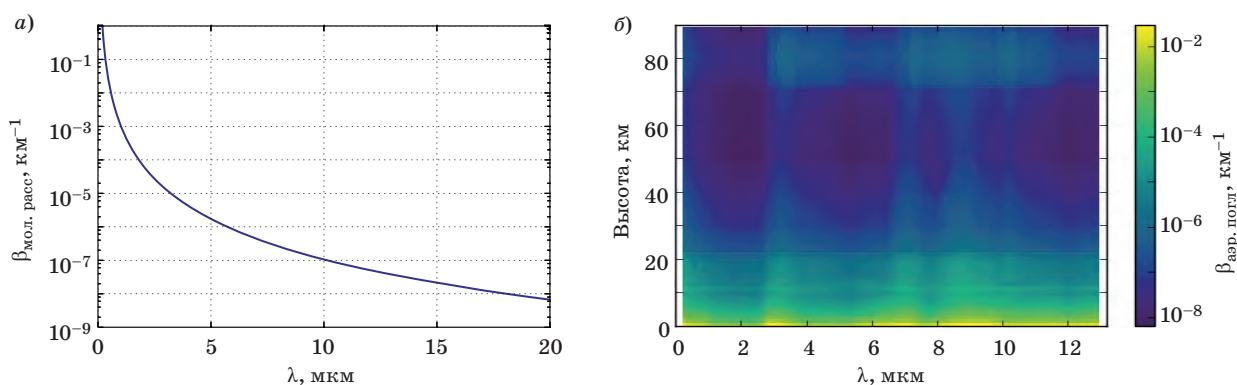
Для целей проверки применимости различных лазерных источников в задачах экологического мониторинга атмосферы разработан блок расчета ошибок восстановления концентраций исследуемых газовых компонент атмосферы при неучете поглощения лазерного излучения сторонними газами. В результате набор представленных программных блоков позволяет производить комплексное моделирование дистанционного газоанализа атмосферы.



■ Рис. 1. Общая схема функционирования программно-алгоритмической системы  
 ■ Fig. 1. General scheme of the program-algorithmic system functioning



■ **Рис. 2.** Спектры поглощения атмосферы (а, б), спектр пропускания атмосферы (в) и лидарные сигналы (г)  
 ■ **Fig. 2.** Atmospheric absorption spectra (а, б), atmospheric transmission spectrum (в) and lidar signals (г)



■ **Рис. 3.** Зависимости коэффициентов молекулярного рассеяния (а) и аэрозольного поглощения (б) от длины волны  
 ■ **Fig. 3.** Molecular scattering (а) and aerosol absorption coefficients (б) versus wavelength

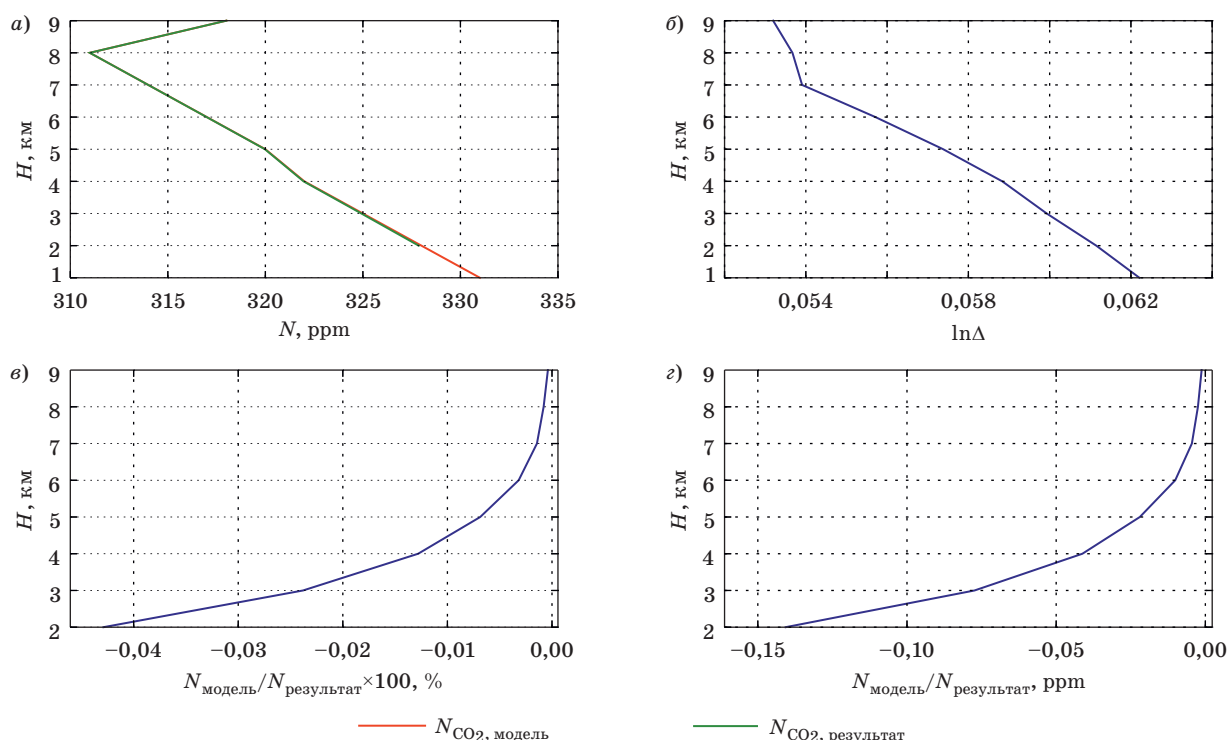
Результаты численного эксперимента по восстановлению концентрации углекислого газа на вертикальной трассе лета средних широт [19] приведены на рис. 4, где показан пример восстановления концентрации исследуемой газовой компоненты ( $\text{CO}_2$ ) и результат расчета ошибки, возникающей ввиду неучета влияния слабой линии поглощения водяного пара (рис. 2, б —  $6321,55 \text{ см}^{-1}$ ), расположенной неподалеку от анализируемой линии поглощения углекислого газа (рис. 2, б —  $6321,25 \text{ см}^{-1}$ ).

Концентрация водяного пара снижается с увеличением высоты, ввиду этого представленная на рис. 4 ошибка влияния мешающего поглощения

уменьшается с высотой. Очевидно, при учете влияния всех факторов, вызывающих ошибки восстановления концентраций газов, будет наблюдаться рост величины ошибки с высотой.

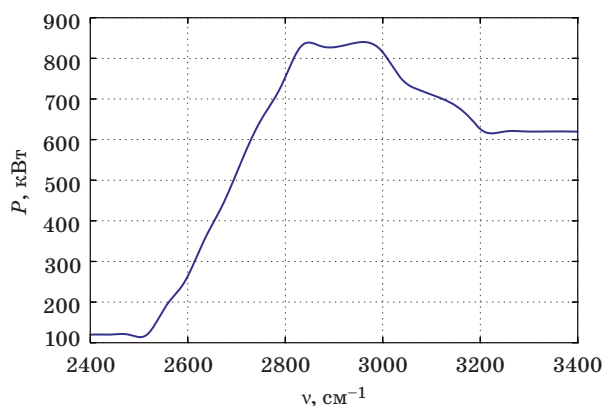
Для случая применения расчетов в приложении к дискретно и плавно перестраиваемым по частоте источникам лазерного излучения предусмотрена возможность использования линейно и кубически интерполируемых зависимостей мощности лазерных импульсов от длины волны или волнового числа (рис. 5).

Вместе с тем представленная на всех рисунках графика является интерактивной, что суще-



■ **Рис. 4.** Результаты численного эксперимента по восстановлению концентрации углекислого газа: *a* — модельная и восстановленная зависимости концентраций CO<sub>2</sub> вдоль трассы зондирования; *б* — разность логарифмов величин лидарных сигналов [16]; *в, з* — ошибка восстановления концентрации CO<sub>2</sub> в процентах и в ppm соответственно

■ **Fig. 4.** The results of a numerical experiment to reconstructing the concentration of carbon dioxide: *a* — model and reconstructed dependences of CO<sub>2</sub> concentrations along the sounding path; *б* — the difference between the logarithms of the lidar signals [16]; *в, з* — error of CO<sub>2</sub> concentration reconstructing in percent and ppm, respectively



■ **Рис. 5.** Кубически интерполированная перестроенная кривая лазера с параметрической генерацией света в среднем ИК-диапазоне спектра

■ **Fig. 5.** A cubic interpolated tuning curve of a laser with parametric light generation in the middle IR range of the spectrum

ственно упрощает процесс анализа результатов моделирования и способствует увеличению производительности работы оператора.

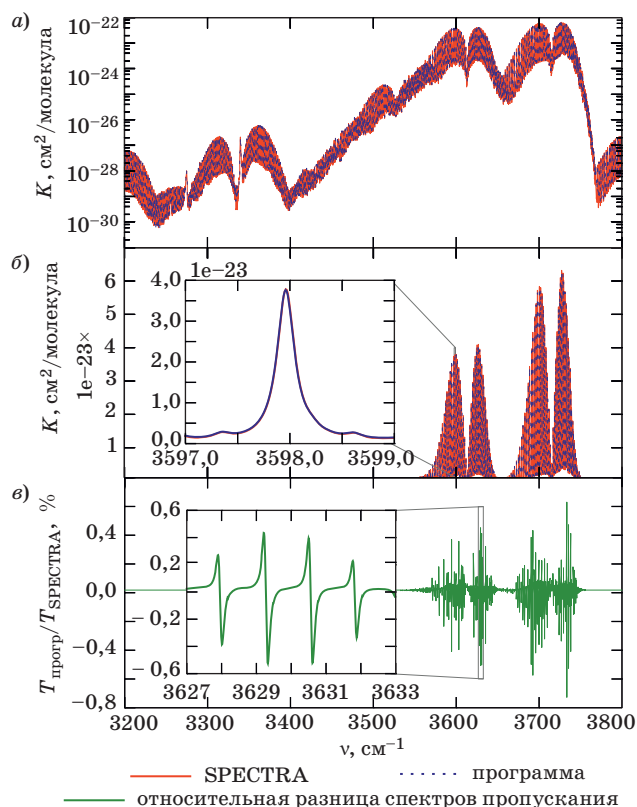
Наряду с представленными возможностями, интуитивная архитектура и модульная органи-

зация программного комплекса предоставляют возможность расширять существующий расчетный функционал для решения смежных задач.

### Результаты моделирования

Проверка корректности функционирования программного комплекса проводилась путем сравнения результатов моделирования спектров с применением информационной системы SPECTRA [23]. Сравнивались результаты моделирования спектров поглощения и пропускания атмосферы в условиях лета средних широт. Рис. 6, *a* показывает качественное совпадение хода коэффициента поглощения в области как слабых, так и сильных линий поглощения. На рис. 6, *б* для наглядности приведена увеличенная часть спектра, а именно одна из линий поглощения CO<sub>2</sub>. При рассмотрении данной линии видно, что величина коэффициентов поглощения совпадает, однако положения центров линий имеют небольшое расхождение. Из анализа кривой относительной разницы между спектрами пропускания CO<sub>2</sub> на рис. 6, *в* можно сделать вывод о том, что итоговая величина несовпадения результатов расчета составляет менее 1 %.





■ **Рис. 6.** Результаты расчета спектров поглощения (а, б) и спектров пропускания (в)  $\text{CO}_2$   
 ■ **Fig. 6.** Calculation results for absorption spectra (a, б) and transmission spectra (в) of  $\text{CO}_2$

### Литература

1. Schotland R. M. Some observations of the vertical profile of water vapor by a laser optical radar. *Proc. Fourth Symposium on Remote Sensing of the Environment*, Ann Arbor, Michigan, 1966, pp. 273–283.
2. Lampel J., Zielcke J., Schmitt S., Pöhler D., Frieß U., Platt U., Wagner T. Detection of  $\text{O}_4$  absorption around 328 and 419 nm in measured atmospheric absorption spectra. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 1671–1683. doi:10.5194/acp-18-1671-2018
3. Романовский О. А., Суханов А. Я., Харченко О. В., Яковлев С. В., Садовников С. А. Моделирование дистанционного газоанализа атмосферы лазерной системой на основе параметрического генератора света. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 5, с. 71–79. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.5.71
4. Sandford S. A., Bernstein M. P., Materese C. K. The infrared spectra of polycyclic aromatic hydrocarbons with excess peripheral H atoms (Hn-PAHs) and their relation to the 3.4 and 6.9  $\mu\text{m}$  PAH emission features. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2013, vol. 205, no. 1, pp. 1–30. doi:10.1088/0067-0049/205/1/8

В целом реализованный на данный момент функционал программно-алгоритмического комплекса позволяет производить экспресс-оценку возможностей применения широкого круга источников лазерного излучения в задачах дистанционного газоанализа атмосферы.

### Заключение

Разработана автоматизированная программно-алгоритмическая система, обеспечивающая расчет коэффициентов поглощения, спектров пропускания атмосферы, лидарных сигналов, а также ошибок восстановления концентраций газовых компонент атмосферы. Анализ результатов сравнения спектров, полученных в программе, с данными расчета общеизвестной информационной системы SPECTRA показал возможность использования разработанного программного комплекса в задачах моделирования дистанционного газоанализа атмосферы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-45-700722 в части разработки блока расчета спектров пропускания атмосферы) и гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (грант № МК-1367.2017.5 в части разработки блока моделирования лидарных сигналов).

5. Lambert-Girard S., Allard M., Piché M., Babin F. Differential optical absorption spectroscopy lidar for mid-infrared gaseous measurements. *Applied Optics*, 2015, vol. 54, no. 7, pp. 1647–1656. doi:10.1364/AO.54.001647
6. Griffith D. W. T., Pohler D., Schmitt S., Hammer S., Vardag S. N., Platt U. Long open-path measurements of greenhouse gases in air using near-infrared fourier transform spectroscopy. *Atmospheric Measurement Techniques*, 2018, vol. 11, iss. 3, pp. 1549–1563. doi:10.5194/amt-11-1549-2018
7. Айрапетян В. С., Маганакова Т. В. Расчет концентрации наркотических веществ методом дифференциального поглощения и рассеяния. *СибОптика-2015: сб. материалов Междунар. науч. конф.*, Новосибирск, 13–25 апреля 2015 г., Новосибирск, 2015, т. 1, с. 141–147.
8. Guo J., Xie J.-J., Li D.-J., Yang G.-L., Chen F., Wang C.-R., Zhang L.-M., Andreev Y. M., Kokh K. A., Lanski G. V., Svetlichnyi V. A. Doped GaSe crystals for laser frequency conversion. *Light: Science & Applications*, 2015, vol. 4, iss. 12, pp. 1–12. doi:10.1038/lssa.2015.135
9. Колкер Д. Б., Шерстов И. В., Костюкова Н. Ю., Бойко А. А., Зенов К. Г., Пустовалова Р. В. Комбинированный параметрический генератор света

- с непрерывной перестройкой длины волны излучения в спектральном диапазоне 2.5–10.8 мкм. *Квантовая электроника*, 2017, т. 47, № 1, с. 14–19.
10. Демьяненко М. А., Козлов А. И., Овсяк В. Н. Аналитическое сравнение характеристик фотоприемников инфракрасного диапазона на основе фотодиодов HgCdTe и фотодетекторов GaAs/AlGaAs с квантовыми ямами. *Оптический журнал*, 2016, т. 83, № 9, с. 64–71.
  11. Bressert E. *Scipy and Numpy: an Overview for Developers*. O'Reilly Media, 2012. 67 p.
  12. Gordon I. E., Rothman L. S., Hill C., Kochanov R. V., Tan Y., Bernath P. F., Birk M., Boudon V., Campargue A., Chance K. V., Drouin B. J., Flaud J.-M., Gamache R. R., Hodges J. T., Jacquemart D., Perevalov V. I., Perrin A., Shine K. P., Smith M.-A. H., Tennyson J., Toon G. C., Tran H., Tyuterev V. G., Barbe A., Császár A. G., Devi V. M., Furtenbacher T., Harrison J. J., Hartmann J.-M., Jolly A., Johnson T. J., Karman T., Kleiner I., Kyuberis A. A., Loos J., Lyulin O. M., Massie S. T., Mikhailenko S. N., Moazzen-Ahmadi N., Müller H. S. P., Naumenko O. V., Nikitin A. V., Polyansky O. L., Rey M., Rotger M., Sharpe S. W., Sung K., Starikova E., Tashkun S. A., Vander Auwera J., Wagner G., Wilzewski J., Wcislo P., Yu S., Zak E. J. The HITRAN2016 molecular spectroscopic database. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2017, vol. 203, pp. 3–69. doi:10.1016/j.jqsrt.2017.06.038
  13. Зуев В. Е., Макушкин Ю. С., Пономарев Ю. Н. *Спектроскопия атмосферы*. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 248 с.
  14. Edwards D. P. *GENLN2: A general line-by-line atmospheric transmittance and radiance model*. NCAR Technical Note, 1992. 147 p. doi:10.5065/D6W37T86
  15. Бобровников С. М., Матвиенко Г. Г., Романовский О. А., Сериков И. Б., Суханов А. Я. *Лидарный спектроскопический газоанализ атмосферы*. Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2014. 508 с.
  16. Hinkley E. D. *Laser Monitoring of the Atmosphere*. Springer-Verlag, 1976. 396 p.
  17. Романовский О. А., Харченко О. В., Яковлев С. В. Методические аспекты лидарного зондирования малых газовых составляющих атмосферы по методу дифференциального поглощения. *Журнал прикладной спектроскопии*, 2012, т. 79, № 5, с. 799–805.
  18. Terlouw J. P., Vogelaar M. G. R., Breddels M. A. *Kapteyn documentation*. <https://media.readthedocs.org/pdf/kapteyn/latest/kapteyn.pdf> (дата обращения: 27.09.2018).
  19. Зуев В. Е., Комаров В. С. Статистические модели температуры и газовых компонент атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 264 с.
  20. Penndorf R. Tables of the refractive index for standard air and the rayleigh scattering coefficient for the spectral region between 0.2 and 20.0  $\mu$  and their application to atmospheric optics. *Journal of the Optical Society of America*, 1957, vol. 47, iss. 2, pp. 176–182. doi:10.1364/JOSA.47.000176
  21. Креков Г. М., Рахимов Р. Ф. *Оптико-локационная модель континентального аэрозоля*. Новосибирск: Наука, 1982. 199 с.
  22. Kochanov R. V., Gordon I. E., Rothman L. S., Wcislo P., Hill C., Wilzewski J. S. HITRAN Application Programming Interface (HAPI): A comprehensive approach to working with spectroscopic data. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2016, vol. 177, pp. 15–30. doi:10.1016/j.jqsrt.2016.03.005
  23. Михайленко С. Н., Бабинов Ю. Л., Головкин В. Ф. Информационно-вычислительная система «Спектроскопия атмосферных газов». Структура и основные функции. *Оптика атмосферы и океана*, 2005, т. 18, № 09, с. 765–776.

UDC 004.422.81; 551.510.412

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-66-73

#### Software system for numerical simulation of broadband laser gas analysis of the atmosphere

S. A. Sadovnikov<sup>a</sup>, Post-Graduate Student, Junior Researcher, orcid.org/0000-0002-3082-3521, sadsa@iao.ru

<sup>a</sup>V. E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS, 1, Academician Zuev Sq., 634021, Tomsk, Russian Federation

**Introduction:** Successful monitoring of environmental parameters requires the development of flexible software complexes with evolvable calculation functionality. **Purpose:** Developing a modular system for numerical simulation of atmospheric laser gas analysis. **Results:** Based on differential absorption method, a software system has been developed which provides the calculation of molecular absorption cross-sections, molecular absorption coefficients, atmospheric transmission spectra, and lidar signals. Absorption line contours are calculated using the Voigt profile. The prior information sources are HITRAN spectroscopic databases and statistical models of the distribution of temperature, pressure and gas components in the atmosphere. For modeling lidar signals, software blocks of calculating the molecular scattering coefficient and aerosol absorption/scattering coefficients were developed. For testing the applicability of various laser sources in the problems of environmental monitoring of the atmosphere, a concentration reconstruction error calculation block was developed for the atmospheric gas components, ignoring the interfering absorption of laser radiation by foreign gases. To verify the correct functioning of the software, a program block was developed for comparing the results of the modeling of atmospheric absorption and transmission spectra by using the standard SPECTRA information system. The discrepancy between the calculation of the atmospheric transmission spectra obtained using the developed system as compared to the SPECTRA results is less than 1%. Thus, a set of the presented program blocks allows you to carry out complex modeling of remote atmospheric gas analysis. **Practical relevance:** The software complex allows you to rapidly assess the possibilities of using a wide range of laser radiation sources for the problems of remote gas analysis.

**Keywords** — atmosphere, lidar sounding, differential absorption lidar technique, atmospheric trace gas.

**Citation:** Sadovnikov S. A. Software system for numerical simulation of broadband laser gas analysis of the atmosphere. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 66–73 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-66-73

## References

1. Schotland R. M. Some observations of the vertical profile of water vapor by a laser optical radar. *Proc. Fourth Symposium on Remote Sensing of the Environment*, Ann Arbor, Michigan, 1966, pp. 273–283.
2. Lampel J., Zielcke J., Schmitt S., Pöhler D., Frieß U., Platt U., Wagner T. Detection of O<sub>4</sub> absorption around 328 and 419 nm in measured atmospheric absorption spectra. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 2018, vol. 18, iss. 3, pp. 1671–1683. doi:10.5194/acp-18-1671-2018
3. Romanovskii O. A., Sukhanov A. Y., Kharchenko O. V., Yakovlev S. V., Sadovnikov S. A. Simulation of remote atmospheric sensing by a laser system based on optical parametric oscillator. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 5, pp. 71–79 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2017.5.71
4. Sandford S. A., Bernstein M. P., Materese C. K. The infrared spectra of polycyclic aromatic hydrocarbons with excess peripheral H atoms (Hn-PAHs) and their relation to the 3.4 and 6.9 μm PAH emission features. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 2013, vol. 205, no. 1, pp. 1–30. doi:10.1088/0067-0049/205/1/8
5. Lambert-Girard S., Allard M., Piché M., Babin F. Differential optical absorption spectroscopy lidar for mid-infrared gaseous measurements. *Applied Optics*, 2015, vol. 54, no. 7, pp. 1647–1656. doi:10.1364/AO.54.001647
6. Griffith D. W. T., Pöhler D., Schmitt S., Hammer S., Vardag S. N., Platt U. Long open-path measurements of greenhouse gases in air using near-infrared fourier transform spectroscopy. *Atmospheric Measurement Techniques*, 2018, vol. 11, iss. 3, pp. 1549–1563. doi:10.5194/amt-11-1549-2018
7. Ayrapetyan V. S., Maganakova T. V. Calculate the concentration drags method of differential absorption and scattering. *Sbornik materialov Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii "SibOptika-2015"* [Proc. Int. Conf. "SibOptika-2015"], Novosibirsk, 2015, vol. 1, pp. 141–147 (In Russian).
8. Guo J., Xie J.-J., Li D.-J., Yang G.-L., Chen F., Wang C.-R., Zhang L.-M., Andreev Y. M., Kokh K. A., Lanski G. V., Svetlichnyi V. A. Doped GaSe crystals for laser frequency conversion. *Light: Science & Applications*, 2015, vol. 4, iss. 12, pp. 1–12. doi:10.1038/lsa.2015.135
9. Kolker D. B., Sherstov I. V., Kostyukova N. Yu., Boyko A. A., Zenov K. G., Pustovalova R. V. Combined optical parametric oscillator with continuous tuning of radiation wavelength in the spectral range 2.5–10.8 μm. *Quantum Electronics*, 2017, vol. 47, no. 1, pp. 14–19. doi:10.1070/QEL16238
10. Demyanko M. A., Kozlov A. I., Ovsiuk V. N. Comparative analysis of specifications for HgCdTe photodiode-based infrared photodetectors and for GaAs/AlGaAs quantum-well photodetectors. *Journal of Optical Technology*, 2016, vol. 83, no. 9, pp. 559–564. doi:10.1364/JOT.83.000559
11. Bressert E. *Scipy and numpy: an overview for developers*. O'Reilly Media, 2012. 67 p.
12. Gordon I. E., Rothman L. S., Hill C., Kochanov R. V., Tan Y., Bernath P. F., Birk M., Boudon V., Campargue A., Chance K. V., Drouin B. J., Flaud J.-M., Gamache R. R., Hodges J. T., Jacquemart D., Perevalov V. I., Perrin A., Shine K. P., Smith M.-A. H., Tennyson J., Toon G. C., Tran H., Tyuterev V. G., Barbe A., Császár A. G., Devi V. M., Furtenbacher T., Harrison J. J., Hartmann J.-M., Jolly A., Johnson T. J., Karman T., Kleiner I., Kyuberis A. A., Loos J., Lyulin O. M., Massie S. T., Mikhailenko S. N., Moazzen-Ahmadi N., Müller H. S. P., Naumenko O. V., Nikitin A. V., Polyansky O. L., Rey M., Rotger M., Sharpe S. W., Sung K., Starikova E., Tashkun S. A., Vander Auwera J., Wagner G., Wilzewski J., Wcislo P., Yu S., Zak E. J. The HITRAN2016 molecular spectroscopic database. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2017, vol. 203, pp. 3–69. doi:10.1016/j.jqsrt.2017.06.038
13. Zuev V. E., Makushkin Yu. S., Ponomarev Yu. N. *Spektroskopiia atmosfery* [Spectroscopy of the atmosphere]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1987. 248 p. (In Russian).
14. Edwards D. P. *GENLN2: a general line-by-line atmospheric transmittance and radiance model*. NCAR Technical Note, 1992. 147 p. doi:10.5065/D6W37T86
15. Bobrovnikov S. M., Matvienko G. G., Romanovskii O. A., Serikov I. B., Sukhanov A. Ya. *Lidarnyi spektroskopicheskii gazoanaliz atmosfery* [Lidar spectroscopic gas analysis of the atmosphere]. Tomsk, IOA SO RAN Publ., 2014. 508 c. (In Russian).
16. Hinkley E. D. *Laser monitoring of the atmosphere*. Springer-Verlag, 1976. 396 p.
17. Romanovskii O. A., Kharchenko O. V., Yakovlev S. V. Methodological aspects of lidar ranging of trace gases in the atmosphere by differential absorption. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2012, vol. 79, iss. 5, pp. 793–800. doi:10.1007/s10812-012-9673-4
18. Terlouw J. P., Vogelaar M. G. R., Breddels M. A. *Kapteyn documentation*. Available at: <https://media.readthedocs.org/pdf/kapteyn/latest/kapteyn.pdf> (accessed 27 September 2018).
19. Zuev V. E., Komarov V. S. *Statisticheskie modeli temperatury i gazovykh komponentov atmosfery* [Statistic models of temperature and gas components of the atmosphere]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1986. 264 p. (In Russian).
20. Penndorf R. Tables of the refractive index for standard air and the rayleigh scattering coefficient for the spectral region between 0.2 and 20.0 μ and their application to atmospheric optics. *Journal of the Optical Society of America*, 1957, vol. 47, iss. 2, pp. 176–182. doi:10.1364/JOSA.47.000176
21. Krekov G. M., Rakhimov R. F. *Optiko-lokatsionnaya model' kontinental'nogo aerizolizatsii* [Optical location model of continental aerosol]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1982. 199 p. (In Russian).
22. Kochanov R. V., Gordon I. E., Rothman L. S., Wcislo P., Hill C., Wilzewski J. S. HITRAN Application Programming Interface (HAPI): A comprehensive approach to working with spectroscopic data. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2016, vol. 177, pp. 15–30. doi:10.1016/j.jqsrt.2016.03.005
23. Mikhailenko S. N., Babikov Yu. L., Golovko V. F. Information-calculating system spectroscopy of atmospheric gases. The structure and main functions. *Atmospheric and oceanic optics*, 2005, vol. 18, no. 09, pp. 765–776 (In Russian).

## Поиск кратчайшей траектории социоинженерной атаки между парой пользователей в графе с вероятностями переходов

А. О. Хлобыстова<sup>а, б</sup>, стажер, [orcid.org/0000-0002-9811-5476](https://orcid.org/0000-0002-9811-5476)

М. В. Абрамов<sup>а, б</sup>, канд. техн. наук, научный сотрудник, [orcid.org/0000-0002-5476-3025](https://orcid.org/0000-0002-5476-3025), [mva16@list.ru](mailto:mva16@list.ru)

А. Л. Тулупьев<sup>а, б</sup>, доктор физ.-мат. наук, доцент, главный научный сотрудник, [orcid.org/0000-0003-1814-4646](https://orcid.org/0000-0003-1814-4646)

А. А. Золотин<sup>в</sup>, канд. физ.-мат. наук, старший инженер-разработчик, [orcid.org/0000-0002-1028-4292](https://orcid.org/0000-0002-1028-4292)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, 14-я линия В. О., 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ

<sup>б</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург, 199034, РФ

<sup>в</sup>ЕПАМ Системс ГмбХ, Франклинштрассе, 56, Франкфурт-на-Майне, 60486, Германия

**Введение:** социоинженерные атаки можно разделить на два вида: прямые (одноходовые) и многоходовые, проходящие через цепочку пользователей. Траекторией распространения многоходовых социоинженерных атак между двумя пользователями, как правило, является некоторое непустое множество. Оценки вероятности распространения атаки по разным траекториям будут отличаться. **Цель:** выявление наиболее критичной (наиболее вероятной) траектории распространения многоходовой социоинженерной атаки между двумя пользователями. **Методы:** поиск, сопоставление и анализ алгоритмов для выявления наиболее критичной траектории распространения атаки. Методы опираются на сведения, характеризующие интенсивность взаимодействия сотрудников в компании, основанные на данных, извлекаемых из социальных сетей. Указанные алгоритмы сводятся к использованию ряда преобразований исходных данных к алгоритмам поиска наикратчайшего пути в графе. Применяемые оценки вероятности успеха многоходовой социоинженерной атаки рассчитываются с помощью методов построения оценки вероятности сложного события. **Результаты:** предложен подход к идентификации наиболее критичных траекторий, оценка вероятности успеха прохождения атаки по которым будет наиболее высокой. В простейшем случае задача может быть рассмотрена как задача нахождения в графе пути, в котором произведение весов всех ребер, входящих в данный путь, максимально. Представлен подход к решению задачи сокращения ресурсозатратности алгоритма при поиске наиболее критичной траектории на полном графе с большим количеством вершин. Краткий обзор методов и алгоритмов автоматизированного решения задачи поиска наиболее критичной траектории распространения социоинженерной атаки показал, что она в общем случае при ряде преобразований может быть сведена к задаче поиска наиболее критичной траектории с использованием конфигурации алгоритмов Дейкстры и Беллмана – Форда. Произведена адаптация выбранного алгоритма для указанного контекста, предложен подход к разрежению графа при поиске наиболее критичной траектории. Представленные методы и алгоритмы реализованы в программном коде, для верификации результатов расчетов выполнены численные эксперименты. **Практическая значимость:** разработанное программное обеспечение, основанное на предложенных в статье методе и алгоритме, дополняет функционал предшествующих версий прототипов программ для анализа защищенности пользователей информационных систем от социоинженерных атак. Оно позволяет учитывать более широкий круг факторов, влияющих на оценку вероятности успеха социоинженерной атаки злоумышленника на пользователя.

**Ключевые слова** – информационная безопасность, социоинженерные атаки, защита пользователей, многоходовые социоинженерные атаки, траектории распространения атак, вероятность успеха поражения пользователя, социальная инженерия, анализ защищенности пользователя, аудит информационной безопасности, мониторинг защищенности, социальный граф компании, интенсивность взаимодействия сотрудников, социальные сети.

**Цитирование:** Хлобыстова А. О., Абрамов М. В., Тулупьев А. Л., Золотин А. А. Поиск кратчайшей траектории социоинженерной атаки между парой пользователей в графе с вероятностями переходов. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 74–81. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-74-81

**Citation:** Khlobystova A. O., Abramov M. V., Tulupyev A. L., Zolotin A. A. Search for the shortest trajectory of a social engineering attack between a pair of users in a graph with transition probabilities. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 74–81 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-74-81

### Введение

В последнее время наблюдается рост числа киберпреступлений, что приводит к существенным убыткам компаний [1, 2]. Характер киберпреступлений также становится многообразнее, в настоящее время для нарушения информационной безопасности компании злоумышленники

прибегают не только к поиску программно-технических уязвимостей системы, но и к методам социальной инженерии, т. е. поиску и эксплуатации уязвимостей пользователей. Таким образом, актуальной видится проблема повышения уровня защищенности пользователей информационных систем от социоинженерных атак. Важной составляющей этой проблемы является задача

анализа и мониторинга защищенности пользователей информационных систем от социоинженерных атак.

Социоинженерные атаки по числу задействованных пользователей могут быть одноходовые (прямые, непосредственные) и многоходовые, совершаемые через цепочку пользователей, где начальный и конечный пользователи не совпадают, пользователи в цепочке не повторяются. Некоторые подходы к оценке защищенности пользователей от прямых социоинженерных атак достаточно подробно изложены в работе [3]. В данной статье исследуется один из аспектов анализа защищенности пользователей информационных систем при многоходовых социоинженерных атаках — выявление наиболее критичных траекторий распространения атаки. Подход к оценке защищенности пользователей при многоходовых атаках, а также к расчету оценок вероятности распространения атаки от пользователя к пользователю был представлен в работе [4]. Отметим, что оценка вероятности успеха многоходовой социоинженерной атаки рассчитывается в предположении, что оценки вероятности распространения атаки от одного пользователя к другому и обратно равны [4]. Однако оценка вероятности распространения атаки от пользователя к пользователю в прямом и обратном направлении может быть разной, соответственно, необходимо рассматривать ориентированный социальный граф. Также в [4] не рассматриваются вопросы поиска наиболее критичных траекторий распространения атаки. Как правило, существует несколько возможных траекторий развития атаки от одного пользователя к другому, и вероятности успеха распространения атаки по каждой из них в общем случае будут иметь разные значения. В связи с этим актуальной видится задача поиска наиболее критичных траекторий, оценка вероятности успеха прохождения атаки по которым будет наиболее высокой. Одна из подзадач в данном контексте связана с выявлением наиболее критичных траекторий (т. е. наиболее вероятных траекторий) распространения атаки от одного пользователя к другому, и целью данной работы является решение этой подзадачи.

### Релевантные работы

Заделом для данного исследования послужили работы [3, 4], в которых описаны подходы к оценке защищенности пользователей информационных систем от прямых и многоходовых социоинженерных атак. В [5] представлен комплексный подход к анализу информационной безопасности организации, предложен подход к оценке уязвимости, но при этом большая часть

параметров оценивается специалистом по информационной безопасности. В [6] приводятся результаты, связанные с применением обучающих игр для сотрудников компании в целях снижения рисков успешных социоинженерных атак. Эмпирические оценки, полученные в результате исследований [7, 8], могут способствовать построению оценок вероятности успешной социоинженерной атаки на пользователя. Исследование, направленное на разработку методов защиты от нескольких видов социоинженерных атак, представлено в работе [9], однако многоходовые атаки не рассматриваются. В работе [10] представлена многоуровневая модель оценки уязвимости пользователей к социоинженерным атакам, основанная на используемых злоумышленником способах коммуникации с пользователем, состоянии системы в определенный момент времени и на известных сценариях атак, однако не учитываются психологические особенности и влияние самих пользователей информационной системы. В [11] изучается возможность защиты конфиденциальных данных, получаемых из социальных сетей. Основным объектом исследования является социальный граф взаимодействия пользователей и способы обработки нежелательных (с точки зрения конфиденциальности) связей в социальных сетях. В [12] предлагается подход к повышению уровня информационной безопасности организации за счет анализа защищенности посредством автоматизированного сбора данных о сотрудниках компании из открытых источников и их последующего изучения и оценки в целях выявления наиболее уязвимых мест. В [13] исследуются факторы, влияющие на уязвимости пользователей и причины подверженности социоинженерным атакам. Существенный пласт исследований в области защиты пользователей от социоинженерных атак посвящен идентификации и анализу защищенности от атак типа фишинг [14–20]. Результаты таких работ полезны и могут быть использованы при разработке систем предупреждающей диагностики и выработки рекомендаций лицам, принимающим решения.

### Формализация задачи выявления наиболее критичной траектории распространения социоинженерной атаки

Анализ возможных траекторий распространения социоинженерной атаки предлагается производить на ориентированном социальном графе сотрудников компании. Под социальным графом сотрудников компании будем понимать граф, вершины которого соответствуют сотрудникам компании, а ребра — связям между сотрудниками. Формализуя описанное, зададим граф  $G = (U, E)$ ,

где  $U = \{User_i\}_{i=1}^n$  — множество вершин (пользователей);  $E = \{u_i, u_j, p_{i,j}\}_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j}$  — множество упорядоченных троек с заданной оценкой вероятности распространения атаки от пользователя к пользователю —  $p_{i,j}$ . Заметим, что равенство  $p_{i,j}$  и  $p_{j,i}$  в общем случае не предполагается. То есть вероятность распространения атаки от первого пользователя ко второму может отличаться от вероятности распространения атаки в другую сторону — от второго к первому.

В рассматриваемой модели оценка вероятности успеха распространения атаки от пользователя к пользователю зависит от интенсивности взаимодействия между пользователями. Согласно [2], она может быть рассчитана следующим образом:  $p_{i,j} = 1 - \prod_t (1 - p_t^{i,j})^{n_t}$ , где  $p_t^{i,j}$  — оценка вероятности успеха социоинженерной атаки злоумышленника на пользователя по  $t$ -й связи;  $n_t$  — число эпизодов взаимодействия. В рассматриваемом частном случае модели, учитывающей сведения, извлекаемые из социальных сетей,  $p_{i,j} > 0$ ; ребра, где оценка вероятности  $p_{i,j} = 0$ , исключаются из итогового социального графа.

Таким образом, задача поиска наиболее критичной траектории многоходовой социоинженерной атаки от  $User_i$  до  $User_j$  сводится к задаче нахождения в графе элементарного пути (простого и без циклов) между этими вершинами. Причем путь должен быть таким, что произведение оценок вероятностей переходов от пользователя к пользователю, входящих в него, максимально. Будем называть оценку вероятности успеха многоходовой социоинженерной атаки, которая представляет собой произведение оценок вероятностей распространения атаки от пользователя к пользователю и прямой атаки на первого пользователя, длиной пути.

### Подход к выявлению наиболее критичной траектории распространения социоинженерной атаки

Для упрощения, не умаляя общности, рассмотрим граф  $G = (U, E')$ , где  $U = \{User_i\}_{i=1}^n$  — множество вершин (пользователей);  $E' = \left\{ \left( u_i, u_j, \frac{1}{p_{i,j}} \right) \right\}_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j}$  — множество упорядоченных троек, где каждой паре пользователей сопоставлено число  $\frac{1}{p_{i,j}}$ . Заметим, что в этом случае, если  $p_{i,j} \geq p_{l,k}$ , то  $\frac{1}{p_{i,j}} \leq \frac{1}{p_{l,k}}$ , а длина пути

будет вычисляться следующим образом:  $\frac{1}{p_{ml}} = \frac{1}{p_m} \prod_{i=m}^{l-1} \frac{1}{p_{i,i+1}}$ , где  $p_{ml}$  — оценка вероятности

успеха прохождения атаки от пользователя  $m$  до пользователя  $l$ ;  $p_m$  — оценка вероятности успеха прямой социоинженерной атаки злоумышленника на пользователя;  $p_{i,i+1}$  — соответствующая оценка вероятности распространения атаки на пользователя через другого пользователя. Таким образом, от задачи поиска пути с максимальной длиной перейдем к задаче поиска пути с минимальной длиной.

Чтобы применить алгоритмы нахождения минимального пути, необходимо произвести ряд преобразований. Согласно основному логариф-

мическому тождеству:  $\frac{1}{p_{ij}} = e^{\log \frac{1}{p_{ij}}}$ . Тогда длина пути будет рассчитываться следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_{ml}} &= \frac{1}{p_m} \prod_{i=m}^{l-1} \frac{1}{p_{i,i+1}} = e^{\log \frac{1}{p_m} + \sum_{i=m}^{l-1} \log \frac{1}{p_{i,i+1}}} = \\ &= \exp \left\{ \log \frac{1}{p_m} + \sum_{i=m}^{l-1} \log \frac{1}{p_{i,i+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку оценка  $p_m$  успеха прямого социоинженерного атакующего воздействия на пользователя  $m$  будет одинакова для всех траекторий, начинающихся с пользователя  $m$ , то задача сводит-

ся к поиску пути, в котором  $-\sum_{i=m}^{l-1} \log p_{i,i+1}$  минимальна среди всех возможных траекторий, начинающихся с пользователя  $m$  и заканчивающихся пользователем  $l$ , или, что то же,  $\sum_{i=m}^{l-1} \log p_{i,i+1}$  максимальна. Таким образом, задача представляет собой стандартный поиск кратчайшего пути в ориентированном графе без ребер отрицательного веса.

Пусть  $n$  — число вершин в социальном графе (число сотрудников),  $m$  — число дуг в социальном графе. Для решения задачи поиска наиболее критичной траектории на социальном графе были рассмотрены алгоритмы Беллмана — Форда, Левита, Флойда — Уоршелла, Дейкстры и его модификации, топологическая сортировка, A\* [21–23]. Алгоритмы Левита и Флойда — Уоршелла имеют высокую вычислительную сложность в условиях нашей задачи, поэтому их применение нецелесообразно. Для применения алгоритма топологической сортировки исходный граф должен быть ациклическим. Социальный граф сотрудников компании в большинстве случа-

ев не обладает этим свойством, в связи с чем указанный алгоритм не может быть применен. Алгоритм A\* удобен тем, что осуществляет поиск кратчайшего расстояния только между двумя вершинами, а не между всеми. Однако трудность использования данного алгоритма заключается в подборе правильной эвристической функции. Кроме того, алгоритм A\* требует большого объема памяти при работе, в связи с чем его применение нецелесообразно. Алгоритм Дейкстры подходит для решения нашей задачи, обладает вычислительной сложностью  $O(n^2)$ . При этом оптимальная сложность для алгоритмов, основанных на алгоритме Дейкстры, составляет  $O(n \log n + m)$  и достигается при представлении данных в виде куч Фибоначчи. Однако константы, скрытые в асимптотических оценках трудоемкости упомянутой модификации, зачастую на практике велики. С другой стороны, данные можно хранить в двоичной куче, тогда сложность составит  $O(n \log n + m \log n)$ . Но заметим, что время работы модификаций сократится по сравнению с классическим алгоритмом Дейкстры только при условии  $m \ll n^2$ , т. е. в случае разреженного графа. В рамках нашей задачи не всегда предполагается работа с разреженными социальными графами.

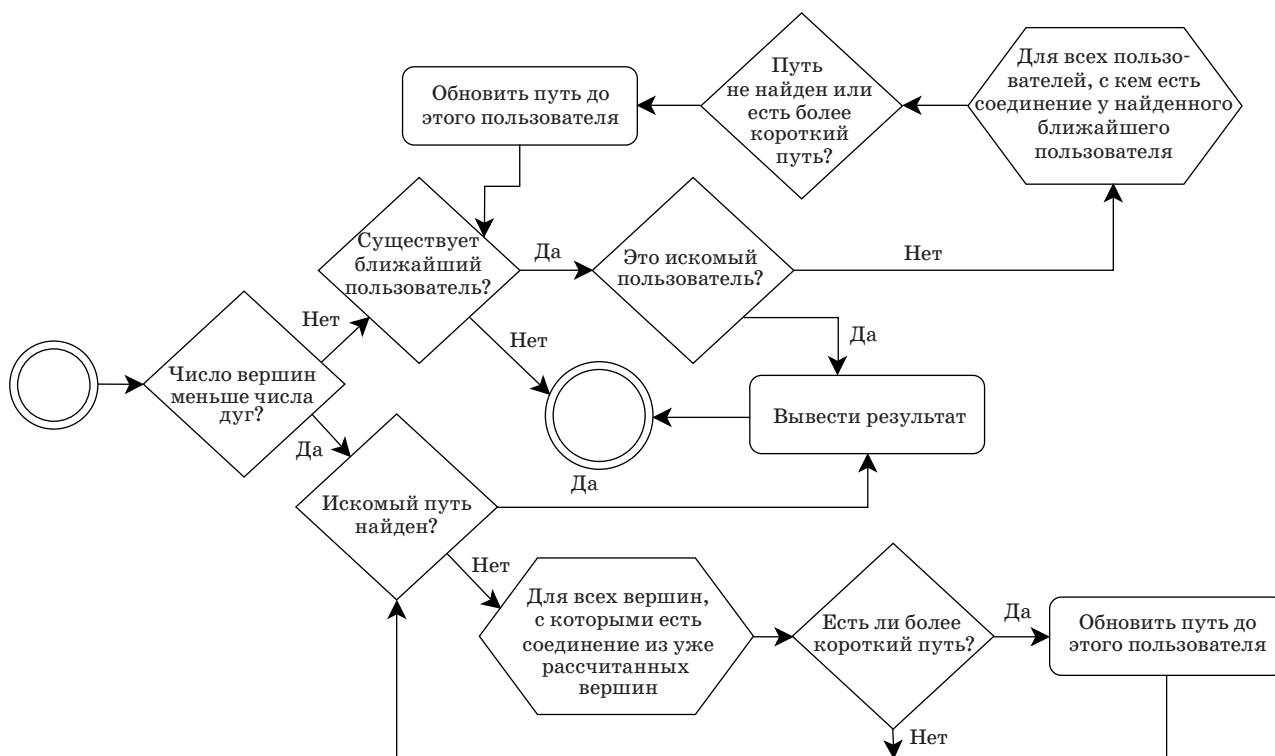
Также в случае, если число дуг в графе меньше числа вершин ( $m < n$ ), то для поиска наикратчайшего пути используется алгоритм Беллмана —

Форда. Его вычислительная сложность  $O(mn)$ , и в этом случае она меньше, чем у алгоритма Дейкстры.

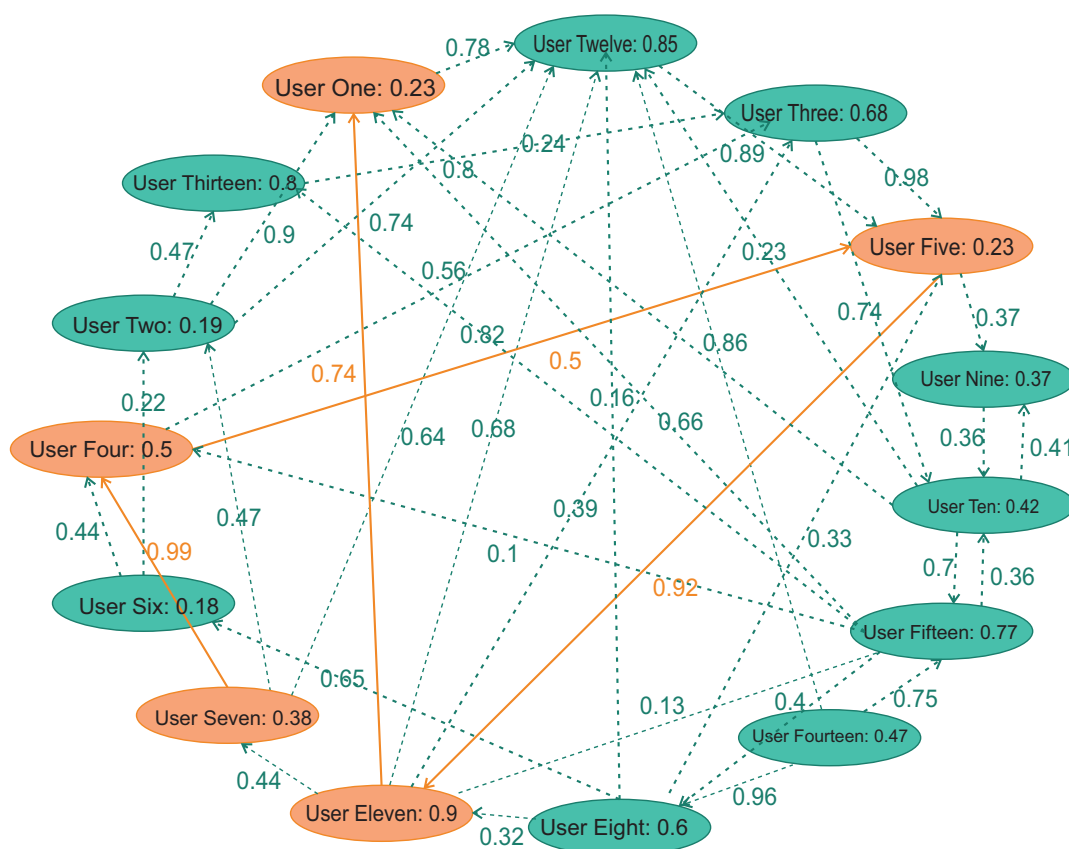
Таким образом, с учетом указанных особенностей наиболее подходящими вариантами являются алгоритмы Дейкстры и Беллмана — Форда. Данные алгоритмы позволяют обеспечить работу при ожидаемых вариациях исходных социальных графов сотрудников организаций. Для того чтобы добиться более быстрой работы алгоритма без ущерба для точности, были введены дополнительные условия. А именно, для уменьшения вычислительной сложности алгоритма установлено пороговое значение: если оценка вероятности успешного распространения социоинженерной атаки от начальной вершины до обрабатываемой в данный момент вершины становится меньше заданного порога, то он исключается из рассмотрения.

### Реализация

Описанный подход был реализован в качестве дополнительного модуля комплекса для автоматизированного анализа защищенности пользователей информационных систем от социоинженерных атак, схема и описание которого представлены в работе [24]. Блок-схема алгорит-



■ **Рис. 1.** Блок-схема алгоритма поиска наиболее критичной траектории распространения социоинженерной атаки  
 ■ **Fig. 1.** The flowchart of the search algorithm for the most critical trajectory of the social engineering attack spread



■ **Рис. 2.** Скриншот результата работы программного модуля поиска наиболее критичной траектории реализации социоинженерной атаки (выделенная траектория — наиболее критичная)  
 ■ **Fig. 2.** Screenshot of the software works result for search module of the implementations most critical trajectory of a social engineering attack (the selected trajectory is the most critical)

ма, заложенного в реализации данного модуля, представлена на рис. 1. В качестве входных параметров используются идентификационные номера двух пользователей, наиболее критичную траекторию распространения социоинженерной атаки между которыми необходимо найти, а также социальный граф, получаемый с помощью одного из модулей указанного комплекса программ на основе данных, извлекаемых из контента, публикуемого пользователями в социальной сети ВКонтакте [4]. Результатом работы программного модуля является наиболее критичная траектория распространения социоинженерной атаки, оценка вероятности успеха прохождения по которой между двумя пользователями максимальна. Пример работы программного модуля представлен на рис. 2. Для визуализации результата работы модуля используется библиотека JGraphX.

**Заключение**

В статье предложен подход к выявлению наиболее критичной траектории распространения

многоходовой социоинженерной атаки злоумышленника, оценка вероятности прохождения по которой максимальна. Произведен обзор алгоритмов, применение которых возможно при решении данной задачи, осуществлена адаптация выбранных алгоритмов к решению задачи поиска наиболее критичной траектории распространения социоинженерной атаки. Разработан алгоритм выявления наиболее критичной траектории и его реализация.

Практическая значимость полученных результатов заключается в расширении возможностей существующего программного комплекса для анализа защищенности пользователей информационных систем от социоинженерных атак. Разработанные метод и алгоритм лягут в основу решения задачи поиска наиболее критичных траекторий реализаций атак в информационной системе с учетом уровней доступа пользователей и критичности документов. Перспективы дальнейшего исследования также заключаются в разработке подходов к формализации и решению задач бэктрекинга инцидентов. Также перспективы дальнейших исследований могут быть связаны



с разработкой подходов к моделированию и оценке вероятностей успеха распространения многоходовых социоинженерных атак, в частности, может быть использован аппарат байесовских сетей [25].

Работа выполнена в рамках проекта по государственному заданию СПИИРАН № 0073-2018-0001 при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00626 «Методы представления, синтеза

оценок истинности и машинного обучения в алгебраических байесовских сетях и родственных моделях знаний с неопределенностью: логико-вероятностный подход и системы графов»; проект № 18-37-00323 «Социоинженерные атаки в корпоративных информационных системах: подходы, методы и алгоритмы выявления наиболее вероятных траекторий».

## Литература

1. По следам CyberCrimeCon 2017: Тенденции и развитие высокотехнологичной преступности. <https://habr.com/companу/group-ib/blog/341812/> (дата обращения: 16.04.2018).
2. ЦБ ожидает роста активности мошенников, использующих социальную инженерию. <https://ria.ru/economy/20171213/1510861611.html> (дата обращения: 07.05.2018).
3. Азаров А. А., Тулупьева Т. В., Суворова А. В., Тулупьев А. Л., Абрамов М. В., Юсупов Р. М. Социоинженерные атаки: проблемы анализа. СПб., Наука, 2016. 349 с.
4. Абрамов М. В., Тулупьев А. Л., Сулейманов А. А. Задачи анализа защищенности пользователей от социоинженерных атак: построение социального графа по сведениям из социальных сетей. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2018, т. 18, № 2, с. 313–321. doi:10.17586/2226-1494-2018-18-2-313-321
5. Jaafar O., Birregah B. Multi-layered graph-based model for social engineering vulnerability assessment. *Advances in Social Networks Analysis and Mining (ASONAM), 2015 IEEE/ACM International Conference on*, IEEE, 2015, pp. 1480–1488. doi:10.1145/2808797.2808899
6. Yasin A., Liu L., Li T., Wang J., Zowghi D. Design and preliminary evaluation of a cyber Security Requirements Education Game (SREG). *Information and Software Technology*, 2018, vol. 95, pp. 179–200. doi:10.1016/j.infsof.2017.12.002
7. Junger M., Montoya L., Overink F. J. Priming and warnings are not effective to prevent social engineering attacks. *Computers in Human Behavior*, 2017, vol. 66, pp. 75–87. doi:10.1016/j.chb.2016.09.012
8. Li H., Luo X. R., Zhang J., Sarathy R. Self-control, organizational context, and rational choice in Internet abuses at work. *Information & Management*, 2018, vol. 55, no. 3, pp. 358–367. doi:10.1016/j.im.2017.09.002
9. Olifer D., Goranin N., Kaceniauskas A., Cenys A. Controls-based approach for evaluation of information security standards implementation costs. *Technological and Economic Development of Economy*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 196–219. doi:10.3846/20294913.2017.1280558
10. Bhakta R., Harris I. G. Semantic analysis of dialogs to detect social engineering attacks. *Semantic Computing (ICSC), 2015 IEEE International Conference on*, IEEE, 2015, pp. 424–427. doi:10.1109/ICO-SC.2015.7050843
11. Cai Z., He Z., Guan X., Li Y. Collective data-sanitization for preventing sensitive information inference attacks in social networks. *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 577–590. doi:10.1109/TDSC.2016.2613521
12. Edwards M., Larson R., Green B., Rashid A., Baron A. Panning for gold: automatically analysing online social engineering attack surfaces. *Computers & Security*, 2017, vol. 69, pp. 18–34. doi:10.1016/j.cose.2016.12.013
13. Albladi S. M., Weir G. R. S. User characteristics that influence judgment of social engineering attacks in social networks. *Human-centric Computing and Information Sciences*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 5. doi:10.1186/s13673-018-0128-7
14. Curtis S. R., Rajivan P., Jones D. N., Gonzalez C. Phishing attempts among the dark triad: Patterns of attack and vulnerability. *Computers in Human Behavior*, 2018, pp. 174–182. doi:10.1016/j.chb.2018.05.037
15. Dou Z., Khalil I., Khreishah A., Al-Fuqaha A., Guizani M. Systematization of Knowledge (SoK): A systematic review of software-based web phishing detection. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2017, vol. 19, no. 4, pp. 2797–2819. doi:10.1109/COMST.2017.2752087
16. Chiew K. L., Yong K. S. C., Tan C. L. A survey of phishing attacks: their types, vectors and technical approaches. *Expert Systems with Applications*, 2018, pp. 1–20. doi:10.1016/j.eswa.2018.03.050
17. Chin T., Xiong K., Hu C. Phishlimiter: a phishing detection and mitigation approach using software-defined networking. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 42516–42531. doi:10.1109/ACCESS.2018.2837889
18. Gupta B. B., Tewari A., Jain A. K., Agrawal D. P. Fighting against phishing attacks: state of the art and future challenges. *Neural Computing and Applications*, 2017, no. 12, vol. 28, pp. 3629–3654. doi:10.1007/s00521-016-2275-y
19. Algarni A., Xu Y., Chan T. An empirical study on the susceptibility to social engineering in social networking sites: the case of Facebook. *European Journal of Information Systems*, 2017, vol. 26, no. 6, pp. 661–687. doi:10.1057/s41303-017-0057-y

20. Junger M., Montoya L., Overink F. J. Priming and warnings are not effective to prevent social engineering attack. *Computers in Human Behavior*, 2017, vol. 66, pp. 75–87. doi:10.1016/j.chb.2016.09.012
21. Levitin A. *Introduction to the design & analysis of algorithms*. USA, Addison-Wesley, 2012. Pp. 304–337.
22. Russel S., Norvig P. *Artificial intelligence: A modern approach*. London, Prentice-Hall International, 2009. Pp. 92–93.
23. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. *Introduction to algorithms*. Second Ed. MIT Press and McGraw-Hill, 2001. Pp. 580–642.
24. Абрамов М. В. *Методы и алгоритмы анализа защищенности пользователей информационных систем от социоинженерных атак: оценка параметров моделей*: дис. ... канд. техн. наук. СПб., СПИИРАН, 2018. 232 с.
25. Харитонов Н. А., Березин А. И. Синтез математического представления ациклической алгебраической байесовской сети. *Сборник докладов Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям (SCM-2018)*, СПб., 2018, т. 1, с. 141–143.

UDC 614.8 + 002.6:004.89

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-74-81

**Search for the shortest trajectory of a social engineering attack between a pair of users in a graph with transition probabilities**

A. O. Khlobystova<sup>a,b</sup>, Trainee, orcid.org/0000-0002-9811-5476

M. V. Abramov<sup>a,b</sup>, PhD, Tech., Research Fellow, <https://orcid.org/0000-0002-5476-3025>

A. L. Tulupyev<sup>a,b</sup>, Dr. Sc., Phys.-Math., Associate Professor, Senior Researcher, orcid.org/0000-0003-1814-4646

A. A. Zolotin<sup>c</sup>, PhD, Phys.-Math., Senior Software Engineer, orcid.org/0000-0002-1028-4292

<sup>a</sup>Saint-Petersburg Institute for Informatics and Automation of the RAS, 39, 14 Line, V. O., 199178, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup>Saint-Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya Emb., 199034, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>c</sup>EPAM Systems GmbH, 56, Franklinstraße, 60486, Frankfurt am Main, Germany

**Introduction:** Social engineering attacks can be divided into two types: direct (one-way) and multi-pass ones, passing through a chain of users. Normally, there are several propagation paths for a multi-pass social engineering attack between two users. Estimates of the probabilities of an attack to spread along different trajectories will differ. **Purpose:** Identification of the most critical (most probable) trajectory for a multi-pass social engineering attack between two users. **Methods:** Methods of searching, matching and algorithm analysis are used to identify the most critical trajectory of attack propagation. They apply the information about the intensity of the interaction between employees in companies based on data extracted from social networks. These algorithms are reduced, using a number of transformations of the original data, to the algorithms of finding the shortest path in a graph. The estimates of a multi-path social engineering attack success probability are calculated with the methods of constructing an estimate of a complex event probability. **Results:** We have proposed an approach to identifying the most critical trajectories, whose estimate of the attack success probability is the highest. In the simplest case, the problem can be reduced to finding a path in the graph with the maximum product of the weights of all the edges involved. The resource intensity of the algorithm when searching for the most critical trajectory on a complete graph with a large number of vertices can be reduced with a specially developed technique. A brief overview of the methods and algorithms providing automated search for the most critical propagation path of a social engineering attack showed that in a general case it can be reduced, with some transformations, to the problem of finding the most critical trajectory using the configuration of Dijkstra and Bellman — Ford algorithms. The chosen algorithm was adapted for the specified context, and an approach was proposed to thin out the graph when searching for the most critical trajectory. The presented methods and algorithms are implemented in software code. Numerical experiments were performed to verify the calculation results. **Practical relevance:** The developed software based on the method and algorithm proposed in this article complements the functionality of the previous versions of software prototypes for analyzing the protection of information system users against social engineering attacks. It allows you to take into account a wider range of factors affecting the assessment of social engineering attack success probability.

**Keywords** — information security, social engineering attacks, user protection, multi-path social engineering attacks, attack trajectories, user's defeat success probability, social engineering, user security analysis, information security audit, security monitoring, company social graph, employee interaction intensity, social networks.

**Citation:** Khlobystova A. O., Abramov M. V., Tulupyev A. L., Zolotin A. A. Search for the shortest trajectory of a social engineering attack between a pair of users in a graph with transition probabilities. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 74–81 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-74-81

**References**

1. *Po sledam CyberCrimeCon 2017: Tendentsii i razvitie vy-sokotekhnologichnoj prestupnosti* [In the footsteps of Cyber-CrimeCon 2017: Trends and development of high-tech crime]. Available at: <https://habr.com/company/group-ib/blog/341812/> (accessed 16 April 2018).
2. *CB ozhidaet rosta aktivnosti moshennikov, ispol'zuyushchih sotsial'nuyu inzheneriyu* [Central Bank expects growth in activity of fraudsters using social engineering]. Available at: <https://ria.ru/economy/20171213/1510861611.html> (accessed 07 May 2018).
3. Azarov A. A., Tulupyeva T. V., Suvorova A. V., Tulupyev A. L., Abramov M. V., Usupov R. M. *Sotsioinzhenernye ataki: problema analiza* [Social engineering attacks: the problem of analysis]. Saint-Petersburg, Nauka Publ., 2016. 349 p. (In Russian).

4. Abramov M. V., Tulupyev A. L., Sulejmanov A. A. Problem of analysis of user protection from social engineering attacks: construction of the social graph on information from social network websites. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informatsionnyh tekhnologij, mekhaniki i optiki*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 313–321 (In Russian). doi:10.17586/2226-1494-2018-18-2-313-321
5. Jaafor O., Birregah B. Multi-layered graph-based model for social engineering vulnerability assessment. *Advances in Social Networks Analysis and Mining (ASONAM), 2015 IEEE/ACM International Conference on*, IEEE, 2015, pp. 1480–1488. doi:10.1145/2808797.2808899
6. Yasin A., Liu L., Li T., Wang J., Zowghi D. Design and preliminary evaluation of a cyber Security Requirements Education Game (SREG). *Information and Software Technology*, 2018, vol. 95, pp. 179–200. doi:10.1016/j.infsof.2017.12.002
7. Junger M., Montoya L., Overink F. J. Priming and warnings are not effective to prevent social engineering attacks. *Computers in Human Behavior*, 2017, vol. 66, pp. 75–87. doi:10.1016/j.chb.2016.09.012
8. Li H., Luo X. R., Zhang J., Sarathy R. Self-control, organizational context, and rational choice in Internet abuses at work. *Information & Management*, 2018, vol. 55, no. 3, pp. 358–367. doi:10.1016/j.im.2017.09.002
9. Olifer D., Goranin N., Kaceniauskas A., Cenys A. Controls-based approach for evaluation of information security standards implementation costs. *Technological and Economic Development of Economy*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 196–219. doi:10.3846/20294913.2017.1280558
10. Bhakta R., Harris I. G. Semantic analysis of dialogs to detect social engineering attacks. *Semantic Computing (ICSC), 2015 IEEE International Conference on*, IEEE, 2015, pp. 424–427. doi:10.1109/ICOSC.2015.7050843
11. Cai Z., He Z., Guan X., Li Y. Collective data-sanitization for preventing sensitive information inference attacks in social networks. *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 577–590. doi:10.1109/TDSC.2016.2613521
12. Edwards M., Larson R., Green B., Rashid A., Baron A. Panning for gold: automatically analysing online social engineering attack surfaces. *Computers & Security*, 2017, vol. 69, pp. 18–34. doi:10.1016/j.cose.2016.12.013
13. Albladi S. M., Weir G. R. S. User characteristics that influence judgment of social engineering attacks in social networks. *Human-centric Computing and Information Sciences*, 2018, vol. 8, no. 1, p. 5. doi:10.1186/s13673-018-0128-7
14. Curtis S. R., Rajivan P., Jones D. N., Gonzalez C. Phishing attempts among the dark triad: Patterns of attack and vulnerability. *Computers in Human Behavior*, 2018, pp. 174–182. doi:10.1016/j.chb.2018.05.037
15. Dou Z., Khalil I., Khreishah A., Al-Fuqaha A., Guizani M. Systematization of Knowledge (SoK): A systematic review of software-based web phishing detection. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2017, vol. 19, no. 4, pp. 2797–2819. doi:10.1109/COMST.2017.2752087
16. Chiew K. L., Yong K. S. C., Tan C. L. A survey of phishing attacks: their types, vectors and technical approaches. *Expert Systems with Applications*, 2018, pp. 1–20. doi:10.1016/j.eswa.2018.03.050
17. Chin T., Xiong K., Hu C. Phishlimiter: A phishing detection and mitigation approach using software-defined networking. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 42516–42531. doi:10.1109/ACCESS.2018.2837889
18. Gupta B. B., Tewari A., Jain A. K., Agrawal D. P. Fighting against phishing attacks: state of the art and future challenges. *Neural Computing and Applications*, 2017, vol. 28, no. 12, pp. 3629–3654. doi:10.1007/s00521-016-2275-y
19. Algarni A., Xu Y., Chan T. An empirical study on the susceptibility to social engineering in social networking sites: the case of Facebook. *European Journal of Information Systems*, 2017, vol. 26, no. 6, pp. 661–687. doi:10.1057/s41303-017-0057-y
20. Junger M., Montoya L., Overink F. J. Priming and warnings are not effective to prevent social engineering attack. *Computers in Human Behavior*, 2017, vol. 66, pp. 75–87. doi:10.1016/j.chb.2016.09.012
21. Levitin A. *Introduction to the design & analysis of algorithms*. USA, Addison-Wesley, 2012, pp. 304–337.
22. Russel S., Norvig P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. London, Prentice-Hall International, 2009, pp. 92–93.
23. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms*. Second Ed. MIT Press and McGraw-Hill, 2001, pp. 580–642.
24. Abramov M. V. *Metody i algoritmy analiza zashchishchennosti pol'zovatelej informacionnyh sistem ot socioinzhenernyh atak: ocenka parametrov modelej*. Dis. kand. tehn. nauk [Methods and algorithms for analyzing users' protection of information systems from social engineering attacks: estimation of model parameters. PhD tech. sci. diss.]. Saint-Petersburg, SPIIRAN Publ., 2018. 232 p. (In Russian).
25. Haritonov N. A., Berezin A. I. Acyclic Algebraic Bayesian network maths presentation synthesis. *Sbornik dokladov Mezhdunarodnoj konferencii po myagkim vychisleniyam i izmereniyam (SCM-2018)*, [XXI International Conference on Soft Computing and Measurement (CSM'2018)], Saint-Petersburg, 2018, vol. 1, pp. 141–143 (In Russian).

UDC 621.371

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-82-94

## Evolution of multiple-access networks – cellular and non-cellular – in historical perspective. Part 3

A. M. Sergeev<sup>a</sup>, Senior Lecturer, [orcid.org/0000-0002-4788-9869](https://orcid.org/0000-0002-4788-9869)

N. Sh. Blaunstein<sup>b</sup>, Dr. Sc., Phys.-Math., Professor, [nathan.blaunstein@hotmail.com](mailto:nathan.blaunstein@hotmail.com)

<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup>Ben-Gurion University of the Negev, P.O.B. 653, 1, Ben-Gurion St., Beer-Sheva, 84105, Israel

**Introduction:** The goal of this issue is the analysis of evolution of the current and novel wireless networks, from second generation (2G) to fifth generation (5G), as well as changes in technologies and their corresponding theoretical background and protocols – from Bluetooth, WLAN, WiFi and WiMAX to LTE, OFDM/OFDMA, MIMO and LTE/MIMO advanced technologies with new hierarchy of cellular maps design – femto/pico/micro/macro. **Methods:** We use new theoretical frameworks for description of the advanced technologies, such as multicarrier diversity technique, OFDM and OFDM novel approach, MIMO aspects description based on multi-beam antennas approach, various cellular maps design based on a new algorithms of femto/pico/micro/macrocell deployment, and a new methodology of a new MIMO/LTE system integration based on multi-beam antennas. **Results:** We have created a new methodology of multi-carrier diversity description for novel multiple-access networks, of usage of OFDM/OFDMA modulation to obey inter-user and inter-symbol interference in multiple-access networks, of how to obey the multiplicative noises occurring in the multiple-access wireless networks, caused by multi-ray phenomena, and finally, of how to overcome propagation effects occurring in the terrestrial communication links by use combination of MIMO and LTE technologies based on multi-beam antennas. For these purposes we present new stochastic approach that accounts for the terrain features, such as buildings' overlay profile, buildings' density around the base station and each user antennas, and so forth. These parameters allow us to estimate for each situation occurs at the built-up terrain area the effects of fading, as a source of multiplicative noise. **Practical relevance:** New methodology of how to estimate effects of multiplicative noise, inter-user and inter-symbol interference, occurring in the terrestrial wireless networks, allows us to predict a-priori practical aspects of the current and new multiple-access wireless communication networks, such as: the users' capacity and user's links spectral efficiency for various configurations of cells deployment – femto, pico, micro, and macro, as well as the novel MIMO/LTE system configuration for future networks of 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> generation deployment.

**Keywords** – capacity, close subscriber group, CSG, dedicated spectral assignment, DSA, femtocell, femto access point, FAP, grade of service, GoS, quality of service, QoS, microcell, macrocell, open subscriber group, OSG, path loss, picocell, shared spectral assignment, SSA, signal-to-noise ratio, SNR, waveguide-street model, stochastic model of urban environment, wireless fidelity network, WiFi, wireless metropolitan area network, WiMAX.

**Citation:** Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks – cellular and non-cellular – in historical perspective. Part 3. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 82–94. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-82-94

Continuation.

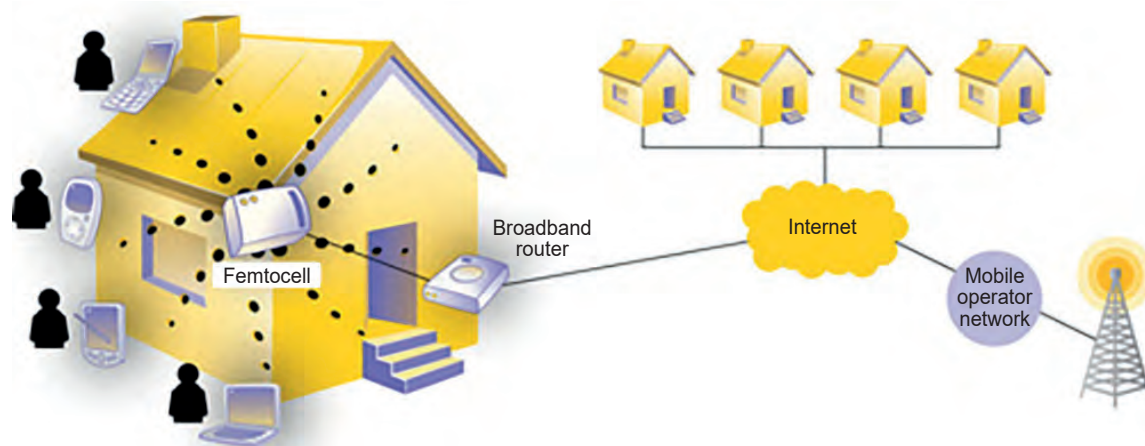
Start in *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 4, pp. 86–104, doi:10.31799/1684-8853-2018-6-86-104; 2018, no. 5, pp. 94–103, doi:10.31799/1684-8853-2018-5-94-103

### Novel femtocell concept for modern networks from 4G to 5G

The femtocell concept is one of the example of new technologies, that makes use as of the existing 3G homogeneous and non-homogeneous cellular networks to yield high speed mobile communications (up to 1 Gbps) [83–94]. A femtocellular concept was introduced, as an example of how to improve GoS and QoS for modern MIMO networks by introducing a non-standard planning of the cells' pattern instead of existing technologies of cells' pattern design [22, 95, 96]. We present now a recent configuration of femtocell concept combined with WiFi-WiMAX existing networks for the pur-

pose to perform of a new 4<sup>th</sup> generation of wireless networks. Such a configuration is presented schematically in Fig. 17.

According to [83–94], we define femtocell as the *home access point* (HAP) [called also *Femto-Aps* or *FAPs*] arranged inside the existing micro- or macro-cell networks for the increasing of the rate of information data stream for each home subscriber. The increasing demand observed during the recent decades for higher information data rate in standard wireless networks has triggered the performance of advanced cellular technologies and modern networks. Thus, the third-generation partnership projects (3PPP and 3PP2) [86, 87], HSPA [93], wideband code division multiple access



■ Fig. 17. Schematic presentation of Femtocell-WiFi-WiMAX configuration

(WCDMA-2000) and WCDMA/HSPA standards, the modern forth-generation (4G) technologies and the corresponding networks on the basis of WiMAX (based on the protocol 802.16e) and LTE standards [83, 85, 90], were continuously adopted to supply the real mobile broadband experience for the mobile customers. This occurs because of the growing demand for mobile wireless communications, which requires to determine and to fully understand the capacity limitations of each technology due to the fact that the capacity limit formulates the maximum data rates based on the channel capacity equation that was introduced firstly by Shannon [84].

One of the main approaches to overcome the fundamental capacity limitations and as a result to increase the maximum user throughput is to use the higher-order modulation techniques for broadband networks, such as OFDM [91]. However, such a technique requires smaller cell radius especially when the reuse of one frequency scheme is used.

Femtocell access point (FAP) networks have recently received considerable attention from communication society due to their enormous potential for capacity improvements by answering the small cell radius requirement [83]. The initial standardization of FAP by the 3GPP, 3GPP2, WiMAX Forum [85–87, 90, 94] was completed lately, signaling that femtocell technology has been recognized by the highest profile standardization structures worldwide.

Finally, the femtocell concept allow designers of such combined femtocell-microcell or femtocell-macrocell networks to achieve a higher capacity, that is, maximum possible rate of signal data passing via such indoor-outdoor channels with minimization in the multiplicative noise due to fading and the noise caused by interference between users [83, 92–94]. At the same time we notice that the co-existence between the FAP, neighboring FAPs and mi-

cro- or macro-cell BSs (denoted as MBS), remains a key problem that needs to be addressed [85–87].

A precise control of femto-macro cellular (FMC) interference should be performed. This control relates to sub-band scheduling and interference cancellation. Thus, to control FMC interference the macrocell bandwidth should be split into sub-bands and the short-range femtocell links should allow their power across these sub-bands. The corresponding procedure of the macrocell partitioning into sub-bands is done as follows.

The sub-band  $\Delta f_i$ ,  $i \in [1, N]$ , is used in all  $M$  cells and serves users located close to the each cell BS. The other sub-bands  $\Delta f_j$ ,  $j \neq i$ , serve users close to the cells' edges. During sub-band partitioning, an adaptive power control technique is usually used. Such approach of powers allocation across the sub-bands can maximize loading and GoS.

Finally, using femtocell APs, we can satisfy the problem of macrocell interface, reduce inter-cell interference between adjacent macrocells, mitigate the femtocell-macrocell users interference, and improve cell edge users' performance. The main goal of femtocell-macrocell and femtocell-microcell deployments is to avoid co-channel interference and to increase the overall cell capacity, which in turn allows achieving high data rate for each indoor subscriber.

All these benefits depend strongly on the propagation phenomena (i. e., physical background) that occur in indoor-outdoor communication environments. A good prediction of these propagation effects allows solving the problem of full radio coverage for each femtocell (e.g. indoor) subscriber located in the area of each FAPs service.

Here, we focus our effort on the co-existence analysis that takes into consideration the different scenarios of FAPs deployment. The analysis is performed in terms of channel capacity estimation for different FAPs deployment strategies. Following

the [88–96], we formulate the capacity analysis on the basis of four main terminologies:

— dedicated spectral assignment (DSA), that is, the FAP deployment by using a dedicated spectrum that is not used for the macro-cell network;

— shared spectral assignment (SSA), that is, the FAP deployment by using the same frequency carrier as a macro-cell network;

— closed subscriber group (CSG), that is, the FAP is accessible only for a local group of users according to the defined access list;

— open subscriber group (OSG), that is, all MBSs might access the FAP coverage service.

All the combinations DSA with CSG and OSG, as well as SSA with CSG and OSG, we will analyze below. We also notice that in the CSG case, the only users, which are inside the indoor environment, are assumed to be served by the FAP.

Some of the details on shared spectral channel assignment deployment can be found in [88–90]; the comparison between the closed and open access group list is analyzed in [91], and different power control techniques are discussed in [92]. The Femto forum white papers have also included studies for co-existence analysis in terms of mutual interference [94].

## Channel capacity models

To analyze the potential of channel capacity of mobile users in networks with integrated femtocell deployments, Shannon's equations were introduced considering different FAP available configurations (CSG and OSG) and spectral channel assignment strategies (DSA and SSA) mentioned above. The following conditions in such femtocell deployments and channel capacity models were assumed:

a) the total spectral bandwidth of the system,  $B_t$ , is assigned to FAPs and MBSs according to the considered configuration: DSA, SSA, CSG, or OSG;

b) all users have the same available bandwidth, which is assigned to comply with the highest available demand of service in the network, that is, each MS receives the equivalent part of the  $B_t$ ;

c) all FAPs and MBSs transmit simultaneously to all active subscribers, whether stationary or mobile.

We notice here that to calculate the average received signal strength accounting for slow and fast fading phenomena caused by multiple scattering, diffraction and reflection, the unified propagation models for outdoor, indoor and outdoor-indoor scenarios were used following References [22, 77–89].

Now, let us introduce the main formulas for considering different FAP available configurations (CSG and OSG) and spectral channel assignment strategies (DSA and SSA).

*Shared spectrum assignment with close subscriber group.* In case when the total spectrum bandwidth  $B_t$  is shared between the FAP network and the macro-cell BSs (MBSs), the capacity of MS user  $i_F$  in FAP coverage, can be introduced as follows [95, 96]:

$$C_{SSA\_CSG\_indoor\_i} = B_{tN} \log_2 \left( 1 + \frac{S_{Fi}}{kTB_{tN} + \sum_{j=1, j \neq i}^J I_j + \sum_{l=1}^L I_l} \right). \quad (33)$$

Here,  $B_{tN} = B_t/N$  is a bandwidth normalized to number of users  $N$  served by FAP;  $S_{Fi}$  is the signal strength of the FAP in the location of MS user  $i_F$  served by FAP with  $i_F \in (1:N)$ ;  $I_l$  is the interference strength of MBS antenna with  $l \in (1:L)$ , where  $L$  is a total number of MBSs;  $I_j$  is the interference strength of the neighboring FAP  $j$  with  $j \in (1:J)$ , when  $J$  is a total number of FAPs;  $kTB_t$  is the thermal noise, where  $k_B$  is a Boltzmann coefficient and  $T$  is a temperature (in Kelvin). We notice that the MS users, which were allocated indoor are considered to be registered in the CSG, otherwise they are not allowed to be served by FAP. The capacity of the outdoor MS user  $i_M$  can be calculated as follows [95, 96]:

$$C_{SSA\_CSG\_outdoor\_i} = B_{tP} \log_2 \left( 1 + \frac{S_{Mi}}{kTB_{tP} + \sum_{j=1}^J I_j + \sum_{l=1, l \neq i}^L I_l} \right), \quad (34)$$

where  $B_{tP} = B_t/P$  is a bandwidth normalized to number of users  $P$  served by MS;  $S_{Mi}$  is a signal strength of the MBS in the location of MS user  $i_M$  served by MBS with  $i_M \in (1:P)$ .

*Shared spectrum assignment with open subscriber group.* The main difference for this case is that the MS users that are located outdoor can be potentially served by FAP. Therefore, for MS users  $i_{Fo}$ , which are served by FAP and located outdoor, the channel capacity can be written as [95, 96]:

$$C_{SSA\_CSG\_outdoor\_iF} = B_{tN} \log_2 \left( 1 + \frac{S_{Fi}}{kTB_{tN} + \sum_{j=1}^J I_j + \sum_{l=1, l \neq i}^L I_l} \right). \quad (35)$$

The decision if the outdoor MS served by FAP or by MBS antenna is done by simple handover thresh-

old, that is, the transmitter (FAP or MBS antenna) with highest signal strength gets to serve the MS.

*Dedicated spectrum assignment with closed subscriber group.* In case the dedicated spectrum is assigned to the femtocell network, there is no mutual interference between the MBS and the FAP, however the total bandwidth  $B_t$  is divided between the FAP and MBS network in some manner, that is, the allocation can be potentially not symmetrical. Therefore the channel capacity for the MS user  $i_F$  that is in FAP coverage can be introduced as follows [95, 96]:

$$C_{DSA\_CSG\_indoor\_i} = B_{tNd} \log_2 \left( 1 + \frac{S_{Fi}}{kTB_{tNd} + \sum_{j=1, j \neq i}^J I_j} \right), \quad (36)$$

where  $B_{tNd} = B_t \cdot FNR/N$ , and  $FNR$  is a FAP network ratio, which defines the part of total  $B_t$  spectrum allocated for FAP network. The capacity of the outdoor MS user  $i_M$ , which is served by MBS can be calculated as follows [95, 96]:

$$C_{DSA\_CSG\_outdoor\_i} = B_{tPd} \log_2 \left( 1 + \frac{S_{Mi}}{kTB_{tPd} + \sum_{l=1, l \neq i}^L I_l} \right), \quad (37)$$

where  $B_{tPd} = B_t \cdot FNR/P$  is, as above, a bandwidth normalized to number of users  $P$  served by MBS.

*Dedicated spectrum assignment with open subscriber group.* In such a scenario, the channel capacity for the MS users,  $i_F$ , that is, located under the FAP radio coverage (having better signal strength), can be introduced as follows [95, 96]:

$$C_{DSA\_OSG\_outdoor\_iF} = B_{tNd} \log_2 \left( 1 + \frac{S_{Fi}}{kTB_{tNd} + \sum_{j=1}^J I_j} \right), \quad (38)$$

where  $B_{tNd} = B_t \cdot FNR/N$  is, as above, a bandwidth normalized to number of users  $N$  served by MS antenna.

Addressing the problem of optimal resources allocation in the predefined built-up areas of interest and for the above four scenarios, let us introduce a well-known power allocation procedure called in the literature the “spatial water-filling” [108–110].

## Analysis of femto/micro/macroucell network configurations

In our numerical analysis of the four scenarios described above, we assume that the users are randomly, but uniformly, distributed in the investigated area of service. For the analysis two representative areas were selected: one is for an urban, and one is for a suburban area (see definitions in [21, 22]).

We also assume that each FAP has 3 categories corresponded to the output antenna power of 10, 15, 21 dBm, respectively. In each category, the power dynamic range is 30 dB. Each FAP affects other users within a radius of 150 m.

For each distribution described above, we need to optimize the maximum transmitted power. The optimization criterion is to maximize the site’s total ergodic capacity, that is, the sum of maximum available capacity for each user in the site under investigation [95, 96]:

$$C_{total} = \sum_i C_i(outdoor\_users) + \sum_i C_i(outdoor\_users\_no\_femto) + \sum_i C_i(outdoor\_users\_with\_femto). \quad (39)$$

*Propagation aspects of femtocell networks.* To analyze various scenarios in the outdoor-indoor communication environments for the femtocell-macrocell joint planning tool deployment, the multi-parametric stochastic approach for signal strength prediction in urban environment is used. This approach is fully described in [21, 22] and some details on the stochastic models for regular and non-regular distributions of buildings in the urban environment are presented in references [97–107]. This stochastic approach combines the multipath propagation along straight crossing streets, areas surrounding streets and other natural or man-made obstructions randomly distributed (according to Poisson’s law as an ordinary flow of scatterers) on the rough terrain. General formulas were obtained in references [99–102] for prediction of the signal path loss in various scenarios with different elevations of the base station and the subscriber antennas. In this paragraph, the simplified approach based on reference [101] is proposed, where multiple diffraction and scattering, having the coherent and incoherent parts, have been rearranged in the simple forms.

We will present the total path loss, presented in [21, 22], accounting additionally for penetration of the radio signal inside buildings and the additional loss caused by walls, that is,

$$L_{total}(r) = -32,4 - 30 \log f_{[MHz]} - 30 \log r_{[km]} - L_{fading} - L_{walls} + (G_{BS} + G_{MS}), \quad (40)$$

where, as in [22],

$$L_{fading} = 10 \log \frac{\gamma_0 l_v F^2(z_1, z_2)}{|\Gamma| \left[ \frac{\lambda r}{4\pi^3} + (z_2 - \bar{h})^2 \right]^{1/2}}, \quad (41)$$

$F^2(z_1, z_2) = (\bar{h} - z_1)^2$ ; all other parameters are described above in Part 2. Here we introduced also a new term called loss by walls,  $L_{walls} = 10 \log |T|$ ,  $|T| = \sqrt{1 - (X|\Gamma|)^2}$ ,  $0.5 < X < 1$  according to Reference [85], where  $|T|$  is the absolute value of refraction coefficient that equals:  $|T| = 0.9-0.95$  for glass,  $|T| = 0.75-0.85$  for wood,  $|T| = 0.55-0.65$  for stones, and  $|T| = 0.15-0.2$  for concrete (for  $X = 0.5-0.9$ ) [106, 107]. The wavelength of the radio wave has a wide range that varies from  $\lambda = 0.05$  m to  $\lambda = 0.53$  m and covers most of the modern wireless networks [22, 105–107].

As for indoor channels, here we use the same combination of the statistical waveguide model describing propagation phenomena along the corridors and inside rooms lining each corridor (see [22]), where instead of the time  $t$ , we account for relations between time  $t = (r + \tilde{r})/d$  and distances  $r$  and  $\tilde{r} = \left[ d^2 + r^2 - 2rd \cos \varphi \right]^{1/2}$ . After straightforward derivations, we get:

$$\begin{aligned} L_{total} = & -32.4 - 20 \log f_{[\text{MHz}]} - \\ & -10 \log \left[ \frac{\gamma_0 (r + \tilde{r})}{d} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right] - 2.4 \{ \gamma_0 (r + \tilde{r}) \} - \\ & -10 \log (|T_{wall}| |T_{floor}|) - 10 \log \frac{d((r + \tilde{r}) - d \cos \varphi)}{(r + \tilde{r})^2 - d^2} - \\ & - 8.6 \frac{|\ln X| \left[ (r + \tilde{r})^2 - d^2 \right]}{a'(\varphi) (r + \tilde{r}) - d \cos \varphi} + (G_{BS} + G_{MS}) |_{\text{dB}}. \quad (42) \end{aligned}$$

In this formula we account for attenuation loss caused by walls and by floors, as was done in [105, 107] by introducing the absolute values of the coefficients of attenuation caused by walls,  $T_{wall}$ , and by floors,  $T_{floor}$ :  $|T_{wall}| = \prod_m |T_{wall,m}|$  and  $|T_{floor}| = \prod_n |T_{floor,n}|$  according to [105, 107].

Formulas (40) and (41) will be used below for analysis of situation with path loss in outdoor macro- and micro-cell environments and formula (42) will be used for analysis of propagation inside femto-cell indoor links.

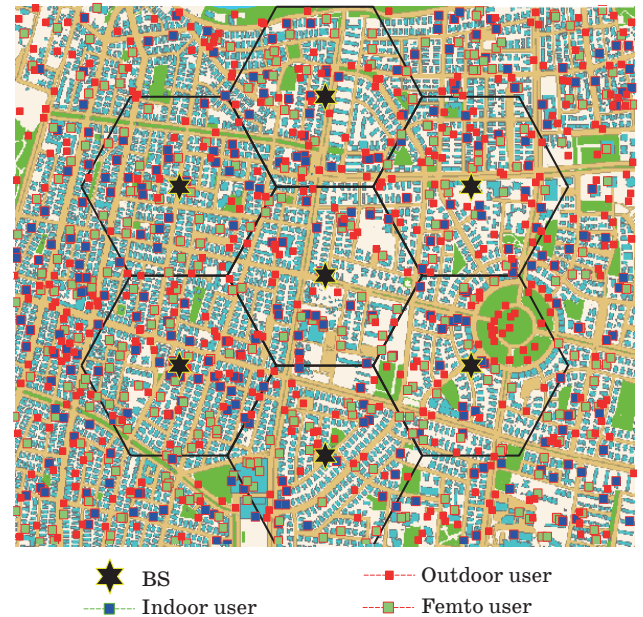
*Numerical analysis of different femtocell network deployments.* We analyzed numerically two types of deployments for different types of femto-cell configurations:

a) there are three types of standard FAPs with maximum output power of 10, 15, and 21 dBm, mentioned above;

b) the same analysis was performed after the implementation of the power optimization algorithm using the spatial water-filling approach proposed previously.

Since both types of techniques gave the same results [95, 96], we present one of them on the basis of the water-filling approach. Numerical computations were performed for the urban scene that corresponds to the one of the built-up area of  $1.5 \times 1.5$  km (Fig. 18), after the power allocation optimization algorithm using the water-filling mechanism. As it follows from Fig. 18, there are 7 cells uniformly distributed in this area. The MS users were randomly, but uniformly, distributed across the selected area where the part of them was randomly allocated in the indoor environment according to the real clutter definition (that is, a different percentage of indoor calls of 20, 40, and 60 % were simulated according to conditions considered in [95, 96]).

The FAPs were also randomly uniformly distributed between the indoor users. Different percentages of indoor MS users (from all number of users located in area of service) of 50, 70, and 100 %, which have FAPs, were also simulated. Different distributions of FAPs between the MS users were simulated for the following configurations: uniform, where 80 % MS users are concentrated at the cell edge and 20% are concentrated in the cell centre, and vice versa.



■ Fig. 18. The tested urban area. The big stars correspond to the MBS; different collared quadrates correspond to femto users, indoor users and MS outdoor users, respectively



All types of FAPs configuration (CSG, OSG) with SSA and DSA, were simulated and are presented in Fig. 19–22 for the above mentioned scenarios of MS users' distribution. The analysis was performed within the centrally positioned 7-cell pattern in the cluster assuming the frequency reuse of one. In numerical computations, the users' density was taken to be 480 users per square kilometre [95, 96].

Thus, in Fig. 19, *a*, *b* the CDF of signal data capacity for four network configurations (CSG, OSG, SCA, DCA) and for different FAP's distributions.

The effective irradiated power is 21 dBm and the number of indoor users is 60 % from all subscribers in the tested area. Once can see that the preferable network configurations are the shared and dedicated CSG and OSG femto-network configurations. Figures 20 show the total probability of the signal capacity (or maximum data rate) for shared CSG (*a*) and dedicated OSG (*b*) for different FAPs densities, of 50, 70, and 100 %, for indoor users using FAP of

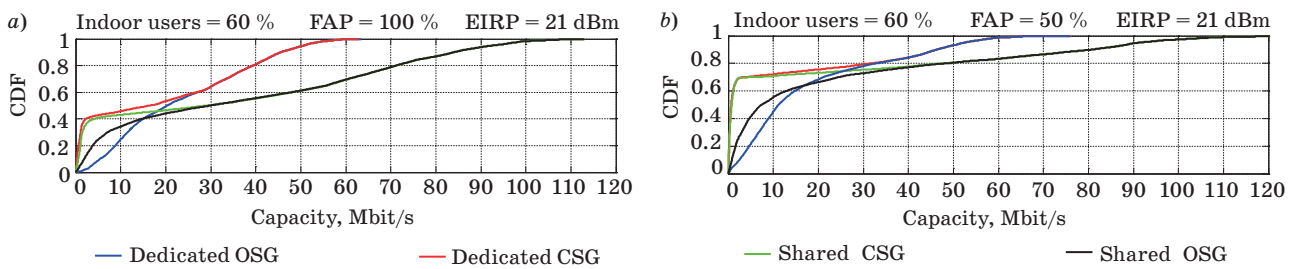
60 % from the total number of indoor users in area of service.

The dedicated OSG allows for achieving higher data rate for the same usage of FAPs — 50, 70 or 100 %.

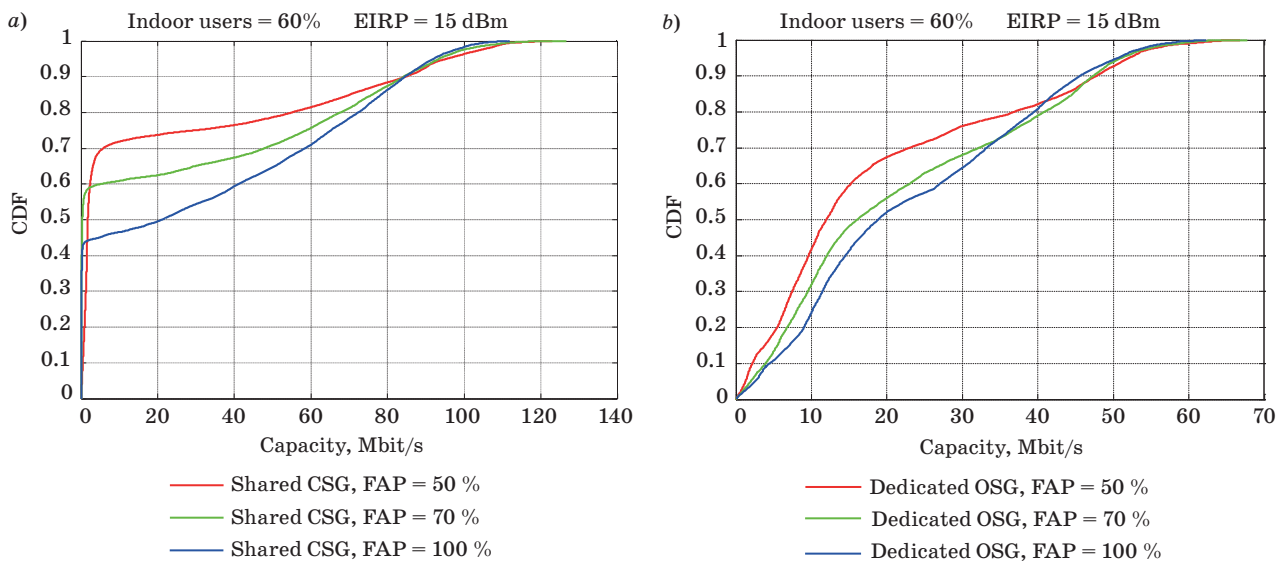
Figures 21 and 22 show the CDF of the signal capacity for the dedicated CSG and shared network configuration, respectively, for different percentage of indoor users, 20, 40, and 60 %, and for number of FAPs used by these indoor users: 70 % (*a*) and 100 % (*b*).

We can see that, again, the shared CSG concept allows us to obtain higher data rate (or capacity) for the same number of FAPs deployed by indoor users.

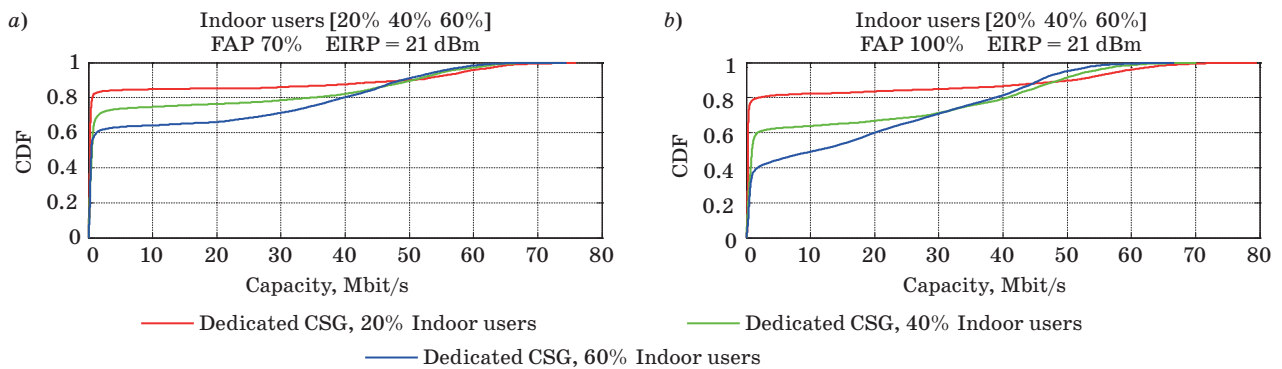
The obtained results allow us to conclude that the water-filling techniques for the optimal power allocation of FAPs can be fully implemented for predicting the different femtocell-macrocell network configurations with different tradeoffs for indoor, outdoor and femto-users densities. The similarly obtained results



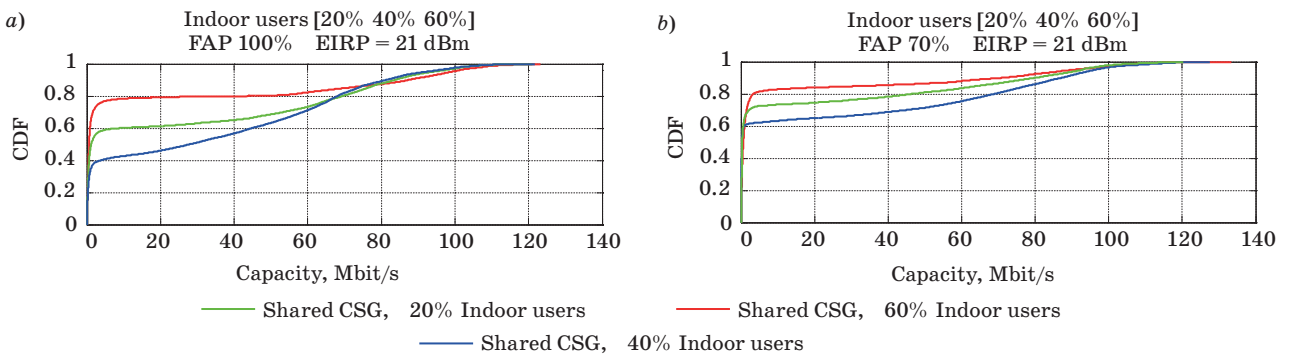
■ **Fig. 19.** Distribution of signal data capacity for four network configurations for different FAP's distribution: 100 % (*a*) and 50 % (*b*). The effective irradiated power is 21 dBm; the number of indoor users is 60 % from all subscribers in the tested area



■ **Fig. 20.** CDF of signal capacity for shared CSG (*a*) and dedicated OSG (*b*) for different FAPs densities, of 50, 70, and 100 %, for indoor users using FAP of 60 % from the total number of users in area of service



■ Fig. 21. CDF of the capacity for the same dedicated CSG network configuration for different percentage of indoor users, 20, 40, and 60 %, and for number of FAPs used by these indoor users: 70 % (a) and 100 % (b)



■ Fig. 22. Network configurations vs. different percentage of indoor users, 20, 40, and 60 %, for shared CSG scenario

for two frameworks, with and without the water-filling mechanism, have shown an improvement in the capacity distribution results between the users of joint femtocell-macrocell co-existing systems.

### Experimental verification of the total path loss in femtocell — microcell areas

Now we will compare results of numerical computations of propagation outdoor-indoor model for femtocell employments in picocell and microcell environments with experiments carried out in special built-up environment [22].

In the first cycle of experiments we show only the part of the specific area topographic map that corresponds to a femtocell-picocell environment surrounding one of the two-story building, as shown in Fig. 23, where the position of the transmitting antenna is denoted by the circle.

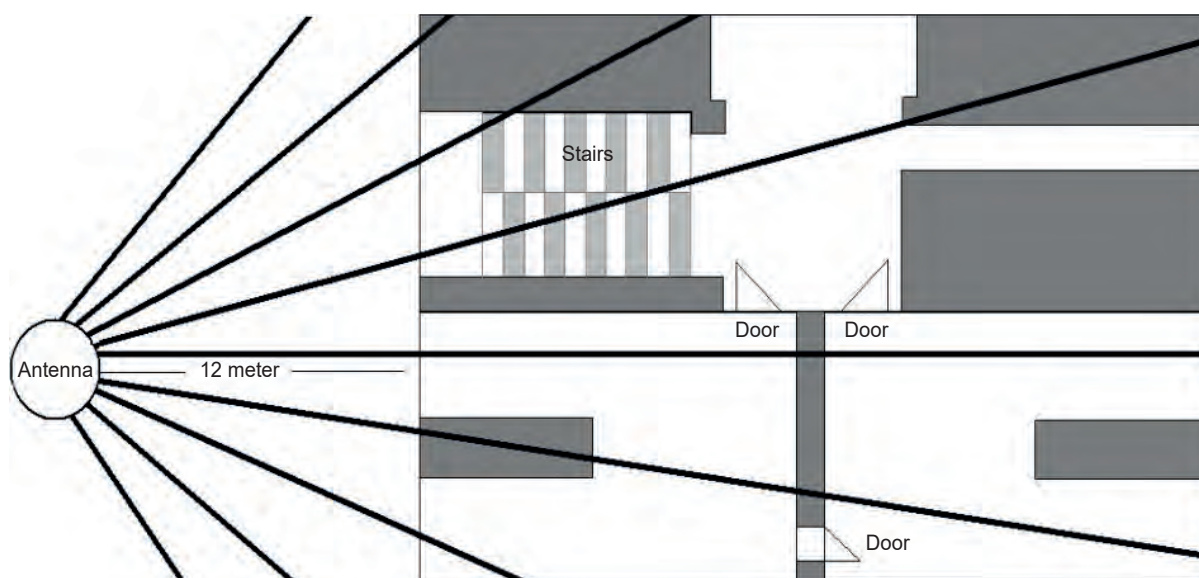
The vertically polarized transmitting sectoral antenna was installed 12 meters apart from the building, at 2-meter height. The receiving antenna was positioned inside the building at a height of 5 meters (i. e., at the 2<sup>nd</sup> floor). It was arranged at the

notebook as a wireless card with its dipole micro antenna. This experiment corresponds to “femto-cell-picocell-microcell” conditions.

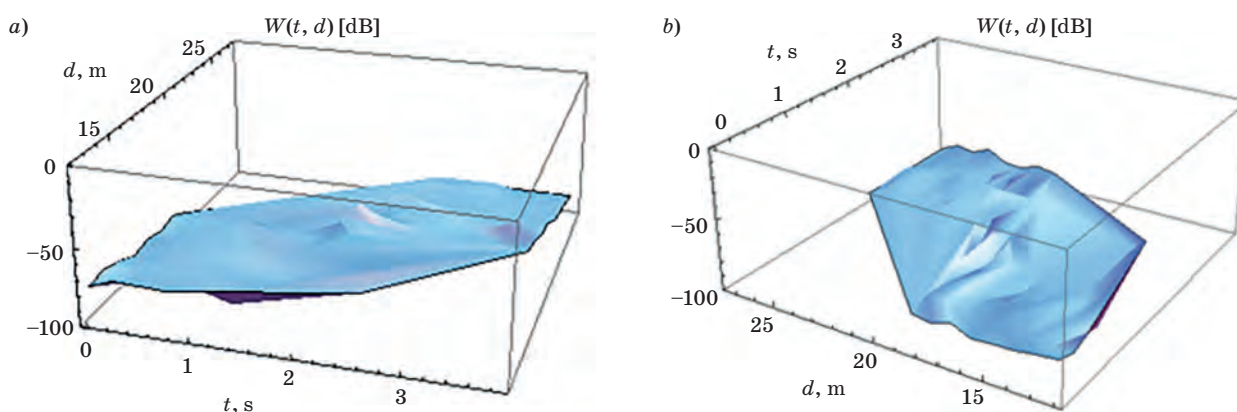
Measurements were carried out for each meter along the radiopath outside and inside the building, and the corresponding signal strength was measured. The power of the transmitting signal was 12 dBm and the frequency was 2.450 GHz. Due to scanning of the transmitting antenna (see straight lines in Fig. 23) in the azimuth domain, different angles of beam direction were taken, starting from 30 degrees up to 150 degrees, as it is seen in Fig. 23. We will present two characteristic graphs obtained experimentally according to 3D numerical code. The measured results are shown in Fig. 24, a and b.

The corresponding numerical simulations of the same conditions of the experiment are shown in Fig. 25, a and b.

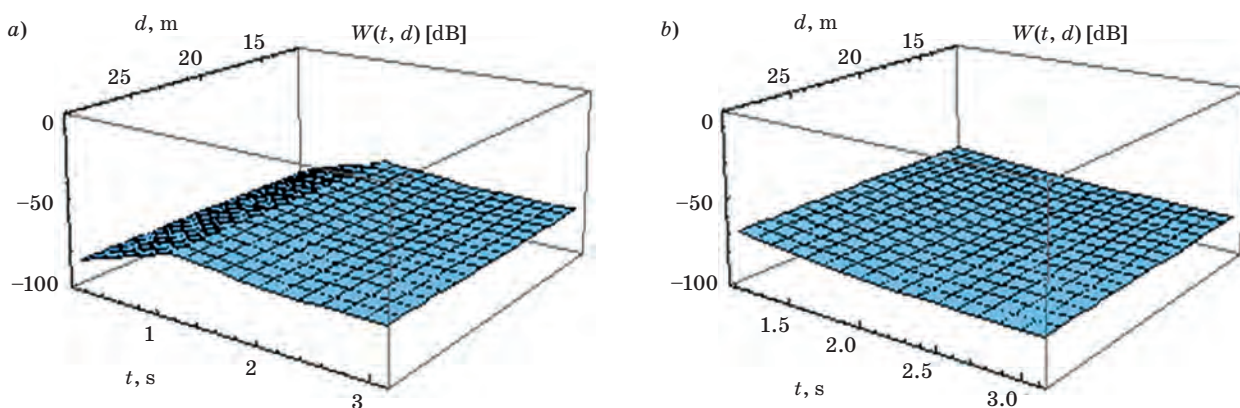
It was found, both, theoretically and experimentally that after passing a wall of bricks the signal intensity falls to  $-14\div-17$  dB, and then attenuates smoothly according to Equation (42) along the corridor. Despite the fact that the measured and the numerically predicted results of the signal 3D pattern have not the same shape and form, they both



■ **Fig. 23.** The scheme of the experimental site. The transmitter antenna is denoted by circle and located outside the building at the range of 12 m from the front wall of the building. Each line presents the radio path in azimuth domain where the angle is changed from 30 to 150 degrees



■ **Fig. 24.** Experimentally obtained 3D pattern of the signal power in the joint time-distance domain for the azimuth of 60 degrees (a) and 135 degrees (b)



■ **Fig. 25.** Numerical simulation outdoor-indoor link where all simulation data corresponds to the experiment: a — presented in Fig. 24, a; b — presented in Fig. 24, b

predict the sharp attenuation during as the signal passes through the wall, and they predict the same attenuation with accuracy of  $\pm(3\div 5)$  dB.

We should notice that inside the building, due to multi-diffraction and multi-reflection effects from each inner architectural construction, the measured data showed strong oscillations of the recording signal strength (see Fig. 24, *a, b*), whereas the simulated data show much weaker oscillations (see Fig. 25, *a, b*).

Behind the building, theoretical model is a poor predictor of the experimental data. The difference between theory and experiment is of the order of

10–15 dB. This occurs because in formula (42) the effects of attenuation due to several walls is not taken into account, as well as the effects of furniture and other architectural structures that can work as the “secondary sources of diffraction”, increasing overall intensity of the signal. Therefore, the multi-parametric stochastic approach, presented above, is limited, as a good predictor of propagation phenomena in indoor/outdoor femtocell-microcell communication environment, where all features and constructions, existing inside each room under testing, should be taken into account.

*Ending follows.*

## References

1. **Jakes W. C.** *Microwave Mobile Communications*. Wiley, New York, 1974.
2. **Lee S. C. Y.** *Mobile Cellular Telecommunication Systems*. McGraw-Hill, New York, 1989.
3. **Steele R.** *Mobile Radio Communication*. IEEE Press, 1992.
4. **Proakis J. G.** *Digital Communications* (3d ed.). McGraw-Hill, New York, 1995.
5. **Stuber G. L.** *Principles of Mobile Communications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
6. **Peterson R. L., Ziemer R. E., and Borth D. E.** *Introduction to Spread Spectrum Communications*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1995.
7. **Rappaport T. S.** *Wireless Communications: Principles and Practice*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1996 (2nd ed. in 2001).
8. **Steele R., and Hanzo L.** *Mobile Communications*. 2nd ed. John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
9. **Li J. S., and Miller L. E.** *CDMA Systems Engineering Handbook*. Artech House, Boston-London, 1998.
10. **Saunders S. R.** *Antennas and Propagation for Wireless Communication Systems*. John Wiley & Sons, Chichester, 2001.
11. **Burr A.** *Modulation and Coding for Wireless Communications*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 2001.
12. **Molisch A. F.** (Ed.). *Wideband Wireless Digital Communications*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 2000.
13. **Paetzold M.** *Mobile Fading Channels: Modeling, Analysis, and Simulation*. John Wiley & Sons, Chichester, 2002.
14. **Simon M. K., Omura J. K., Scholtz R. A., and Levitt B. K.** *Spread Spectrum Communications Handbook*. McGraw-Hill, New York, 1994.
15. **Glisic S. and Vucetic B.** *Spread Spectrum CDMA Systems for Wireless Communications*. Artech House, Boston-London, 1997.
16. **Dixon R. C.** *Spread Spectrum Systems with Commercial Applications*. John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
17. **Viterbi A. J.** *CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication*. Addison-Wesley Wireless Communications Series, 1995.
18. **Goodman D. J.** *Wireless Personal Communication Systems*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1997.
19. **Schiller J.** *Mobile Communications*. 2nd ed. Addison-Wesley Wireless Communications Series, 2003.
20. **Molisch A. F.** *Wireless Communications*. John Wiley & Sons, Chichester, 2007.
21. **Blaunstein N. and Christodoulou C.** *Radio Propagation and Adaptive Antennas for Wireless Communication Links*. 1st ed. Wiley & Sons, New Jersey, 2007.
22. **Blaunstein N. and Christodoulou C.** *Radio Propagation and Adaptive Antennas for Wireless Communication Networks — Terrestrial, Atmospheric and Ionospheric*. 2nd ed. Wiley & Sons, New Jersey, 2014.
23. **Hadar O., Bronfman I., and Blaunstein N. S.** Optimization of Error Concealment Based on Analysis of Fading Types. Part 1. Statistical Description of a Wireless Video Channel, Models of BER Determination and Error Concealment of Video Signals. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 1, pp. 72–82. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.72
24. **Hadar O., Bronfman I., and Blaunstein N. S.** Optimization of Error Concealment Based on Analysis of Fading Types. Part 2. Modified and New Models of Video Signal Error Concealment. Practical Simulations and their Results. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 2, pp. 67–76. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.2.67
25. **Vostrikov A., Kurtyanik D., Sergeev A.** Choosing Embedded WI-FI Module for Mobile Optic-Information Systems. *Vestnik*. 2018, no. 4, pp. 26–29 (In Russian).
26. **Vostrikov A., Balonin Yu., Kurtyanik D., Sergeev A., Sinityna O.** On Hybrid Method of Video Data Protection in IP-networks. *Telekommunikatsii* [Telecommunications], 2018, no. 2, pp. 34–39 (In Russian).
27. **Erosh I., Sergeev A., Filatov G.** Protection of Images During Transfer via Communication Channels. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2007, no. 5, pp. 20–22 (In Russian).

28. **Sergeev A.** Generalized Mersenne Matrices and Balonin's Conjecture. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2014, vol. 48, no. 4, pp. 214–220.
29. **Sergeev A. M., Blaunstein N. S.** Orthogonal Matrices with Symmetrical Structures for Image Processing. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 6, pp. 2–8 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2017.6.2
30. *Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications*. Ed. by E. Krouk, and S. Semenov. John Wiley & Sons, Chichester, United Kindom, 2011.
31. *Specification of the Bluetooth System*. Dec. 1, 1999. Available at: [www.bluetooth.com](http://www.bluetooth.com). (accessed 15 August 2017).
32. **Junaid M., Mufti M., and Ilyas M. U.** Vulnerabilities of IEEE 802.11i Wireless LAN. *Trans. Eng., Comput. and Technol.*, Feb. 2006, vol. 11, pp. 228–233.
33. *IEEE 802.11 Working Group*. Available at: <http://grouper.ieee.org/groups/802/11/index.html> (accessed 15 August 2017).
34. *Wireless Ethernet Compatibility Alliance*. Available at: <http://www.wirelessethernet.org/index.html> (accessed 15 August 2017).
35. **Sharon O., and Altman E.** An Efficient Polling MAC for Wireless LANs. *IEEE/ACM Trans. on WiMAX Systems Evaluation Methodology V2.1etworking*, 2001, vol. 9, no. 4, pp. 439–451.
36. IEEE std. 802.11-1999: *Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHL) Specifications*, 1999.
37. **Qainkhani I. A., and Hossain E.** A Novel QoS-aware MAC Protocol for Voice Services over IEEE 802.11-based WLANs. *J. Wireless Communic. and Mobile Comput.*, 2009, vol. 9, pp. 71–84.
38. *Wireless LAN Medium Access Control and Physical Layer Specification*. IEEE Press, 1999, Jan. 14.
39. **Zyren J.** *Reliability of IEEE 802.11 High Rate DSSS WLANs in a High Density Bluetooth Environment*; 802.11 section, 8–6, 1999.
40. **Perahia E.** IEEE 802.11n Development: History, Process, and Technology. *IEEE Communic. Magazine*, 2008, vol. 46, pp. 46–55.
41. **Ni Q., Romshani L., and Turletti T.** A Survey of QoS Enhancements for IEEE 802.11 Wireless LAN. *J. Wireless Communic. and Mobile Comput.*, 2004, vol. 4, no. 5, pp. 547–566.
42. **Wang W., Liew S. C., and Li V. O. K.** Solutions to Performance Problems in VoIP over 802.11 Wireless LAN. *IEEE Trans. Veh. Tech.*, 2005, vol. 54, no. 1, pp. 366–384.
43. **Robinson J. W., and Randhawa T. S.** Saturation Throughput Analysis of IEEE 802.11e Enhanced Distributed Coordination Function. *IEEE J. Select. Areas of Communic.*, 2004, vol. 22, no. 5, pp. 917–928.
44. **Wang P., Jiang H., and Zhuang W.** 802.11e Enhancement for Voice Service. *IEEE Wireless Communic.*, 2006, vol. 13, no. 1, pp. 30–35.
45. **Perez-Costa X., and Camps-Mur D.** IEEE 802.11e QoS and Power Saving Features Overview and Analysis of Combined Performances. *IEEE Wireless Communic.*, 2010, vol. 17, no. 2, pp. 88–96.
46. **Kopsel A., and Wolisz A.** Voice Ptransmission in an IEEE 802.11 WLAN Based Access Network. *Proc. of 4<sup>th</sup> ACM Int. Workshop on Wireless Mobile Multimedia (WoWMoM)*, Rome, Italy, 2001, pp. 24–33.
47. **Veeraraghavan M., Chocker N., and Moors T.** Support of Voice Services in IEEE 802.11 Wireless LANs. *Proc. of IEEE INFOCOM'01*, 2001, vol. 1, pp. 488–497.
48. **Kim Y.-J., and Suh Y.-J.** Adaptive Polling MAC Schemes for IEEE 802.11 Wireless LANs Supporting Voice-over-IP (VoIP) Services. *J. Wireless Communic. and Mob. Comput.*, 2004, vol. 4, pp. 903–916.
49. **Andersen J. B.** Array Gain and Capacity of Known Random Channels with Multiple Element Arrays at Both Ends. *IEEE J. Selected Areas in Commun.*, 2000, vol. 18, pp. 2172–2178.
50. **Blaunstein N., and Yarkoni N.** Capacity and Spectral Efficiency of MIMO Wireless Systems in Multipath Urban Environment with Fading. *Proc. of the European Conf. on Antennas and Propagation, EuCAP-2006*, Nice, France, 2006, pp. 111–115.
51. **Tsalolihin E., Bilik I., and Blaunstein N.** MIMO Capacity in Space and Time Domain for Various Urban Environments. *Proc. of 5<sup>th</sup> European Conf. on Antennas and Propagation, EuCAP*, Rome, Italy, 11–15 April, 2011, pp. 2321–2325.
52. **Chizhik D., Farrokhi F., Ling J., and Lozano A.** Effect of Antenna Separation on Capacity of BLAST in Correlated Channels. *IEEE Commun. Letters*, 2000, vol. 4, no. 11.
53. **Gesbert D., Shafi M., Shiu D., Smith P., and Naguib A.** From Theory to Practice: An Overview of MIMO Space-Time Coded Wireless Systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Comm.*, 2003, vol. 21, no. 3, pp. 281–302.
54. *Radioplan*. RPS user Manual 5.4. Available at: <http://www.actix.com> (accessed 15 August 2017).
55. **Philippe J., Schumacher L., Pedersen K., Mogensen P., and Frederiksen F.** A Stochastic MIMO Radio Channel Model with Experimental Validation. *IEEE J. Selected Areas in Commun.*, 2002, vol. 20, no. 6, pp. 1211–1226.
56. **Gesbert D., Boleskei H., Gore D. A., and Paulraj A. J.** Outdoor MIMO Wireless Channels: Models and Performance Prediction. *IEEE Trans. Commun.*, 2002, vol. 50, no. 6, pp. 1926–1934.
57. **Boleskei H., Borgmann M., and Paulraj A. J.** On the Capacity of OFDM-based Spatial Multiplexing Systems. *IEEE Trans. Commun.*, 2002, vol. 50, no. 1, pp. 225–234.
58. **Boleskei H., Borgmann M., and Paulraj A. J.** Impact of the Propagation Environment on the Performance of Space-Frequency Coded MIMO-OFDM. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 2003, vol. 21, no. 2, pp. 427–439.

59. Chizik D., Ling J., Wolniansky P. W., Valenzuela R. A., Costa N., and Huber K. Multiple-input-multiple-output Measurements and Modeling in Manhattan. *IEEE J. on Selected Areas in Commun.*, 2003, vol. 23, no. 2, pp. 321–331.
60. Oyman O., Nabar R. U., Boleskei H., and Paulraj A. J. Characterizing the Statistical Properties of Mutual Information in MIMO Channels. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2003, vol. 51, pp. 2784–2795.
61. Paulraj A. J., Gore D. A., Nabar R. U., and Boleskei H. An Overview of MIMO Communications — A Key to Gigabit Wireless. *Proc. of IEEE*, 2004, vol. 92, no. 2, pp. 198–218.
62. Forenza A., et al. Adaptive MIMO Transmission for Exploiting the Capacity of Spatially Correlated Channels. *IEEE Trans. Vehic. Technol.*, 2007, vol. 56, no. 2, pp. 619–630.
63. Foschini G. J., and Gans M. J. On Limits of Wireless Communications in a Fading Environment when using Multiple Antennas. *Wireless Person. Commun.*, 1998, vol. 6, no. 3, pp. 311–335.
64. Proakis J. G. *Digital Communications*. 4<sup>th</sup> ed. McGraw-Hill, New York, 2001.
65. Paulraj A. J., and Kailath T. *Increasing Capacity in Wireless Broadcast Systems using Distributed Transmission/Directional Reception (DTDR)*. US patent 5,345,599, Sept. 6, 1994.
66. Foschini G. J. Layered Space-time Architecture for Wireless Communication in a Fading Environment when using Multiple Antennas. *Bell Labs. Tech. J.*, 1996, vol. 1, no. 2, pp. 41–59.
67. Golden G. D., Foschini G. J., Valenzuela R. A., and Wolniansky P. W. Direction Algorithm and Initial Laboratory Results using the V-BLAST Space-time Communication Architecture. *Electron. Lett.*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 14–15.
68. Nabar R. U., Boleskei H., Erceg V., Gesbert D., and Paulraj A. J. Performance of Multiantenna Signaling Techniques in the Presence of Polarization Diversity. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2002, vol. 50, no. 10, pp. 2553–2562.
69. Zheng L., and Tse D. Diversity and Multiplexing: A Fundamental Tradeoff in Multiple Antenna Channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2003, vol. 49, no. 5, pp. 1073–1096.
70. Varadarajan B., and Barry J. R. The Rate-diversity Trade-off for Linear Space-time Codes. *Proc. IEEE Vehicular Tech. Conf.*, 2002, vol. 1, pp. 67–71.
71. Godovarti M., and Nero A. O. Diversity and Degrees of Freedom in Wireless Communications. *Proc. ICASSP*, May 2002, vol. 3, pp. 2861–2864.
72. Raleigh G. G., and Cioffi J. M. Spatio-temporal Coding for Wireless Communication. *IEEE Trans. Commun.*, 1998, vol. 46, no. 3, pp. 357–366.
73. Wittniben A. Base Station Modulation Diversity for Digital Simulcast. *Proc. IEEE Vehicular Tech. Conf.*, May 1991, pp. 848–853.
74. Seshadri N., and Winters J. H. Two Signaling Schemes for Improving the Error Performance of Frequency-Division-Duplex (FDD) Transmission Systems using Transmitter Antenna Diversity. *Int. J. Wireless Inform. Networks*, 1994, vol. 1, no. 1, pp. 49–60.
75. Alamouti S. M. A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 1998, vol. 16, no. 8, pp. 1451–1458.
76. Tarokh V., Seshadri N., and Calderbank A. R. Space-time Codes for High Data Rate Wireless Communication: Performance Criterion and Code Construction. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1999, vol. 45, no. 5, pp. 1456–1467.
77. Ganesan G., and Stoica P. Space-time Block Codes: A Maximum SNR Approach. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2001, vol. 47, no. 4, pp. 1650–1656.
78. Hassibi B., and Hochwald B. M. High-rate Codes that are Linear in Space and Time. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2002, vol. 48, no. 7, pp. 1804–1824.
79. Heath Jr., R. W., and Paulraj A. J. Linear Dispersion Codes for MIMO Systems based on Frame Theory. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2002, vol. 50, no. 10, pp. 2429–2441.
80. Winters J. H. The Diversity Gain of Transmit Diversity in Wireless Systems with Rayleigh Fading. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 1998, vol. 47, no. 1, pp. 119–123.
81. Bjerke B. A., and Proakis J. G. Multiple-antenna Diversity Techniques for Transmission over Fading Channels. *Proc. Wireless Commun. and Networking Conf.*, Sept. 1999, vol. 3, pp. 1038–1042.
82. Heath Jr., R. W., and Paulraj A. J. Switching between Diversity and Multiplexing in MIMO Systems. *IEEE Trans. Commun.*, 2005, vol. 53, no. 6, pp. 962–968.
83. Chandrasekhar V., Andrews J. G., and Gatherer A. Femtocell Networks: A Survey. *IEEE Commun. Magazine*, 2003, vol. 46, no. 9, pp. 59–67.
84. Shannon C. E. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Tech. J.*, July and October 1948, vol. 27, pp. 379–423 and pp. 623–656.
85. Yeh S.-P., Talwar S., Lee S.-C., and Kim H. WiMAX Femtocells: A Perspective on Network Architecture, Capacity, and Coverage. *IEEE Commun. Magazine*, 2008, vol. 46, no. 10, pp. 58–65.
86. Knisely D. N., Yoshizawa T., and Favichia F. Standardization of Femtocells in 3GPP. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 9, pp. 68–75.
87. Knisely D. N., and Favichia F. Standardization of Femtocells in 3GPP2. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 9, pp. 76–82.
88. Chandrasekhar V., and Andrews J. G. Uplink Capacity and Interference Avoidance for Two-tier Femtocell Networks. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2009, vol. 8, no. 7, pp. 3498–3509.
89. Calin D., Claussen H., and Uzunalioglu H. On Femto Deployment Architectures and Macrocell Offloading Benefits in Joint Macro-femto Deployments. *IEEE Commun. Magazine*, 2010, vol. 48, no. 1, pp. 26–32.

90. Kim R. Y., Kwak J. S., and Etemad K. WiMAX Femtocell: Requirements, Challenges, and Solutions. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 9, pp. 84–91.
91. Lopez-Perez D., Valcarce A., de la Roche G., and Zhang J. OFDMA Femtocells: A Roadmap on Interference Avoidance. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 9, pp. 41–48.
92. Chandrasekhar V., Andrews J. G., Muharemovic T., Shen Z., and Gatherer A. Power Control in Two-tier Femtocell Networks. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2009, vol. 8, no. 8, pp. 4316–4328.
93. Yavuz M., Meshkati F., Nanda S., et al. Interference Management and Performance Analysis of UMTS/HSPA + Femtocells. *IEEE Commun. Magazine*, 2009, vol. 47, no. 9, pp. 102–109.
94. *Femto Forum*. Available at: <http://www.femtoforum.org/femto/> (accessed 15 August 2017).
95. Blaunstein N. S., and Sergeev M. B. Channel Capacity Prediction for Femtocell-Macrocell Deployment Strategies in the Urban Environments with Congested Layout of Users. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2012, no. 3, pp. 54–62 (In Russian).
96. Tsalolihin E., Bilik I., Blaunstein N., and Babich Y. Channel Capacity in Mobile Broadband Heterogeneous Networks based on Femtocells. *Proc. of Eu-CAP-2012 Int. Conf.*, Prague, Czech Republic, March 26–30, 2012, pp. 1–5.
97. Blaunstein N., and Levin M. VHF/UHF Wave Attenuation in a City with Regularly Spaced Buildings. *Radio Science*, 1996, vol. 31, no. 2, pp. 313–323.
98. Blaunstein N. Prediction of Cellular Characteristics for Various Urban Environments. *J. Antenn. and Propagat. Magazine*, 1999, vol. 41, no. 6, pp. 135–145.
99. Blaunstein N. Average Field Attenuation in the Non-regular Impedance Street Waveguide. *IEEE Trans. on Antenn. and Propagat.*, 1998, vol. 46, no. 12, pp. 1782–1789.
100. Blaunstein N., Katz D., Censor D., et al. Prediction of Loss Characteristics in Built-up Areas with Various Buildings' Overlay Profiles. *J. Antenn. and Propagat. Magazine*, 2002, vol. 44, no. 1, pp. 181–192.
101. Yarkoni N., Blaunstein N., and Katz D. Link Budget and Radio Coverage Design for Various Multipath Urban Communication Links. *Radio Science*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 412–427.
102. Katz D., Blaunstein N., Hayakawa M., and Kishiki Y. S. Radio Maps Design in Tokyo City based on Stochastic Multi-parametric and Deterministic Ray Tracing Approaches. *J. Antenn. and Propag. Magazine*, 2009, vol. 51, no. 5, pp. 200–208.
103. Okumura Y., Ohmori E., Kawano T., and Fukuda K. Field Strength and its Variability in the VHF and UHF Land Mobile Radio Service. *Review Elect. Commun. Lab.*, 1968, vol. 16, no. 9-10, pp. 825–843.
104. Wells P. J. The Attenuation of UHF Radio Signal by Houses. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 1977, vol. 26, no. 4, pp. 358–362.
105. Bertoni H. L. *Radio Propagation for Modern Wireless Systems*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 2000.
106. Seidel S. Y., and Rappaport T. S. 914 MHz Path Loss Prediction Models for Indoor Wireless Communications in Multifloored Buildings. *IEEE Trans. Antenn. Propagat.*, 1992, vol. 40, no. 2, pp. 200–217.
107. Yarkoni N., and Blaunstein N. Prediction of Propagation Characteristics in Indoor Radio Communication Environments. *J. Electromagnetic Waves and Applications: Progress in Electromag. Research, PIER*, 2006, vol. 59, pp. 151–174.
108. Yu W., Ginis G., and Cioffi J. M. Distributed Multi-user Power Control for Digital Subscriber Lines. *IEEE J. Select. Areas in Commun.*, 2002, vol. 20, no. 5, pp. 1105–1115.
109. Scutari G., and Barbarossa D. P. P. Optimal Linear Precoding Strategies for Wideband non-cooperative Systems Based on Game Theory. Part II. Algorithms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2008, vol. 56, no. 3, pp. 1250–1267.
110. Scutari G., Palomar D. P., and Barbarossa S. Asynchronous Iterative Water-filling for Gaussian Frequency-selective Interface Channels. *IEEE Trans. Information Theory*, 2008, vol. 54, no. 7, pp. 2868–2878.

УДК 621.371

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-82-94

Эволюция многопроцессорных систем связи — сотовых и несотовых — в исторической перспективе. Часть 3

А. М. Сергеев<sup>а</sup>, старший преподаватель, [orcid.org/0000-0002-4788-9869](http://orcid.org/0000-0002-4788-9869)Н. Ш. Блаунштейн<sup>б</sup>, доктор физ.-мат. наук, профессор, [nathan.blaunstein@hotmail.com](mailto:nathan.blaunstein@hotmail.com)<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ<sup>б</sup>Негевский университет им. Бен-Гуриона, П.О.Б. 653, Бен-Гуриона ул., 1, г. Беэр-Шева, 74105, Израиль

**Постановка проблемы:** целью данного обзора является анализ эволюции систем беспроводной связи от второй генерации (2G) до пятой генерации (5G), а также изменения технологий и их существующих теоретических основ и протоколов — от Bluetooth, WLAN, WiFi и WiMAX до LTE, OFDM/OFDMA, MIMO и LTE/MIMO — продвинутых технологий с новой иерархической структурой дизайна сотовых карт фемто/пико/микро/макро. **Методы:** использованы новые теоретические подходы для описания продви-

нутых технологий, таких как многопользовательская техника разделения пользователей, OFDM и OFDM новейший подход, новые аспекты описания MIMO-систем на базе использования многолучевых антенн, дизайн различных сотовых карт на основе новых алгоритмов построения фемто/пико/микро/макро сот, а также новой методологии интегрирования новой MIMO/LTE-системы с помощью многолучевых антенн. **Результаты:** создана новая методология описания многопользовательского разделения, использования комбинированной OFDM/OFDMA-модуляции для обхода интерференции между пользователями и между символами в новых многопроцессорных системах, мультипликативных шумов, имеющих место в беспроводных многопроцессорных системах связи, вызванных явлениями многолучевости. В итоге предложено, как обойти эффекты распространения, имеющие место в наземных каналах связи, используя комбинацию MIMO- и LTE-технологий, основанных на применении многолучевых антенн. Для этих целей разработан новый стохастический подход к проблеме, учитывающий особенности застройки земной поверхности, такие как профиль застройки домов, плотность застройки домов вокруг антенн базовой станции и пользователей и т. д. Эти характеристики позволяют в итоге оценить эффекты фединга как источника мультипликативного шума. **Практическая значимость:** новая методология оценки эффектов, созданных мультипликативным шумом, интерференцией между пользователями и между символами, имеющими место в наземных системах беспроводной связи, позволяет прогнозировать практические аспекты существующих и новых многопроцессорных беспроводных систем связи, такие как емкость (количество) пользователей и спектральная эффективность каналов пользователей для различных конфигураций построения сот — фемто/пико/микро/макро, а также новейших конфигураций систем MIMO/LTE для построения будущих систем 4-го и 5-го поколений.

**Ключевые слова** — емкость, закрытая пользовательская группа, CSG, установленное спектральное обозначение, DSA, фемтосота, пункт фемтопроцесса, FAP, уровень сервиса, GoS, качество сервиса, QoS, микросота, макросота, открытая пользовательская группа, OSG, потери на пути распространения, пикосота, выборочное спектральное обозначение, SSA, отношение сигнала к шуму, SNR, волноводная модель улицы, стохастическая модель городской застройки, беспроводная пользовательская сеть, WiFi, беспроводная сеть метрополии, WiMAX.

**Цитирование:** Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 3. Информационно-управляющие системы, 2018, № 6, с. 82–94. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-82-94  
**Citation:** Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 3. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 82–94. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-82-94

## ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

*Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.*

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (ius.spb@gmail.com).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию. Рукописи не возвращаются.

*Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.*



## Метод навигации и коллаборативного полуавтоматического построения карт сигналов Wi-Fi внутри помещений

М. С. Щекотов<sup>а</sup>, научный сотрудник, [orcid.org/0000-0003-0817-6791](https://orcid.org/0000-0003-0817-6791), [shekotov@iias.spb.su](mailto:shekotov@iias.spb.su)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, 14-я линия В. О., 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ

**Постановка проблемы:** одной из проблем, связанных с применением метода мультилатерации сигналов Wi-Fi или Bluetooth Low Energy и метода радиоотпечатков сигналов Wi-Fi для определения местоположения пользователя внутри помещения, является трудоемкая процедура настройки оборудования, которая включает в себя построение карты радиосигналов Wi-Fi и калибровку модели распространения сигнала Wi-Fi или Bluetooth Low Energy. **Цель:** разработка метода навигации и коллаборативного полуавтоматического построения карт радиосигналов Wi-Fi, который обеспечивает навигацию пользователя внутри помещения и одновременно с этим позволяет калибровать модель распространения сигнала Bluetooth Low Energy и строить карты радиосигналов Wi-Fi. **Результаты:** предложен метод коллаборативного полуавтоматического построения карт сигналов Wi-Fi и навигации внутри помещений, основанный на комбинации метода мультилатерации принимаемого сигнала Bluetooth Low Energy, метода радиоотпечатков Wi-Fi, полуавтоматической процедуры калибровки модели распространения сигнала Bluetooth Low Energy и метода коллаборативного сбора радиоотпечатков. Для полуавтоматической процедуры калибровки модели распространения сигнала Bluetooth Low Energy и для метода коллаборативного полуавтоматического построения карт сигналов Wi-Fi и навигации внутри помещений предложены соответственно алгоритм калибровки и алгоритм метода коллаборативного полуавтоматического построения карт сигналов Wi-Fi и навигации. Написано мобильное приложение, реализующее предложенные алгоритмы, с помощью которого проведены тестирование работы алгоритмов метода и анализ результатов. **Практическая значимость:** предложенный метод позволяет не осуществлять трудоемкие процедуры построения карты радиосигналов Wi-Fi и полуавтоматической калибровки модели распространения сигнала Bluetooth Low Energy в офлайн-фазе.

**Ключевые слова** – определение местоположения внутри помещений, контекстно-ориентированные системы, мультилатерация, краудсорсинг.

**Цитирование:** Щекотов М. С. Метод навигации и коллаборативного полуавтоматического построения карт сигналов Wi-Fi внутри помещений. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 95–104. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-95-104

**Citation:** Shekotov M. S. Method of indoor navigation and collaborative semi-automatic Wi-Fi radiomap construction. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 95–104 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-95-104

### Введение

Сервисы определения местоположения (локализации) внутри помещений, несмотря на их малую распространенность, остаются актуальным направлением для широкого спектра исследований. Традиционно в качестве зданий, для которых решается данная задача, рассматриваются аэропорты, музеи [1], торговые центры или офисные помещения. В зависимости от поставленной задачи в качестве локализуемого объекта можно рассматривать точку доступа Wi-Fi [2], опорный узел [3], мобильное устройство, робота [4] и т. п. Кроме того, в качестве объекта рассматриваются не только здания, но и другие формы инженерных сооружений, таких как шахты и т. п. [5–7]. Также областью определения местоположения и объектом локализации может быть транспортное средство [8, 9]. Следует отметить, что методы определения местоположения вне помещений, основанные на фиксации уровня принятого сигнала, времени прихода радиосигналов от пере-

датчиков [10–12], разнице времени прибытия радиосигналов [13], времени прохождения сигнала от передатчика к приемнику [14, 15], углу приема сигнала [16, 17] и направлении приема [18], применимы к задаче определения местоположения внутри помещения.

Для помещений более традиционными являются метод радиоотпечатков (fingerprinting) и метод мультилатерации. Первый основывается на измерении уровней сигналов в определенных заранее точках, которое производится в офлайн-фазе, т. е. до определения местоположения пользователя. В онлайн-фазе, или фазе навигации, производится оценка местоположения объекта путем сопоставления измерений, проведенных в онлайн-фазе, с предварительно собранными измерениями в офлайн-фазе [19, 20]. Метод радиоотпечатков способен достичь точности локализации порядка 2,5–3 м [21]. Метод мультилатерации уровней сигналов оперирует моделью распространения сигнала в помещении, на основе которой может быть произведена оценка расстоя-

ний до источников сигнала. Основная трудность, с которой приходится сталкиваться при реализации данных методов, — это трудоемкая процедура сбора предварительных измерений уровней сигналов. При использовании метода радиоотпечатков требуется собрать измерения уровней сигналов для того, чтобы составить базу радиоотпечатков, а для метода мультилатерации, — чтобы откалибровать параметры модели распространения сигнала в конкретном помещении. Подобные шаги существенно усложняют процедуру развертывания систем определения местоположения и приводят к значительному росту стоимости их внедрения.

Для того чтобы обойтись без трудоемкой процедуры измерения уровней сигналов в офлайн-фазе, предлагается использовать коллаборативное измерение уровней сигналов внутри помещений. Данный метод предполагает сбор необходимой информации непосредственно пользователями во время их перемещений по зданию и не требует непосредственного контроля со стороны пользователей. Предполагается, что объект локализации — это человек с мобильным устройством, а область локализации — это здание, доступное для посещения широкому кругу лиц. Так как метод локализации требует наличия плана помещений, предполагается, что такая карта уже предварительно получена. Целью метода является обеспечение точной локализации в помещениях без использования предварительной калибровки модели распространения сигнала или наполнения базы радиоотпечатков. Для достижения этой цели рассматривается метод навигации на основе мультилатерации сигналов Wi-Fi и Bluetooth Low Energy (BLE) в помещениях, для которых нет данных в базе радиоотпечатков, и метод навигации на основе базы радиоотпечатков Wi-Fi и BLE в помещениях, для которых есть данные в базе радиоотпечатков. Для уточнения местоположения при навигации используется метод счисления координат (Pedestrian Dead Reckoning — PDR), использующий данные встроенных сенсоров смартфона. В свою очередь во время процесса навигации происходит автоматическое построение карты радиосигналов с помощью методов мультилатерации и счисления координат. Данный процесс производится каждым пользователем по крайней мере единожды для каждого помещения. Уточнение местоположения методом счисления координат производится посредством полуавтоматической процедуры калибровки модели распространения радиосигнала. Этот метод использует логарифмическую модель потерь уровня сигнала Wi-Fi или BLE. Данная модель имеет параметр, учитывающий особенности среды. Этот параметр можно определить эмпирически во время процедуры

калибровки для каждого источника сигнала, что поможет учесть особенности среды распространения сигнала и снизить ошибку локализации.

### Самокалибрующиеся и коллаборативные системы определения местоположения внутри помещений

Существует ряд методов определения местоположения внутри помещений, обеспечивающих самокалибровку для различных целей. Однако имеется не так много методик, учитывающих корректировку модели распространения сигнала.

Предложенный в работе [22] алгоритм трилатерации основан на модели потерь уровня сигнала, зависящей от логарифма расстояния (log-distance path loss), использующей самокалибровку на основе оптимизации роя частиц (PSO) для определения параметров калибровки модели показателя потерь уровня сигнала, зависящего от логарифма расстояния. В [23] представлен метод радиоотпечатков, основанный на методе ближайшего соседа. Алгоритм использует фильтрацию Калмана для смягчения эффекта колебаний уровня сигнала. Затем некоторые параметры представленной модели преобразования радиоотпечатков калибруются с помощью метода наименьших квадратов. В [24] рассмотрено несколько процедур автоматической калибровки (виртуальной калибровки). Процедуры учитывают количество стен, пересекаемых сигналом, и коэффициенты затухания для этих стен и полов.

Система локализации PiLoc [25, 26] использует краудсорсинг для сбора траекторий перемещения пользователей с помощью встроенных датчиков смартфонов и радиоотпечатков сигналов Wi-Fi, связанных с координатами собранных траекторий перемещения. Алгоритм кластеризации используется для объединения значений уровня сигнала Wi-Fi и траекторий перемещения в непересекающиеся наборы, охватывающие различные помещения. Сгенерированные непересекающиеся наборы используются для поиска похожих сегментов, которые совпадают на основе векторов перемещения и сигналов точек доступа Wi-Fi, а также траектории объединяются для построения поэтажных планов помещений.

Метод, описанный в [27], предназначен для калибровки логарифмической модели потерь уровня сигнала BLE. Рассматриваемыми параметрами являются показатель потерь уровня сигнала и уровень принимаемого сигнала. Оценки положения, полученные при обработке принимаемого сигнала, используются для постепенной корректировки значений параметров модели распространения сигнала.

Процедура калибровки, основанная на калибровке узлов ZigBee [28], начинается с запроса калибровки мобильного узла, который получает калибруемый узел. Отправленное сообщение имеет информацию о фиксированном узле, который нужно откалибровать. После получения запроса калибровки узел калибровки передает пакет выбранному узлу. Выбранный узел получает его и повторно передает сообщение на мобильный узел после определенной задержки. Полученный результат измерения времени передачи сообщения используется для динамической оценки задержки, которая выполняется для каждого фиксированного узла.

### Метод навигации и коллаборативного полуавтоматического построения карт радиосигналов

Предлагаемый метод навигации внутри помещения и построения карт радиосигналов позволяет решать задачи навигации внутри помещения с известным планом помещения и расположением маяков Wi-Fi и BLE в условиях, когда модели распространения сигналов не откалиброваны и карты радиосигналов не построены. Так как в основе навигации лежит использование сигналов Wi-Fi и BLE, то для создания эффективного метода навигации внутри помещений необходимо рассматривать те ограничения, которые накладывает использование данных технологий. В частности, использование BLE не позволяет строить карты радиосигналов BLE и брать их как основу для метода радиоотпечатков. В связи с этим для навигации предлагается использовать мультилатерацию сигналов BLE. Для навигации на основе сигналов Wi-Fi предлагается использовать метод радиоотпечатков. Так как метод радиоотпечатков оперирует базой радиоотпечатков,

в которой хранятся данные об уровнях радиосигнала в тех или иных опорных точках помещения, имеющих координаты, то можно утверждать, что база радиоотпечатков по своей сути является картой радиосигналов, которую следует построить.

Комбинируя данные техники определения местоположения, можно добиться существенного повышения точности локализации, так как использование маяков BLE позволяет отчасти решать проблему неопределенности, возникающую в тех случаях, когда разным участкам помещения соответствуют одни и те же уровни сигналов. Кроме того, благодаря предложенному методу можно существенно упростить офлайн-фазу, исключив из нее процессы построения карты радиосигналов (наполнения базы радиоотпечатков) и калибровки модели распространения сигнала BLE.

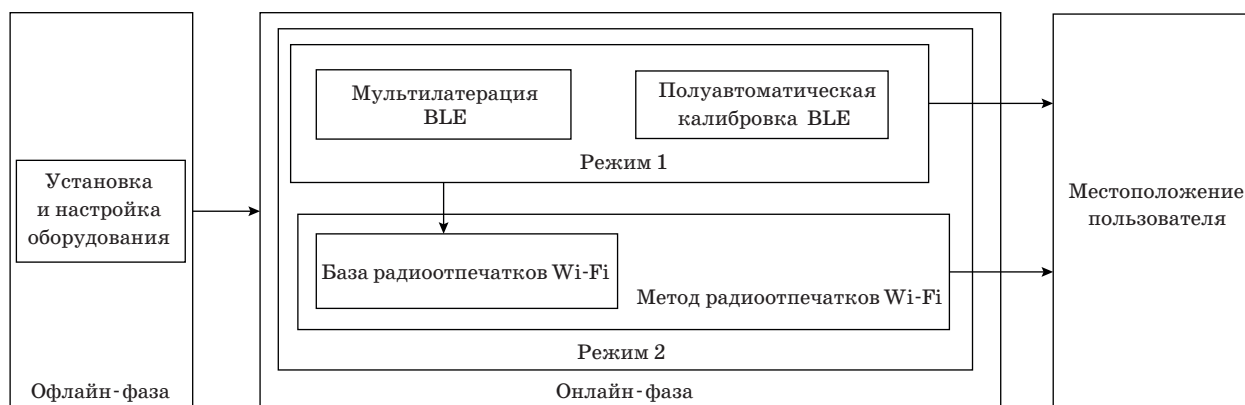
Таким образом, фазу навигации данного метода можно разделить на два режима.

*Режим 1.* Одновременное определение местоположения с помощью мультилатерации сигналов BLE и наполнение базы радиоотпечатков измеренными значениями уровней сигналов Wi-Fi активных точек доступа в привязке к определенным координатам. Для повышения точности мультилатерации используется процедура полуавтоматической калибровки параметров модели распространения сигнала BLE.

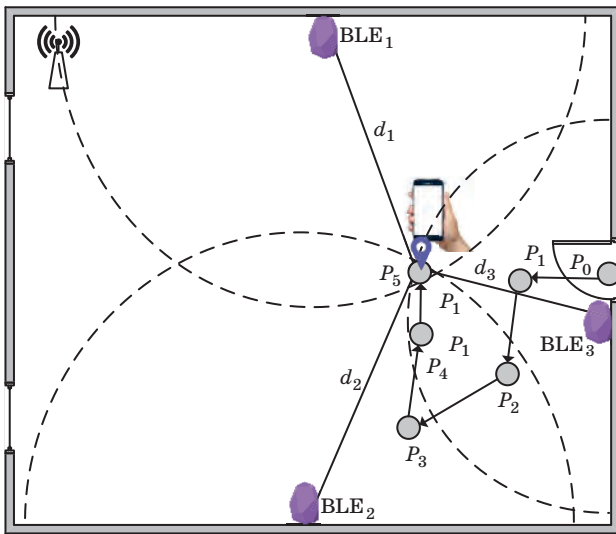
*Режим 2.* Определение местоположения с помощью мультилатерации сигналов BLE и метода радиоотпечатков Wi-Fi.

Концептуальная схема метода навигации и коллаборативного построения карт радиосигналов показана на рис. 1.

Рисунок 2 иллюстрирует процесс определения местоположения пользователя и сбор базы радиоотпечатков с помощью мультилатерации сигналов BLE, где точки  $P_1, \dots, P_5$  соответствуют точкам, в которых определяется местопоже-



■ **Рис. 1.** Концептуальная схема метода навигации и коллаборативного построения карт радиосигналов  
 ■ **Fig. 1.** The concept schema of the indoor navigation and collaborative radio map construction method



■ **Рис. 2.** Определение местоположения с помощью мультilaterации сигналов BLE  
 ■ **Fig. 2.** Indoor localization via BLE signal multilateration

ние пользователя и проводятся измерения уровня сигнала Wi-Fi точки доступа AP. Полученные значения уровней сигнала заносятся в базу радиопечатков. Расстояния  $d_1, d_2, d_3$  соответствуют расстояниям от пользователя до маяков BLE и определены с помощью метода мультilaterации. В ходе данного процесса используется процедура полуавтоматической калибровки модели распространения сигнала BLE. Данная процедура запускается при сближении пользователя с маяком BLE и служит для повышения точности определения местоположения. В ходе процедуры используется метод счисления координат для определения расстояния, на которое переместился пользователь, и его ориентации относительно маяка BLE. Процесс калибровки требует перемещения пользователя по прямолинейной траектории и в случае его отклонения от нее прекращается. На рис. 2 процесс калибровки модели распространения сигнала для маяка BLE<sub>3</sub> производится при перемещении между точками P<sub>0</sub> и P<sub>1</sub>.

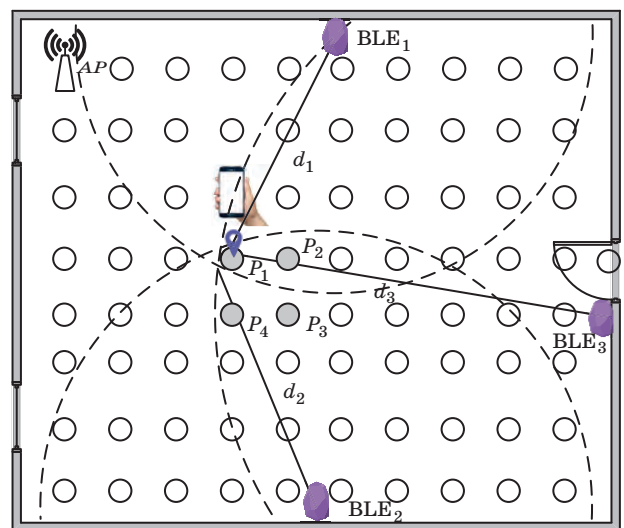
Мультilaterация — это метод локализации, который опирается на карту помещения и геометрические отношения между опорными узлами, а именно информацию о положениях опорных точек в среде и расстояний до них. Требуется по крайней мере три опорных узла, чтобы определить расстояния между целевым узлом и каждым опорным узлом. Каждый опорный узел образует окружность вокруг себя, а его радиус соответствует расстоянию до целевого узла. Пересечение этих окружностей охватывает область локализации целевого узла. В данном случае в роли опорных узлов выступают маяки BLE.

Широко используемыми подходами для обработки полученных данных являются фильтрация Калмана [11], скользящее среднее и тест Граббса, используемый для обнаружения выбросов [11]. В качестве модели распространения сигнала принимается модель потерь сигнала, зависящая от логарифма расстояния (log-distance path loss):

$$PL = P_T - P_R = PL_0 + 10n \lg \frac{d}{d_0} + X_{\sigma_{RSS}}, \quad (1)$$

где  $PL$  — показатель потерь мощности сигнала, дБ;  $P_T$  — передаваемая мощность, дБм;  $P_R$  — уровень (мощность) принимаемого сигнала, дБм;  $d$  — реальное расстояние между передатчиком и приемником;  $n$  — экспонента потерь сигнала;  $PL_0$  — потери сигнала, дБм, на расстоянии  $d_0$ ; величина  $X_{\sigma_{RSS}}$  — случайная величина ошибки, дБм.

Процесс определения местоположения с использованием мультilaterации сигналов BLE и метода радиопечатков Wi-Fi проиллюстрирован на рис. 3. При измерении уровня сигнала Wi-Fi определяются путем поиска соответствий в базе радиопечатков точки с эквивалентным значением уровня сигнала Wi-Fi —  $P_1, \dots, P_4$  в данном случае. С помощью метода мультilaterации сигналов BLE определяются расстояния  $d_1, d_2, d_3$ , соответствующие расстояниям от пользователя до маяков BLE, на основе которых определяется зона, в которой находится пользователь. В качестве точек, где может находиться пользователь, рассматриваются только те точки, которые попали в эту зону. В данном случае это точки P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>.



■ **Рис. 3.** Определение местоположения с помощью мультilaterации сигналов BLE и метода радиопечатков Wi-Fi  
 ■ **Fig. 3.** Indoor localization via BLE signal multilateration and Wi-Fi fingerprinting

Тогда алгоритм определения местоположения можно записать следующим образом.

1. Измерить уровень сигналов активных маяков BLE.

2. Если модель распространения сигнала для данного маяка не откалибрована, то произвести калибровку.

3. На основе уравнения (1) определить расстояния до маяков BLE и определить зону локализации объекта.

4. Измерить уровень сигналов Wi-Fi работающих точек доступа.

5. Найти соответствие в базе радиоотпечатков и получить множество опорных точек.

6. Если радиоотпечатки найдены, то исключить из рассмотрения опорные точки вне зоны, определенной по маякам BLE (см. рис. 3), и закончить выполнение алгоритма. В ином случае перейти к шагу 7.

7. Если радиоотпечатки не найдены, то на основе местоположения, определенного на шаге 3, создать радиоотпечаток сигналов Wi-Fi и поместить его в базу радиоотпечатков.

Поскольку база радиоотпечатков не наполняется предварительно в офлайн-фазе, то эта процедура происходит во время фазы навигации путем сбора информации от всех пользователей в пассивном режиме. Процесс запускается автоматически после входа пользователя в соответствующее помещение. Предварительно помещение условно разбивается на множество опорных точек  $P_1, \dots, P_n$ , в которых может быть измерен сигнал Wi-Fi. Количество точек для каждого помещения определяется из его размеров. Далее, при поступлении данных от пользователей, осуществляется усреднение значений уровня сигнала, если одной точке  $P_i$  соответствует  $k$  значений уровня сигнала.

### Полуавтоматическая калибровка параметров модели распространения сигнала BLE

Идея полуавтоматической калибровки заключается в том, что человек с мобильным устройством может предоставить необходимые данные для калибровки параметров модели распространения сигнала во время перемещения внутри помещения и использования специального мобильного приложения. Калибровка необходима для обеспечения точности определения местоположения при сборе данных об уровнях сигналов для создания базы радиоотпечатков. Для выполнения данной процедуры необходимо иметь карту помещения, информацию о местоположениях размещенных маяков и технические параметры маяков: UUID, мощность передаваемого сигнала

и т. п. Показания сенсоров начинают собираться в известной точке, соответствующей ближайшей к некоторому маяку зоне близости. Для этого используются встроенные датчики смартфона, такие как акселерометр и гироскоп. Кроме того, картографическая информация и определение зоны близости к маяку BLE используются для фиксации момента начала калибровки. В конечном итоге предлагаемая полуавтоматическая процедура калибровки основана на сценарии перемещения пользователя внутри помещения, при котором пользователь может двигаться в любую сторону, но прямолинейно.

Рассмотрим важные особенности, характерные для этой процедуры. Во-первых, маяки стандартов iBeacon и Eddystone имеют несколько зон с устойчивым уровнем сигнала, окружающих маяк BLE на определенных расстояниях. Различают зону непосредственной близости (ближе 0,5 м), ближнюю зону (от 0,5 до 3 м), дальнюю зону (от 3 до 30 м) и неизвестную (когда маяк не может быть обнаружен). В рассматриваемом случае достаточно обнаружить зону непосредственной близости, так как она указывает точное местоположение пользователя. Таким образом, сила сигнала на опорном расстоянии (0,5 м) известна. На этом расстоянии сила опорного сигнала варьируется от  $-50$  до  $-40$  дБм. Так как опорное расстояние также известно, экспонента потерь мощности сигнала  $n$  может быть выражена из уравнения (1).

Предполагается, что если пользователь является в зоне непосредственной близости, он всегда остается на границе зоны, потому что нет цели определить местоположение пользователя точнее, чем 0,5 м, и что пользователь с мобильным устройством в руке в этом случае не будет находиться ближе 0,3–0,5 м к маяку BLE. Пользователю не нужно контролировать момент входа в эту зону близости.

Очевидно, что простое измерение экспоненты потерь мощности сигнала на ближайшем расстоянии не является надежным. Измерения в нескольких опорных точках необходимы для того, чтобы калибровать значение экспоненты потерь мощности сигнала, используя метод наименьших квадратов. Для этого необходимо рассчитать значения расстояния. Из уравнения (1) видно, что зависимость между логарифмом расстояния и мощностью принимаемого сигнала линейна. Преобразовывая уравнение (1), можно получить следующее выражение:

$$P_R = P_{R0} - 10n \lg \frac{d}{d_0} + X_{\sigma_{RSS}}, \quad (2)$$

где  $P_{R0} = P_T - PL_0$  и соответствует мощности сигнала в точке  $d_0$ .

Таким образом, экспонента потерь мощности сигнала может быть выражена следующим образом:

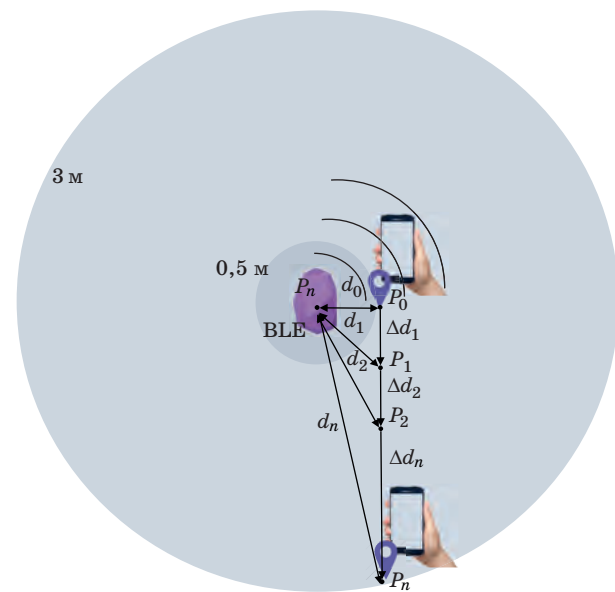
$$n = \frac{P_{R0}m - P_{Rx}}{10 \lg d} \quad (3)$$

Как было отмечено выше, измерение расстояния лежит в основе процесса калибровки. Для измерения расстояния предлагается определять шаги пользователя с помощью встроенных сенсоров смартфона (рис. 4).

Сценарий перемещения пользователя предполагает прямое движение относительно маяка BLE (см. рис. 4). Затем при измерении уровня сигнала, соответствующего ближней зоне близости, учитывается перемещение пользователя по касательной к границе зоны. Таким образом, определенные в непосредственной зоне значения расстояния  $d_1$  до маяка и мощности сигнала  $P_R$  и определенные после нескольких шагов новые значения расстояния и мощности сигнала используются для калибровки экспоненты потерь мощности сигнала. Однако этот сценарий может иметь несколько недостатков, таких как отсутствие возможности для пользователя двигаться прямо и влияние на сигнал со стороны тела самого пользователя.

Алгоритм полуавтоматической калибровки может быть определен следующим образом.

1. Инициализация параметров  $d_0$  и  $P_{R0}$ , относящихся к зоне непосредственной близости. Начальное расстояние  $d_0 = 0,5$  м и  $P_{R0} = -50$  дБм.



■ Рис. 4. Измерение уровней сигнала во время калибровки

■ Fig. 4. RSS measurements during BLE beacon semi-automatic calibration

2. Обнаружение зоны непосредственной близости маяка BLE. Если мощность принятого сигнала выше определенного порога  $P_{R0}$ , то пользователь вошел в зону непосредственной близости. Положение пользователя оценивается как находящееся на границе этой зоны. С этого шага начинается автоматическая калибровка.

3. Пользователь начинает двигаться прямо. Выполняется вычисление расстояния с помощью датчиков смартфона. Начинается отсчет шагов пользователя, которые детектируются внутренними сенсорами смартфона. Вычисленное расстояние используется для получения расстояния до маяка с помощью детектирования шагов и теоремы Пифагора.

4. Если пройденное расстояние равно 0,5 м, то измеряется уровень сигнала  $P_R$ . Полученное значение уровня сигнала используется для получения экспоненты потерь мощности по уравнению (3).

5. Если пройденное расстояние результата больше чем 3 м, что соответствует границе ближней зоны близости маяка BLE, то калибровка заканчивается. В ином случае необходимо перейти к п. 3.

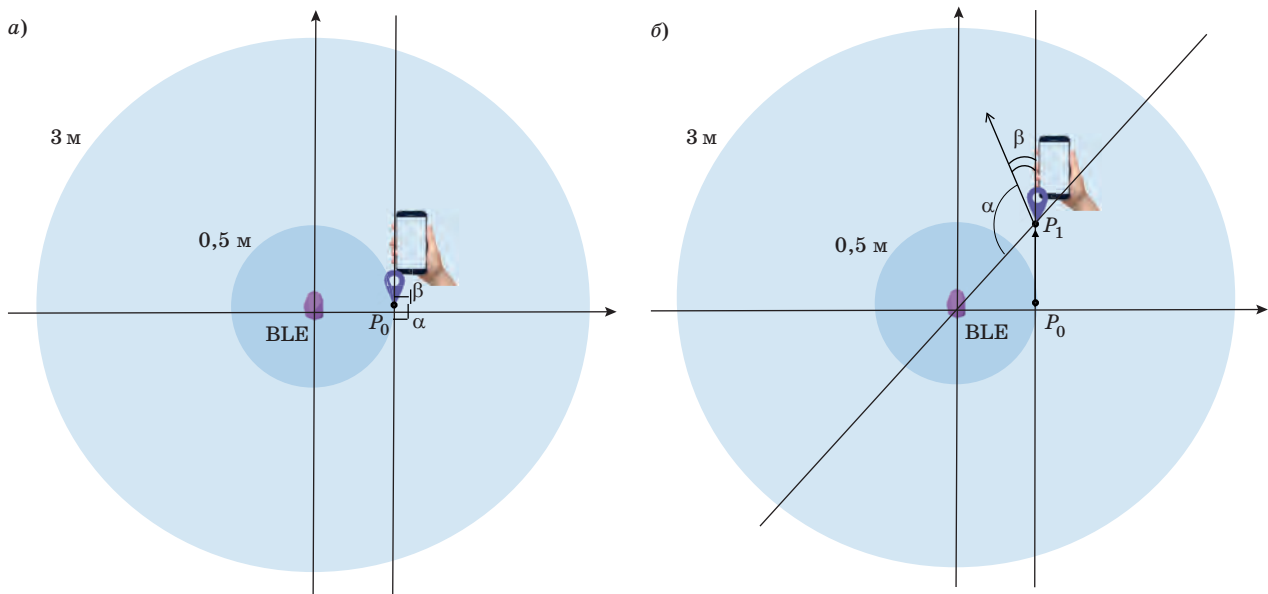
К сожалению, вышеупомянутая процедура не учитывает нескольких исключительных ситуаций, таких как не прямое перемещение, перемещения пользователей, чьи тела могут влиять на уровень сигнала, и ориентация смартфона.

Сценарий, описанный выше, рассматривает направление пользователя относительно зоны непосредственной близости маяка, но он не принимает во внимание вопросы, связанные с зависимостью экспоненты потерь уровня сигнала от направления смартфона относительно маяка (ориентации). В указанном выше случае угол между направлением перемещения пользователя и направлением на маяк составляет  $90^\circ$ . Однако угол после нескольких шагов в прямом направлении может иметь другое значение. Если пользователь повернется в этой новой точке, то показатель потерь уровня сигнала, очевидно, изменится. Эта проблема показана на рис. 5, а и б, где пользователь меняет ориентацию в новой точке  $P_1$ .

Для преодоления этого недостатка необходимо откалибровать значение экспоненты потерь уровня сигнала в зависимости от ориентации пользователя относительно маяка, направления перемещения пользователя относительно общей системы координат и расчетного расстояния от пользователя до маяка. Таким образом, калибровочное измерение представляет собой кортеж  $M$ , который можно определить как

$$M = (B, d, \alpha, \beta, P_R), \quad (4)$$

где  $B$  — это идентификатор маяка;  $d$  — расстояние между пользователем и маяком;  $\alpha$  — угол



■ **Рис. 5.** Направление пользователя на старте калибровки (а) и новое направление пользователя после нескольких шагов (б)  
 ■ **Fig. 5.** User's direction at the calibration start (а) and new user's direction after several steps (б)

ориентации пользователя относительно маяка;  $\beta$  — угол направления перемещения пользователя относительно общей системы координат;  $P_R$  — мощность принятого сигнала.

Таким образом, результатом работы алгоритма является набор кортежей, содержащих откалиброванные значения экспонент потерь уровня сигнала в соответствии с ориентацией пользователя относительно маяка, направлением перемещения пользователя относительно общей системы координат.

**Эксперименты**

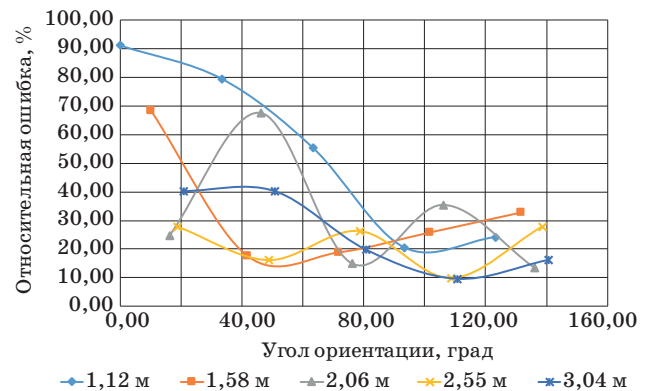
Для тестирования предложенного метода было реализовано специальное мобильное приложение для операционной системы Android. Приложение предназначено для оценки расстояния между передатчиком и приемником, а также для выполнения полуавтоматической калибровки заданного числа маяков BLE. Выбранные маяки поддерживают протокол iBeacon. Это приложение находит предварительно определенные маяки по их идентификаторам и измеряет значения уровней сигнала каждого маяка. Представленный алгоритм реализован, а оценка полуавтоматической калибровки позволяет получить кортежи откалиброванных показателей экспоненты потерь уровня сигнала, готовых к использованию в мультilaterации.

Для тестирования процедуры полуавтоматической калибровки измерялись средние значения

мощности принимаемого сигнала на заданных расстояниях от одного маяка, размещенного в пределах одной комнаты. Эти измерения производились для каждой точки в прямом направлении с интервалом 0,5 м в ближней зоне распространения устойчивого уровня сигнала BLE. Непосредственная зона близости определяется с помощью мобильного приложения автоматически.

Полуавтоматическая калибровка выполнена для сценария с прямым перемещением и с изменением ориентации пользователя относительно маяка BLE.

На рис. 6 приведены результаты калибровки с изменением ориентации пользователя в каждой



■ **Рис. 6.** Ориентация пользователя после нескольких шагов в прямом направлении  
 ■ **Fig. 6.** User heading regarding the beacon after several steps in straight direction

из опорных точек траектории перемещения пользователя. Угол ориентации смартфона изменяется каждый раз на  $30^\circ$ . Пользователь последовательно поворачивается лицом к маяку. В результате средняя погрешность локализации ниже 1,5 м. Показано, что при малых расстояниях между пользователем и маяком BLE и малых углах ориентации пользователя относительно маяка погрешность больше, чем при больших расстояниях и малых углах.

## Заключение

Благодаря предлагаемому методу навигации внутри помещения и построения карт радиосигналов можно решать задачи навигации внутри помещения с известным планом и расположением точек доступа Wi-Fi и маяков BLE в условиях, когда карты радиосигналов не построены, и строить карты радиосигналов (базы радиопечатков) путем коллаборативного сбора информации об уровнях сигналов. В основе данного метода лежит представленная полуавтоматическая процедура калибровки для мультilaterации на основе модели потерь сигнала, зависящей от логарифма расстояния (log-distance path loss). С одной сторо-

ны, процедура проводится параллельно с мультilaterацией сигналов BLE в целях улучшения точности. С другой стороны, процедура выполняется параллельно со счислением координат на основе датчиков смартфона и мультilaterацией для повышения точности определения местоположения пользователя с использованием информации о зонах с устойчивым уровнем сигнала маяков BLE. Несмотря на то что пользовательское приложение реализует мультilaterацию и предложенную процедуру, обнаруживает близость пользователя и автоматически запускает калибровку, для выполнения точной калибровки программной реализации предполагается прямое направление перемещения пользователя. В ином случае точность калибровки снижается.

Преимуществами предложенного метода являются возможность онлайн калибровки, сбора радиопечатков и обработки изменения ориентации пользователя. Погрешность определения местоположения — ниже 1,5 м (в случае прямого перемещения пользователя). Недостатками предложенного метода являются отсутствие обработки сложных траекторий перемещения пользователей при полуавтоматической калибровке, достаточно большие ошибки определения местоположения на малых расстояниях от маяка BLE.

## Литература

1. Kuusik A., Roche S., Weis F. SMARTMUSEUM: cultural content recommendation system for mobile users. *Proc. of Fourth International Conference on Computer Sciences and Convergence Information Technology*, 2009, pp. 477–482. doi:10.1109/ICCIT.2009.257
2. Tang Z., Zhao Y., Yang L., Qi S., Fang D., Chen X., Gong X., Wang Z. Exploiting wireless received signal strength indicators to detect evil-twin attacks in smart homes. *Mobile Information Systems*, 2017, vol. 4, pp. 1–14. doi:10.1155/2017/1248578
3. Mekelleche F., Haffaf H. Classification and comparison of range-based localization techniques in wireless sensor networks. *Journal of Communications*, 2017, vol. 12, no. 4, pp. 221–227. doi:10.12720/jcm.12.4.221-227
4. Surmann H., Nüchter A., Hertzberg J. An autonomous mobile robot with a 3D laser range finder for 3D exploration and digitalization of indoor environments. *Robotics and Autonomous Systems*, 2003, vol. 45(3-4), pp. 181–198. doi:10.1016/j.robot.2003.09.004
5. Dayekh S., Affes S., Kandil N., Nerguizian C. Cooperative localization in mines using fingerprinting and neural networks. *Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, 2010, pp. 1–6. doi:10.1109/WCNC.2010.5506666
6. Qiao G.-Z., Zeng J.-C. Localization algorithm of beacon nodes chain deployment based on coal mine underground wireless sensor networks. *Meitan Xuebao/ Journal of the China Coal Society*, 2010, vol. 35(7), pp. 1229–1233.
7. Savic V., Wymeersch H., Larsson E. G. Simultaneous sensor localization and target tracking in mine tunnels. *Proc. of the 16th International Conference on Information Fusion*, 2013, pp. 1427–1433.
8. de Blasio G., Quesada-Arencibia A., García C. R., Molina-Gil J. M., Caballero-Gil C. Study on an indoor positioning system for harsh environments based on Wi-Fi and Bluetooth low energy. *Sensors*, 2017, vol. 17 (6), p. 1299. <http://doi.org/10.3390/s17061299>
9. Röhrig C., Heß D., Künemund F. Constrained Kalman filtering for indoor localization of transport vehicles using floor-installed HF RFID transponders, *Proc. of the 9th IEEE International Conference on RFID (IEEE RFID 2015)*, 2015, pp. 113–120. doi:10.1109/RFID.2015.7113081
10. Heidari M., Alsindi N. A., Pahlavan K. UDP identification and error mitigation in ToA-Based indoor localization systems using neural network architecture. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2009, vol. 8, no. 7, pp. 3597–3607. doi:10.1109/TWC.2009.080415
11. Kabir Md. H., Kohno R. A hybrid TOA-fingerprinting based localization of mobile nodes using UWB



- signaling for non line-of-sight conditions. *Sensors*, 2012, vol. 12(8), pp. 11187–11204. doi:10.3390/s120811187
12. Liu D., Wang Y., He P., Zhai Y., Wang H. TOA localization for multipath and NLOS environment with virtual station. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2017, p. 104. doi:10.1186/s13638-017-0896-1
  13. Xinrong L., Pahlavan K., Latva-aho M., Ylianttila M. Comparison of indoor geolocation methods in DSSS and OFDM wireless LAN. *Vehicular Technology Conference*, 2000, vol. 6, pp. 3015–3020. doi:10.1109/VETECF.2000.886867
  14. Sun Z., Farley R., Kaleas T., Ellis J., Chikkappa K. Cortina: collaborative context-aware indoor positioning employing RSS and RToF techniques. *Proc. IEEE International Conference on Pervasive Computing and Communications Workshops (PERCOM Workshops)*, 2011, pp. 340–343. doi:10.1109/PERCOMW.2011.5766901
  15. Sivers M., Fokin G., Dmitriev P., Kireev A., Volgushev D., Ali A. A. H. Indoor positioning in WiFi and NanoLOC networks, *Proc. of International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking Conference on Internet of Things and Smart Spaces*, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-46301-8\_39
  16. Hanssens B., Plets D., Tanghe E., Oestges C., Gaillet D. P., Liénard M., Martens L., Joseph W. An indoor localization technique based on ultra-wideband AoD/AoA/ToA estimation. *Proc of IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI)*, 2016, pp. 1445–1446.
  17. Yang S.-H., Kim H.-S., Son Y.-H., Han S.-K. Three-dimensional visible light indoor localization using AOA and RSS with multiple optical receivers. *Journal of Lightwave Technology*, 2014, vol. 32, iss. 14, pp. 2480–2485. doi:10.1109/JLT.2014.2327623
  18. Deliang L., Kaihua L., Yongtao M., Jiexiao Y. Joint TOA and DOA localization in indoor environment using virtual stations. *IEEE Communications Letters*, 2014, vol. 18, iss. 8, pp. 1423–1426. doi:10.1109/LCOMM.2014.2333006
  19. Zhao X., Xiao Z., Markham A., Trigoni N., Ren Y. Does BTLE measure up against WiFi? A Comparison of indoor location performance. *Proc. of the European Wireless 2014: 20th European Wireless Conference*, 2014, pp. 1–6.
  20. Rõbesaat J., Zhang P., Abdelaal M., Theel O. An improved BLE indoor localization with Kalman-based fusion: an experimental study. *Sensors*, 2017, vol. 17(5). doi:10.3390/s17050951
  21. Aleshly F., Mohd Sabri R., Sevak Z., Arslan T. Improving indoor positioning accuracy through a Wi-Fi handover algorithm. *Proc. of International Technical Meeting of the Institute of Navigation*, 2010, pp. 822–829.
  22. Kaemarungsi K., Krishnamurthy P. Modeling of indoor positioning systems based on location fingerprinting. *Proc. of INFOCOM Conference*, 2004, vol. 2, pp. 1012–1022. doi:10.1109/INFOCOM.2004.1356988
  23. Faragher R., Harle R. Location fingerprinting with Bluetooth low energy beacons. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2015, vol. 33, iss. 11, pp. 2418–2428. doi:10.1109/JSAC.2015.2430281
  24. Ibrahim M., Moselhi O. Self-calibrated WSN for indoor tracking and control of construction operations. *Proc. of CSCE International Construction Specialty Conference*, 2015. doi:10.14288/1.0076327
  25. Sangwoo L., Bongkwan C., Bonhyun K., Sanghwan R., Jaehoon C., Sunwoo K. Kalman filter-based indoor position tracking with self-calibration for RSS variation mitigation. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2014, vol. 8(1), pp. 235–246. doi:10.1155/2015/674635
  26. Barsocchi P., Lenzi S., Chessa S., Giunta G. Virtual calibration for RSSI-based indoor localization with IEEE 802.15.4. *Proc. of IEEE International Conference on Communications*, 2009, pp. 512–516. doi:10.1109/ICC.2009.5199566
  27. Luo C., Hong H., Chan M. C. PiLoc: a self-calibrating participatory indoor localization system. *Proc. of 13th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks*, 2014, pp. 143–153. doi:10.1109/IPSNS.2014.6846748
  28. Luo C., Hong H., Chan M. C., Li J., Zhang X., Ming Z. MPiLoc: self-calibrating multi-floor indoor localization exploiting participatory sensing. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2018, vol. 17, iss. 1, pp. 141–154. doi:10.1109/TMC.2017.2698453

UDC 621.396

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-95-104

**Method of indoor navigation and collaborative semi-automatic Wi-Fi radiomap construction**M. S. Shchekotov<sup>a</sup>, Research Fellow, orcid.org/0000-0003-0817-6791, shekotov@ias.spb.su<sup>a</sup>Saint-Petersburg Institute for Informatics and Automation of the RAS, 39, 14 Line, V. O., 199178, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** An important and complicated problem related to the multilateration of Wi-Fi or Bluetooth Low Energy signals as well as Wi-Fi fingerprinting is the procedure of infrastructure adjustment which includes Wi-Fi radio map construction and Wi-Fi or Bluetooth Low Energy radio signal path loss model calibration. **Purpose:** Developing a method for navigation and Wi-Fi radio map construction, which would provide user's indoor navigation, Bluetooth Low Energy path loss model calibration and Wi-Fi radio map

collaborative semi-automatic construction. **Results:** The paper presents a collaborative semi-automatic Wi-Fi radio map construction method based on the combination of Bluetooth Low Energy multilateration, Wi-Fi fingerprinting, Wi-Fi radio map collaborative semi-automatic construction procedure and semi-automatic Bluetooth Low Energy path loss model calibration. For the semi-automatic calibration procedure of the Bluetooth Low Energy signal propagation model and for the method of collaborative semi-automatic construction of Wi-Fi radio map and indoor navigation, a calibration algorithm and an algorithm of collaborative semi-automatic construction of Wi-Fi radio map and indoor navigation were proposed, respectively. A mobile application has been developed which implements the proposed algorithms in order to test them and analyze the results. **Practical relevance:** The proposed method allows you to avoid time-consuming procedures of constructing a map of Wi-Fi radio signals and semi-automatic calibration of Bluetooth Low Energy signal propagation in the offline phase.

**Keywords** — indoor positioning, context-oriented systems, multilateration, crowd-sourcing.

**Citation:** Shchekotov M. S. Method of indoor navigation and collaborative semi-automatic Wi-Fi radiomap construction. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 95–104 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-95-104

## References

- Kuusik A., Roche S., Weis F. SMARTMUSEUM: cultural content recommendation system for mobile users. *Proc. of Fourth International Conference on Computer Sciences and Convergence Information Technology*, 2009, pp. 477–482. doi:10.1109/ICCIT.2009.257
- Tang Z., Zhao Y., Yang L., Qi S., Fang D., Chen X., Gong X., Wang Z. Exploiting wireless received signal strength indicators to detect evil-twin attacks in smart homes. *Mobile Information Systems*, 2017, vol. 4, pp. 1–14. doi:10.1155/2017/1248578
- Mekelleche F., Haffaf H. Classification and comparison of range-based localization techniques in wireless sensor networks. *Journal of Communications*, 2017, vol. 12, no. 4, pp. 221–227. doi:10.12720/jcm.12.4.221-227
- Surmann H., Nüchter A., Hertzberg J. An autonomous mobile robot with a 3D laser range finder for 3D exploration and digitalization of indoor environments. *Robotics and Autonomous Systems*, 2003, vol. 45(3-4), pp. 181–198. doi:10.1016/j.robot.2003.09.004
- Dayekh S., Affes S., Kandil N., Nerguizian C. Cooperative localization in mines using fingerprinting and neural networks. *Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, 2010, pp. 1–6. doi:10.1109/WCNC.2010.5506666
- Qiao G.-Z., Zeng J.-C. Localization algorithm of beacon nodes chain deployment based on coal mine underground wireless sensor networks. *Meitan Xuebao/Journal of the China Coal Society*, 2010, vol. 35(7), pp. 1229–1233.
- Savic V., Wymeersch H., Larsson E. G. Simultaneous sensor localization and target tracking in mine tunnels. *Proc. of the 16th International Conference on Information Fusion*, 2013, pp. 1427–1433.
- de Blasio G., Quesada-Arencibia A., García C. R., Molina-Gil J. M., Caballero-Gil C. Study on an indoor positioning system for harsh environments based on Wi-Fi and Bluetooth low energy. *Sensors*, 2017, vol. 17 (6), p. 1299. http://doi.org/10.3390/s17061299
- Röhrig C., Heß D., Künemund F. Constrained Kalman filtering for indoor localization of transport vehicles using floor-installed HF RFID transponders. *Proc. of the 9th IEEE International Conference on RFID (IEEE RFID 2015)*, 2015, pp. 113–120. doi:10.1109/RFID.2015.7113081
- Heidari M., Alsindi N. A., Pahlavan K. UDP identification and error mitigation in ToA-Based indoor localization systems using neural network architecture. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2009, vol. 8, no. 7, pp. 3597–3607. doi:10.1109/TWC.2009.080415
- Kabir Md. H., Kohno R. A hybrid TOA-fingerprinting based localization of mobile nodes using UWB signaling for non line-of-sight conditions. *Sensors*, 2012, vol. 12(8), pp. 11187–11204. doi:10.3390/s120811187
- Liu D., Wang Y., He P., Zhai Y., Wang H. TOA localization for multipath and NLOS environment with virtual station. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, 2017, p. 104. doi:10.1186/s13638-017-0896-1
- Xinrong L., Pahlavan K., Latva-aho M., Ylianttila M. Comparison of indoor geolocation methods in DSSS and OFDM wireless LAN systems. *Vehicular Technology Conference*, 2000, vol. 6, pp. 3015–3020. doi:10.1109/VETECE.2000.8868367
- Sun Z., Farley R., Kaleas T., Ellis J., Chikkappa K. Cortina: collaborative context-aware indoor positioning employing RSS and RToF techniques. *Proc. IEEE International Conference on Pervasive Computing and Communications Work-*
- shops (PERCOM Workshops)*, 2011, pp. 340–343. doi:10.1109/PERCOMW.2011.5766901
- Sivers M., Fokin G., Dmitriev P., Kireev A., Volgushev D., Ali A. A. H. Indoor positioning in WiFi and NanoLOC networks. *Proc. of International Conference on Next Generation Wired/Wireless Networking Conference on Internet of Things and Smart Spaces*, 2016. doi:10.1007/978-3-319-46301-8\_39
- Hanssens B., Plets D., Tanghe E., Oestges C., Gaillot D. P., Liénard M., Martens L., Joseph W. An indoor localization technique based on ultra-wideband AoD/AoA/ToA estimation. *Proc. of IEEE International Symposium on Antennas and Propagation (APSURSI)*, 2016, pp. 1445–1446.
- Yang S.-H., Kim H.-S., Son Y.-H., Han S.-K. Three-dimensional visible light indoor localization using AOA and RSS with multiple optical receivers. *Journal of Lightwave Technology*, 2014, vol. 32, iss. 14, pp. 2480–2485. doi:10.1109/JLT.2014.2327623
- Deliang L., Kaihua L., Yongtao M., Jiexiao Y. Joint TOA and DOA localization in indoor environment using virtual stations. *IEEE Communications Letters*, 2014, vol. 18, iss. 8, pp. 1423–1426. doi:10.1109/LCOMM.2014.2333006
- Zhao X., Xiao Z., Markham A., Trigoni N., Ren Y. Does BTLE measure up against WiFi? A Comparison of indoor location performance. *Proc. of the European Wireless 2014: 20th European Wireless Conference*, 2014, pp. 1–6.
- Röbesaat J., Zhang P., Abdelaal M., Theel O. An improved BLE indoor localization with Kalman-based fusion: an experimental study. *Sensors*, 2017, vol. 17(5). doi:10.3390/s17050951
- Alsehly F., Mohd Sabri R., Sevak Z., Arslan T. Improving indoor positioning accuracy through a Wi-Fi handover algorithm. *Proc. of International Technical Meeting of the Institute of Navigation*, 2010, pp. 822–829.
- Kaemarungsi K., Krishnamurthy P. Modeling of indoor positioning systems based on location fingerprinting. *Proc. of INFOCOM Conference*, 2004, vol. 2, pp. 1012–1022. doi:10.1109/INFCOM.2004.1356988
- Faragher R., Harle R. Location fingerprinting with Bluetooth low energy beacons. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2015, vol. 33, iss. 11, pp. 2418–2428. doi:10.1109/JSAC.2015.2430281
- Ibrahim M., Moselhi O. Self-calibrated WSN for indoor tracking and control of construction operations. *Proc. of CSCE International Construction Specialty Conference*, 2015. doi:10.14288/1.0076327
- Sangwoo L., Bongkwan C., Bonhyun K., Sanghwan R., Jaehoon C., Sunwoo K. Kalman filter-based indoor position tracking with self-calibration for RSS variation mitigation. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2014, vol. 8(1), pp. 235–246. doi:10.1155/2015/674635
- Barsocchi P., Lenzi S., Chessa S., Giunta G. Virtual calibration for RSSI-based indoor localization with IEEE 802.15.4. *Proc. of IEEE International Conference on Communications*, 2009, pp. 512–516. doi:10.1109/ICC.2009.5199566
- Luo C., Hong H., Chan M. C. PiLoc: a self-calibrating participatory indoor localization system. *Proc. of 13th International Symposium on Information Processing in Sensor Networks*, 2014, pp. 143–153. doi:10.1109/IPSNS.2014.6846748
- Luo C., Hong H., Chan M. C., Li J., Zhang X., Ming Z. MPiLoc: self-calibrating multi-floor indoor localization exploiting participatory sensing. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2018, vol. 17, iss. 1, pp. 141–154. doi:10.1109/TMC.2017.2698453

## Адаптивное мультиагентное планирование производственных ресурсов на основе онтологии

П. О. Скобелев<sup>а</sup>, доктор техн. наук, заведующий лабораторией, [orcid.org/0000-0003-2199-9557](https://orcid.org/0000-0003-2199-9557)

О. И. Лахин<sup>б</sup>, канд. техн. наук, генеральный директор, [orcid.org/0000-0002-9360-3198](https://orcid.org/0000-0002-9360-3198)

И. В. Майоров<sup>а</sup>, канд. техн. наук, аналитик, [orcid.org/0000-0002-3130-8142](https://orcid.org/0000-0002-3130-8142)

Е. В. Симонова<sup>в</sup>, канд. техн. наук, доцент, [orcid.org/0000-0003-2638-2572](https://orcid.org/0000-0003-2638-2572), [simonova.elena.v@gmail.com](mailto:simonova.elena.v@gmail.com)

<sup>а</sup>Институт проблем управления сложными системами РАН, Садовая ул., 61, Самара, 443020, РФ

<sup>б</sup>ООО НПК «Разумные решения», Московское ш., 17, Самара, 443013, РФ

<sup>в</sup>Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева, Московское ш., 34, Самара, 443086, РФ

**Постановка проблемы:** в настоящее время требуются новые решения для управления ресурсами в промышленности и других областях, которые должны поддерживать высокий уровень адаптивности и оперативности. Классические комбинаторные или эвристические методы и инструменты не обеспечивают адекватные решения задач управления ресурсами в реальном времени. **Цель:** разработка метода планирования производственных ресурсов на основе мультиагентных технологий и онтологии для адаптации системы к непредсказуемым событиям, таким как поступление нового заказа, недоступность ресурса и т. п. **Результаты:** разработан метод адаптивного планирования, в котором агенты непрерывно улучшают показатели системы в режиме реального времени путем выявления и разрешения конфликтных ситуаций, порожденных непредвиденными событиями, при формировании расписаний использования ресурсов. Для настройки мультиагентного планирования в соответствии с особенностями производственного процесса используются семантические сети (онтологии), которые являются основой онтологических баз знаний для хранения информации о специфике конкретного предприятия. В этой связи разработаны: базовая онтология планирования; конструктор онтологии, с помощью которого можно создавать специализированную онтологию предприятия; база знаний в виде семантической Википедии предприятия; мультиагентный планировщик, настраиваемый с помощью базовой и специализированной онтологий в соответствии с особенностями производства и требованиями к операциям технологического процесса. **Практическая значимость:** применение системы, разработанной на основе метода планирования производственных ресурсов, не ограничивается рамками предприятий машиностроительного профиля, а может быть рекомендовано к использованию при управлении проектами, цепочками поставок и т. д.

**Ключевые слова** — сложные системы, управление ресурсами, планирование в режиме реального времени, онтология, база знаний, мультиагентные технологии, сеть потребностей и возможностей, самоорганизация, адаптивность.

**Цитирование:** Скобелев П. О., Лахин О. И., Майоров И. В., Симонова Е. В. Адаптивное мультиагентное планирование производственных ресурсов на основе онтологии. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 105–117. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-105-117

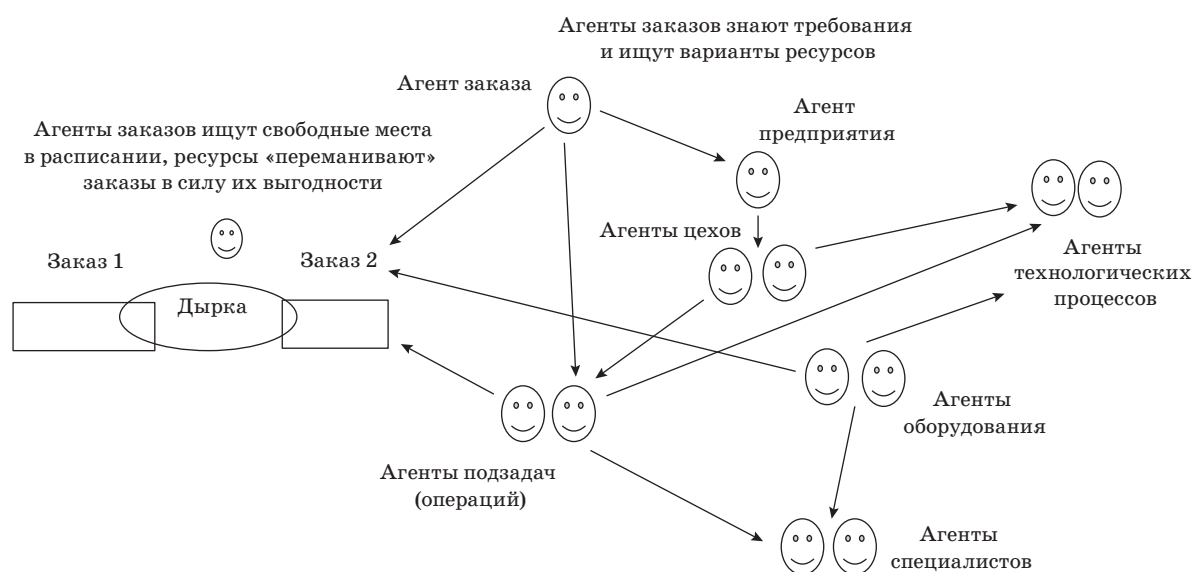
**Citation:** Skobelev P. O., Lakhin O. I., Mayorov I. V., Simonova E. V. Adaptive multi-agent planning of industrial resources based on ontology. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 105–117 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-105-117

### Введение

На современном этапе развития систем управления производством и систем распределения и планирования ресурсов предприятия работники в условиях высокой динамики сталкиваются со значительными проблемами, порожденными неопределенностью. Неопределенность может быть связана с трудностями учета множества различных факторов, таких как необходимость индивидуального подхода к каждому заказу, динамика цен на комплектующие, вариативность поставок от предприятий-смежников, срыв сроков, непрерывные изменения технологий, возникновение различных непредвиденных событий, непосредственно влияющих на производственные процессы предприятия в целом, и т. д.

Существующие системы управления производством имеют широкий функционал и возможности интеграции с исполнительными модулями. Они сопровождают производственные процессы от выпуска до формирования на доставку. Однако они лишены инструментов поддержки принятия решений и реакции на динамические изменения ситуации [1–4].

Таким образом, поддержание производственных планов в адекватном состоянии на всех уровнях с учетом неопределенности времени и характера изменений становится актуальной задачей. Современные интегрированные производственные системы должны гибко и оперативно реагировать на события, учитывать распределенный характер большинства подсистем управления и отсутствие централизации в них, самостоятель-



■ **Рис. 1.** Сцена мира заказов и ресурсов

■ **Fig. 1.** A scene from the world of orders and resources

но принимать решения об исправлении и парировании непредвиденных ситуаций и выдавать обновленные согласованные планы [5]. Основные принципы построения и внедрения таких систем рассмотрены в работе [6]. Решение подобной плохо формализованной задачи должно выполняться в режиме реального времени, поэтому система управления должна строиться на сетевых принципах и быть адаптивной к изменениям. Системы планирования, основанные на централизованных подходах линейного и математического программирования, нейронных сетях, генетических алгоритмах и эвристиках, не позволяют в полной мере учитывать высокую динамику изменений, поскольку необходимо пересчитывать расписания и показатели для сотен взаимосвязанных производственных ресурсов и тысяч выпускаемых изделий [7–11].

Поэтому для учета непредвиденных событий, неопределенностей, динамики цен и доступности ресурсов большое распространение получают мультиагентные системы, в которых текущее расписание строится при помощи агентов задач и ресурсов, взаимодействующих путем передачи сообщений в сетях потребностей и возможностей (ПВ-сетях) на основе самоорганизации [12].

### Мультиагентные технологии для планирования ресурсов

Разработанный подход основан на концепции сетей потребностей и возможностей [13, 14]. Агенты ПВ-сети [15] взаимодействуют друг с дру-

гом посредством переговоров в сцене мира, которая строится как отражение реальной ситуации в реальной жизни, с текущим планом действий и ожидаемыми результатами, доступными агентам предприятия или подразделения (например, цеха) на соответствующих уровнях (рис. 1). Агент заказа считывает структуру предприятия из онтологии и определяет отношения ресурсов, необходимых для его исполнения. Агент нового заказа, поступив в сцену, обращается к агенту предприятия со своими требованиями. Агент предприятия (штабной агент) активизирует агентов подразделений, которые создают агентов технологических процессов, операций и подзадач, которые направляют запросы к ресурсам — станкам, оборудованию, материалам. Агенты выполняют матчинг по соответствиям типов, производительности, требованиям к персоналу. Ресурсы (станки, специалисты) анализируют локальные расписания и проверяют возможные размещения. Агент нового заказа пытается договориться с мешающими ему заказами о подвижках и соответствующих компенсациях, в режиме проактивности меняя локальные расписания. При достижении консенсуса новое расписание принимается всеми участниками. В противном случае итерации (волны) переговоров затрагивают более глубокие слои расписания с участием отдаленных участников по цепочке.

Такой распределенный подход позволяет повышать сложность решаемых задач, сколь угодно расширяя постановку задачи и вводя новых агентов, например, для учета ремонта оборудования, транспортировки продукции и т. д.

### Метод адаптивного планирования

Формализованная постановка задачи основана на поиске консенсуса между агентами на виртуальном рынке ПВ-сетей и может быть сформулирована следующим образом [16].

Предположим, что все агенты потребностей и возможностей имеют свои собственные цели, критерии, предпочтения и ограничения (например, сроки, стоимость, риски, приоритеты, необходимое оборудование или квалификации работников). Важность каждого критерия может быть представлена весовыми коэффициентами в линейной комбинации критериев для данной ситуации, но может меняться при формировании или исполнении расписания.

Введем функцию удовлетворенности (Satisfaction function) для каждого агента, которая будет показывать отклонение текущего значения этой функции от заданного идеального по любому из критериев текущего шага поиска решения.

Пусть у каждой потребности  $j$  есть несколько индивидуальных критериев  $x_i$  и предложенных идеальных значений  $x_{ij}^{id}$ . Для каждого агента потребности  $j$  нормированная функция вычисляется компонентом  $i$ , заданным, например, как линейная функция  $f_{ij}^{task}(x_i - x_{ij}^{id})$ . В большинстве случаев эта функция имеет форму колокола с вершиной в точке предполагаемого идеального значения. В качестве итогового результата для каждой потребности оценивается сумма виртуальных значений для каждого критерия  $i$  с заданными весовыми коэффициентами  $\alpha_{ij}^{task}$ .

При правильном выборе признаков и формы функции цель каждого агента может быть переформулирована как увеличение (максимизация) значения  $y_j^{task}$  потребности  $j$  (задача верхнего индекса означает, что значения принадлежат агентам потребности):

$$y_j^{task} = \sum_i \alpha_{ij}^{task} \cdot f_{ij}^{task}(x_i - x_{ij}^{id}),$$

где  $\forall j$  весовые коэффициенты нормированы:  $\sum_i \alpha_{ij}^{id} = 1$ .

Проблема нахождения состояний  $x_{ij}^*$  агентов потребностей  $j$ , максимизирующих общую стоимость всех заказов, может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} y^{task} &= \sum_j \beta_j^{task} \cdot y_j^{task} = \\ &= \sum_j \beta_j^{task} \sum_i \alpha_{ij}^{task} \cdot f_{ij}^{task}(x_i - x_{ij}^{id}), \quad (1) \\ y^{task*} &= \max_{x_i} (y^{task}), \end{aligned}$$

где  $\beta_j^{task}$  — это вес потребности, который позволяет устанавливать и динамически изменять приоритеты, показывающие важность критериев.

Аналогично функция значений может быть задана для ресурсов по критериям  $z_k$ , с функцией  $f_{kl}^{res}(z_k - z_{kl}^{id})$ , весом  $\alpha_{kl}^{res}$  критерия  $k$  для ресурса  $l$  и значением ресурса  $\beta_l^{res}$  для системы (что аналогично весу функций агентов потребностей):

$$\begin{aligned} y^{res} &= \sum_l \beta_l^{res} \cdot y_l^{res} = \\ &= \sum_l \beta_l^{res} \sum_k \alpha_{kl}^{res} \cdot f_{kl}^{res}(z_k - z_{kl}^{id}), \quad (2) \end{aligned}$$

$$y^{res*} = \max_{z_k} (y^{res});$$

$$z_k \in D^K, x_i \in D^I \forall i, k,$$

$$I = \text{Dim}(D^K), K = \text{Dim}(D^K). \quad (3)$$

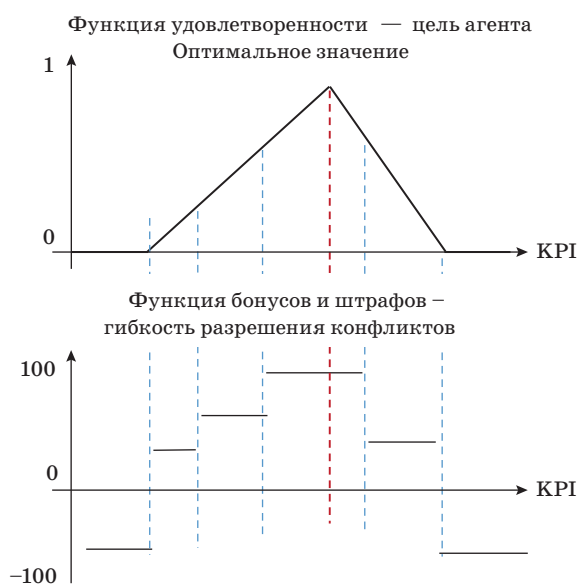
Переменные  $x$  и  $z$  относятся к некоторым областям пространства критериев потребностей и возможностей,  $I$  и  $K$  являются размерами соответствующих пространств критериев, верхний индекс  $res$  означает, что значения принадлежат агентам возможностей.

Таким образом, в ПВ-сети задача оптимизации сформирована как решение (1)–(3). Разработанный метод основан на концепции ПВ-сети, где агенты существуют на виртуальном рынке и постоянно стремятся улучшить свои индивидуальные функции удовлетворенности (которые отражают их заданные многокритериальные цели) с использованием функций бонусов и штрафов (рис. 2).

Агенты пытаются максимизировать свои функции удовлетворенности, используя доступные им виртуальные деньги: чем лучше позиция, тем больше бонус и тем больше денег на виртуальном счете агента. Чем больше денег, тем больше вариантов для перестройки расписания. Функции бонусов и штрафов отражают изменения в функции удовлетворенности агентов и определяют гибкость компромиссов при решении конфликтов.

Протоколы решения конфликтов основаны на модификациях контрактной сети — каждая задача может быть расположена на свободном слоте, сдвинута, отброшена, разделена или заменена. Однако в случае конфликта один агент может предложить компенсацию другому агенту, а второй агент примет предложение, только если его функция удовлетворенности не ухудшится. Разные протоколы могут определять различные методы решения конфликтов.

Основная часть разработанного метода может быть определена следующим образом.



■ **Рис. 2.** Пример функции удовлетворенности агента  
 ■ **Fig. 2.** An example of the agent satisfaction function

1. Возможность вводить число конкретных классов агентов, представляющих специфику предметной области с требуемым уровнем детализации.

2. Функции удовлетворенности и функции бонусов и штрафов определяются линейной комбинацией многокритериальных целей, предпочтений и ограничений каждого агента.

3. Заданы протоколы взаимодействия агентов, которые определяют, как выявлять конфликты и находить компромиссы с открытыми слотами, сдвигами и свопами задач (операций).

4. Итоговое расписание формируется в процессе самоорганизации агентов ПВ-сети.

5. Выбранные протоколы запускаются при возникновении новых событий (например, при поступлении нового заказа):

а) новый заказ поступает в систему, и ему присваивается агент;

б) агент заказа находит технологический или бизнес-процесс в базе знаний (БЗ), создает агентов задач, связанных отношениями, и запускает их для начала решения проблемы;

в) агент задачи считывает список требований из БЗ и отправляет сообщение всем агентам, присвоенным доступным ресурсам, о том, что ему требуется ресурс с определенными параметрами и он может заплатить за этот ресурс определенное количество виртуальных денег;

г) все агенты ресурсов, обладающие указанными функциями (полностью или частично) и стоящие меньше или столько же, сколько было указано агентом задачи, предлагают ему свои услуги;

д) агент задачи выбирает из предложенных наиболее подходящий свободный ресурс. Если подходящих ресурсов нет, агент задачи пытается переманить ресурс, который уже был назначен на другой заказ, предлагая компенсацию;

е) агент задачи, которому была предложена определенная компенсация, рассматривает предложение. Он принимает его только в том случае, если компенсация позволяет ему получить другой удовлетворительный ресурс и одновременно увеличить общую удовлетворенность системы;

ж) если агент задачи принимает предложение, он реорганизует ранее установленные отношения с этим заказом, задачей и ресурсом и ищет новые отношения с ресурсом, увеличивая общую удовлетворенность системы;

з) этот же процесс выполняется и для агентов ресурсов, которые могут генерировать предложения агентам задач с конкретными контекстно-ориентированными требованиями.

6. Данный процесс повторяется до тех пор, пока все ресурсы не будут связаны с заказами и агенты больше не смогут улучшить свое текущее состояние, или до тех пор, пока не будет исчерпано время.

7. В этот момент агент системы начинает пересматривать ключевые показатели эффективности (КПЭ) системы и находить агентов с минимальной удовлетворенностью по наиболее важным критериям.

8. Агенты системы предлагают этим агентам попробовать определить сумму виртуальных денег и ту стоимость, которую можно достичь в ходе переговоров.

9. Получая предложения от этих агентов, агент системы может выбрать предложение с лучшим соотношением ценность — цена для улучшения наиболее важных ключевых показателей эффективности.

При необходимости пользователь может в интерактивном режиме вмешаться в план в любой момент и вручную переделать расписание, перетачив операции — в результате план будет автоматически изменен.

Общее поведение сложных систем — это развитие через взаимодействие агентов, что, в свою очередь, ограничивает их поведение. Такое поведение называется эмерджентным. Оно недетерминировано и непредсказуемо, но не хаотично. Чрезвычайная ситуация приводит к неустойчивым равновесиям, связанным с обоснованным консенсусом многих конфликтующих агентов, которые представляют сбалансированные расписания, обеспечивающие адаптивность к внешним факторам. Более подробно логика принятия решений и протоколы переговоров агентов представлены в работе [6].

## Использование онтологии для настройки мультиагентного планирования

### Онтологическая БЗ для адаптивного управления ресурсами

Переход к цифровой экономике предполагает развитие методов и средств формализованного представления знаний, которые должны обеспечивать возможность унифицированного построения цифровых моделей всех аспектов деятельности предприятий для создания условий по управлению ресурсами предприятий, по поддержке взаимодействия в рамках отраслевых цифровых платформ, прозрачности движения товаров и предоставления услуг и т. д.

Такого рода модели должны включать в себя описание объекта и предмета деятельности предприятия, требования к качеству изделий и процессов, состав подразделений до уровня каждого сотрудника с их компетенциями и ими применяемыми инструментами, технологические или бизнес-процессы и другую нормативно-техническую документацию, регламенты взаимодействий подразделений и специалистов, результаты модельных и натурных испытаний объектов и т. д.

Такие знания можно эффективно хранить в виде онтологий и использовать для управления ресурсами предприятий. Известные конструкторы онтологий (Protégé, OntoEdit, OntoLingva и др.) преследуют исследовательские цели, не предназначены для построения моделей деятельности, тем более масштаба предприятий, не дают возможность строить БЗ с тысячами экземпляров, сложны и трудоемки в использовании.

В этой связи становится актуальной и значимой разработка методов и средств формализованного представления знаний, которые позволят связать в единую семантическую сеть различные по своим форматам данные, обеспечить удобный доступ пользователей к этой информации, а также сделать эти знания пригодными для компьютерной обработки. При этом важно предоставить пользователям возможность семантизации информации (классификации и параметризации квантов знаний, их связывания и т. п.), включая построение семантических дескрипторов (метаданных), подходящих для компьютерной обработки. Но сама природа систем знаний не статична, она постоянно развивается — в этой связи нужно сделать знания активными за счет применения мультиагентных технологий, чтобы иметь возможность поддерживать процессы сопоставления квантов знаний, их категоризации, классификации, связывания и т. д.

В результате знания предприятия могут быть организованы в интуитивно понятную систему типа Википедии, в которой поддерживаются процессы самоорганизации таким образом, что-

бы знания были по возможности полными и связанными, не противоречивыми, наглядными и прозрачными, открытыми к изменениям.

Текущие тенденции развития интеллектуального производства связаны с использованием таких методов, как онтологическое представление знаний, машинное обучение, базы знаний и т. д., которые являются очень важными и перспективными для применения в промышленности.

В [17] представлена интеллектуальная мультиагентная система управления производством на основе онтологий. С помощью семантических технологий обеспечиваются высокая адаптивность и реактивность настройки мелкосерийного производства высокотехнологичной продукции, такой как производство самолетов, на стадии ramp-up.

В [18] описывается применение онтологий в распределенной семантической сети производственных цехов предприятия для формирования эффективной и масштабируемой системы взаимодействия и поиска данных по информационным запросам.

В [19] рассматривается возможность применения онтологий для разбиения сложных задач на составные — до уровня автономных. Однако онтологическое описание отдельных операций не производится.

В [20] показано, что разработка онтологий облегчает правильное понимание предметной области, следовательно, знания из внешних источников могут распространяться через связанные открытые данные или напрямую интегрироваться (сопоставляться) с использованием подхода сопоставления онтологий. Показано, как описание онтологических данных может способствовать взаимодействию между моделью данных компании и новыми источниками информации, а также обновлению сохраненных данных путем сопоставления онтологий. Демонстрируется возможность применения онтологий для интеграции данных, что, однако, не решает задачу их онтологического описания.

В [21] отражена возможность конфигурации сервисов, построенных на онтологиях. Показан прототип для изучения гибкой производственной системы, позволяющий проверить осуществимость «жадной» локальной реконфигурации услуг для конкурентных и совместных ситуаций промышленной автоматизации.

В [22] показывается возможность координации и контроля подобной сложной системы через взаимодействие участников с использованием методов и техник проектирования, проверки и развертывания сервисов, возможно, «на лету», что делает проектирование сервисов неизбежным подходом к разработке нового поколения цифровых производственных систем. Подобные сервисы, которые могут инкапсулировать или абстрагировать не только программное обеспечение, но

и физическое поведение (как это делают цифровые двойники), относятся к интеллектуальным адаптивным системам сборки. Предоставляется глубокая семантическая информация, которая дополняет абстрактный уровень онтологий совместимости сервисов.

В [23] описывается использование онтологии для настройки интерфейса взаимодействия человека и автономных агентов в человеко-машинных командах.

Важный пример применения онтологий дается в [24]: распределение задач и управление ими играют важнейшую роль в процессе взаимодействия «человек — робот» во время поисково-спасательных операций. Авторы разрабатывают и оценивают онтологию, которая предоставляет общий словарь для членов команды, как людей, так и роботов. Онтология используется для облегчения обмена данными и выполнения миссий, а также обеспечения необходимой поддержки автоматизированного управления задачами. Результаты свидетельствуют о том, что предлагаемая онтология: 1) облегчает обмен информацией во время миссий; 2) помогает руководителю группы в распределении задач и управлении ими и 3) обеспечивает автоматическую поддержку управления службой городских поисково-спасательных операций.

Из этих примеров уже видно, что онтологии становятся средством управления приложениями, но возможность детального описания задач не была исследована.

Рассмотрим основные этапы создания прототипа новой БЗ, основанной на онтологии, для адаптивного планирования. БЗ включает информацию, в настоящее время отсутствующую в имеющемся учетном контуре существующих баз данных предприятий [25], а именно сведения:

— об организации подразделений в части связи рабочих станций с персональным составом рабочих;

— о том, какие части изделия на каких участках выполняются;

— о связи изделий и технологических процессов, рабочих центров, оснастки, материалов и других;

— о связях технологических операций (между собой: параллельные и последовательные, принадлежность рабочим центрам, связь с компетенциями рабочих и другие);

— о компетенциях рабочих (их реальных навыках и умениях);

— о возможности усиления операций техпроцессов дополнительными рабочими;

— о совместимости рабочих в сменах;

— о типах рабочих, которые должны комбинироваться в смене;

— другие сведения (о планируемых ремонтах и т. д.).

Кроме того, в начале разработки программного обеспечения очень сложно формализовать скрытые знания, и они становятся доступными только тогда, когда первые варианты расписаний, сгенерированные системой, поступают к пользователям.

В качестве *первого этапа* была разработана «Базовая онтология планирования», в которой описываются следующие ключевые понятия:

— заказ — описывает, какой продукт или услуга требуется;

— технологический или бизнес-процесс — описывает набор выполняемых задач (операций);

— задача (операция) — определяет работу, которая должна быть выполнена, включая все необходимые ресурсы;

— ресурс — люди, оборудование или материалы, необходимые для выполнения задач или операций;

— продукт — добавление выпускаемой продукции, используемой в операциях;

— отдел — состоит из ресурсов разных типов.

Кроме того, был введен ряд классов отношений для увязки вышеупомянутых понятий, в том числе:

— заказ «создает» объекты — описывает, какие объекты будут созданы для заказа;

— объект 1 «является-частью» объекта 2 — описывает сборку объектов;

— объект «имеет» бизнес-процесс — описывает технологические или бизнес-процессы, доступные для производства объектов;

— задача 2 «является-следующей-или-предыдущей» для задачи 1 — описывает взаимозависимость задач в бизнес-процессе;

— задача «требует» ресурс — описывает правила соответствия для выбора ресурсов;

— задача «производит» продукт — описывает производимые объекты для задач;

— задаче «нужны» материалы — описывает входные объекты для задач и т. д.

На *втором этапе* были разработаны конструктор онтологии и база знаний, созданная в виде семантической Wiki (рис. 3).

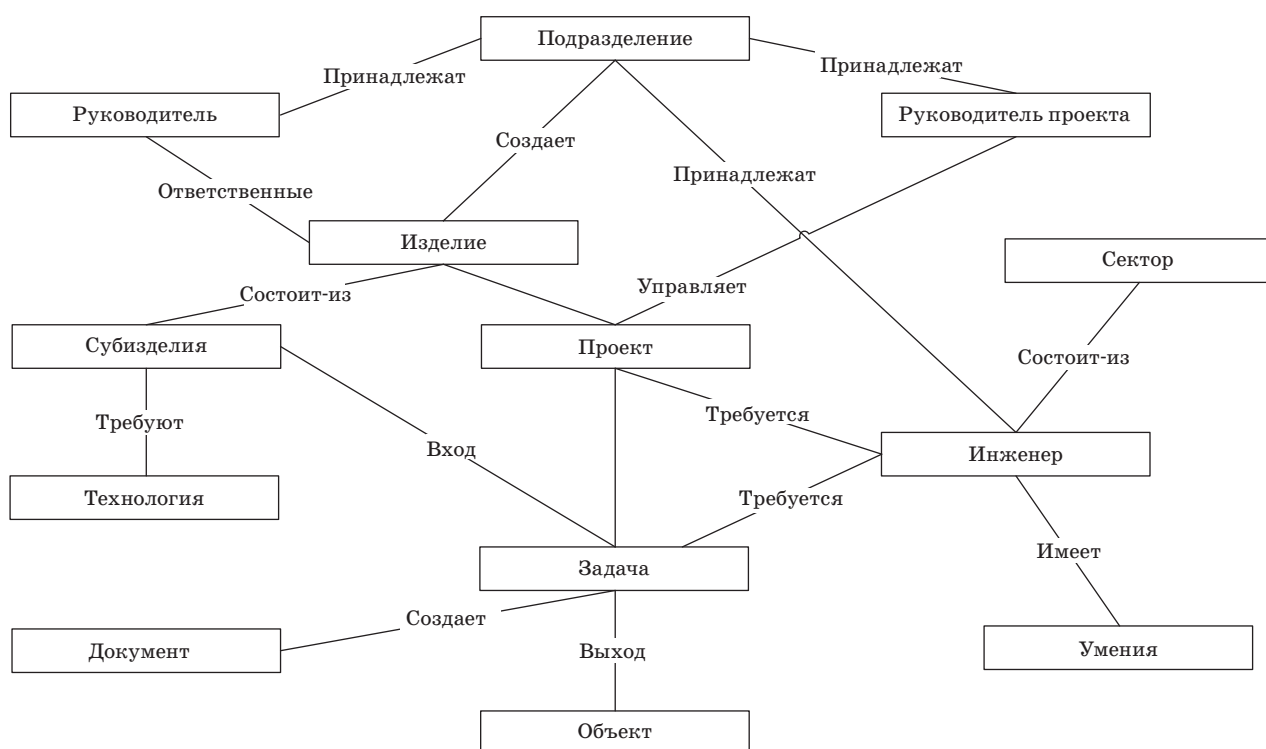
С помощью конструктора онтологии можно спроектировать онтологию планирования для определенной предметной области, а затем на основе этой онтологии домена разработать онтологическую модель (онтомоделю) предприятия.

В онтологию машиностроительного предприятия входят следующие основные разделы:

— организационно-штатная структура предприятия, описывающая перечень подразделений, сотрудников, их профессии, должности, компетенции и т. д.;

— инфраструктурная модель предприятия, описывающая основные технические средства (оборудование, инструменты, материалы, участ-





■ **Рис. 3.** Фрагмент базовой онтологии планирования  
 ■ **Fig. 3.** A fragment from the basic Planning Ontology

ки производства, сооружения, характеристики материальных объектов, физико-технические принципы работы и т. д.);

— бизнес-процессы предприятия, описывающие процессы основной деятельности (технология производства);

— изготавливаемые изделия и услуги, предоставляемые предприятием, ключевые показатели качества и эффективности реализации услуг;

— профессиональная специализация и компетенции рабочих;

— другие знания, необходимые для планирования операций технологических процессов.

Ключевые понятия и отношения онтологии оперативного планирования для машиностроения приведены на рис. 4.

Основной частью БЗ является понятие «задача» и ее экземпляры для выполнения конкретных бизнес-операций или технологических задач, например для заводов (рис. 5) [26].

Главная идея здесь заключалась в том, чтобы разработать агента задачи, который может считывать и интерпретировать отношение «необходимый» в качестве правила соответствия для динамического поиска указанных ресурсов.

Эти отношения связывают понятие «задача» с другими сущностями для планирования, которые могут использоваться агентами задач следующим образом:

«Предыдущая задача» (1) и «Следующая задача» (6) — позволяют агенту задачи находить предыдущую задачу с просьбой передвинуться ранее, перепланировать или найти следующую задачу и отправить ее агенту сообщение о задержке;

«Входные объекты» (2) и «Выходные объекты» (5) — показывают, какие агенты нужны для начала выполнения задачи, а также что будет являться результатом выполнения задачи;

«Составная задача (Часть-Целое)» (3) — показывает, что задача является частью сборки, агент которой получает параметры расписания, и факт выполнения задачи;

«Требования к сотруднику» (4) — определяет требования к исполнителю задачи;

«Кто делал в прошлый раз?» (7) — находит сотрудников, которые уже выполняли подобные задачи.

Разработанный подход позволяет добавлять новые правила соответствия «на лету» с учетом новых факторов сложности, выявленных при планировании конечными пользователями. Например, объект «Исполнитель задач» выбирается для каждой задачи по ее требованиям:

- в каком подразделении работает;
- на каком рабочем центре;
- какую квалификацию имеет;
- какие компетенции имеет;

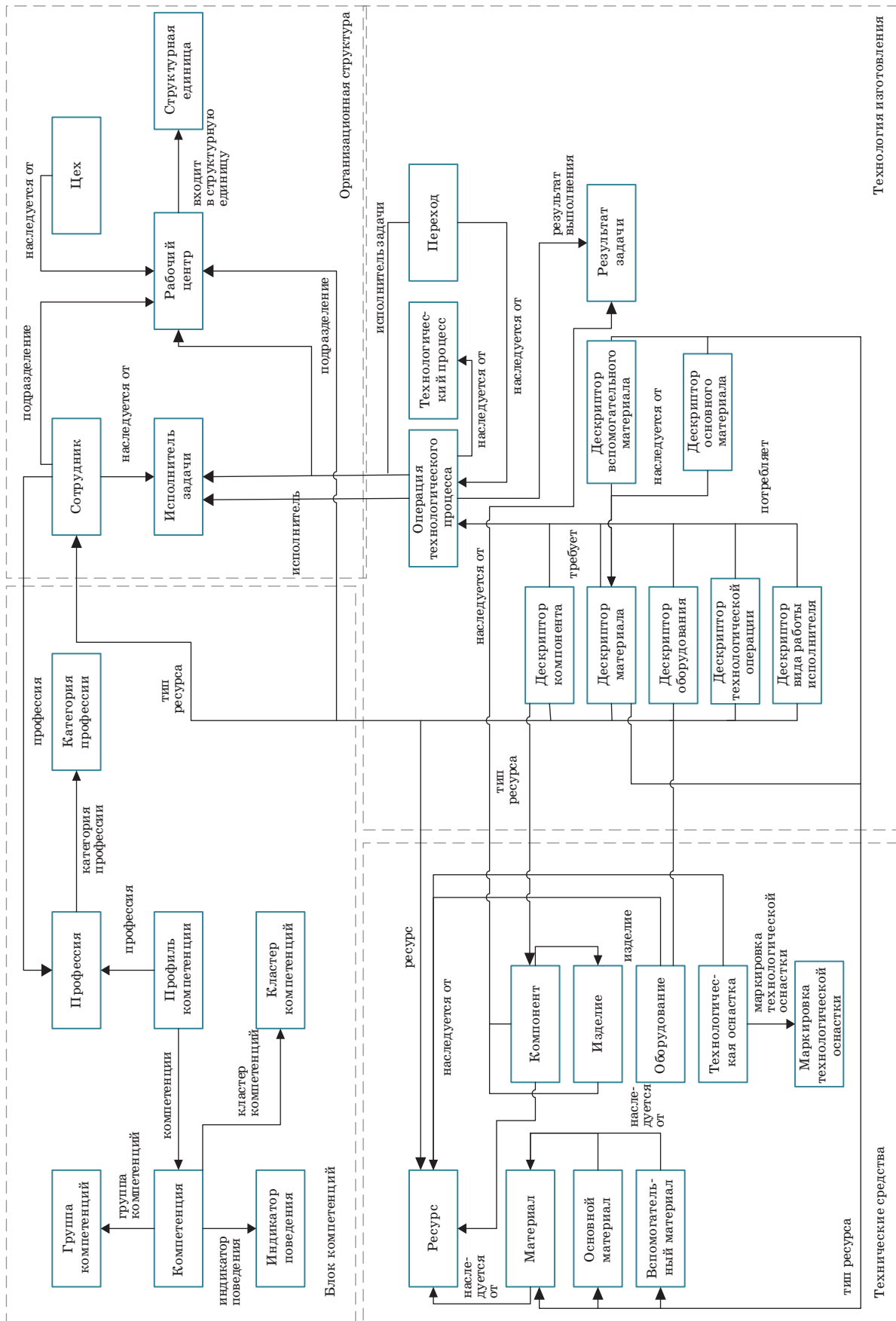
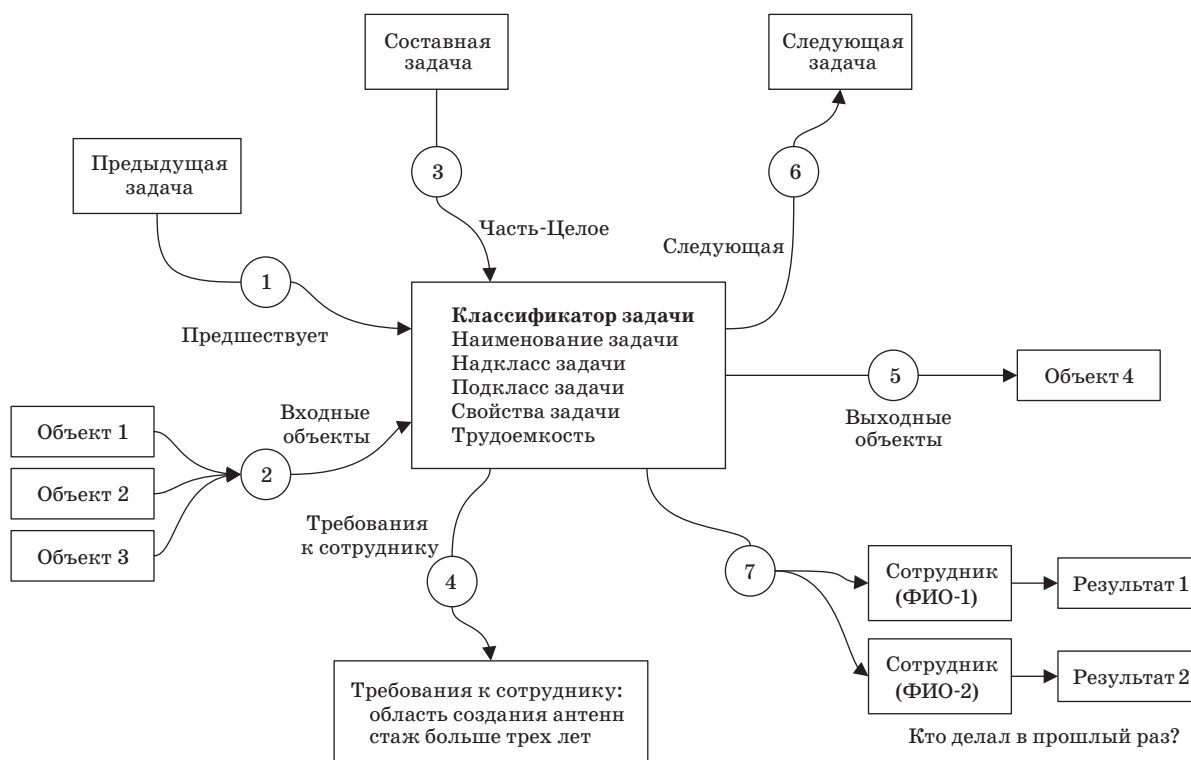


Рис. 4. Общая структура онтологии оперативного планирования для предприятия машиностроения  
 Fig. 4. General structure of ontology of operational planning for a machine-building enterprise



■ **Рис. 5.** Основные типы отношений класса «Задача»  
 ■ **Fig. 5.** The main types of relations in the «Task» class

— умеет ли работать с электронной моделью изделия;

— какие задачи ранее выполнял исполнитель и т. п.

Объект «Технологический процесс» определяет, какие операции можно делать последовательно или параллельно и как усилить операцию при необходимости:

— какое изделие собирается;

— что входит в состав изделия (комплектующие);

— какая часть является закладной, позволяя раньше начинать сборку;

— в каком(их) подразделении(ях) делается;

— из каких операций состоит процесс;

— какие части можно делать только последовательно, а какие — параллельно или последовательно;

— на каких рабочих центрах делается;

— можно ли усилить выполнение процесса;

— в каких частях процесс можно усилить.

Объект «Изделие» задает комплектующие, наличие которых для операций сборки проверяется по плану комплектации или на складе:

— какая это часть более сложного изделия;

— каким технологическим процессом собирается;

— какие комплектующие на входе нужны;

— на каком рабочем центре собирается.

В качестве *третьего этапа* был разработан мультиагентный планировщик на основе общей БЗ, который может быть настроен для любого типа предприятия. Новые отношения в БЗ добавляются в качестве новых правил соответствия, что дает возможность конечным пользователям расширять онтологию предметной области и онтомоделю предприятия «на лету» и тем самым улучшать качество расписаний.

### Пример использования БЗ при планировании операций технологического процесса

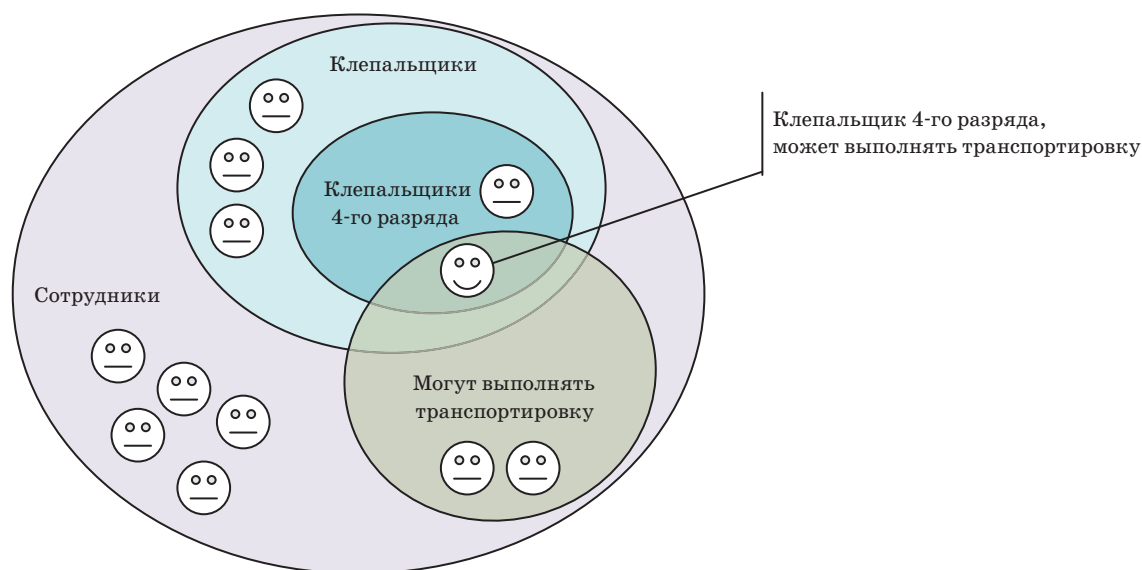
Одной из функций БЗ является ее использование для спецификации требований к планированию каждой операции технологического процесса. В этих целях могут быть заданы параметры структуры изделия, технологических процессов, особенности рабочих и оборудования, а также иные обычно плохо определенные и неформализованные экспертные сведения, важные для планирования работы предприятия.

Список ресурсов, необходимых для выполнения задачи, оформляется в виде набора требований. Каждое требование характеризуется:

— количеством ресурсов данного вида;

— трудоемкостью для этого вида ресурса;

— перечнем атрибутов, ограничивающих множество подходящих под описание ресурсов.



■ **Рис. 6.** Графическая интерпретация требований к ресурсам  
 ■ **Fig. 6.** Graphical interpretation of requirements to resources

- Пример описания шаблона технологического процесса
- An example for description of a technological process template

Описание задачи (субъект)	Отношение	Описание задачи (объект)
Задача «Сборка отсека Ф2»	Имеет подзадачу	Задача «Сборка ТСЕ_7620»
Задача «Сборка отсека Ф2»	Имеет подзадачу	Задача «Сборка ТСЕ_7550»
Задача «Сборка ТСЕ_7620»	Производит	Компонент «ТСЕ_7620»
Задача «Сборка ТСЕ_7550»	Потребляет	Компонент «ТСЕ_7620»
Задача «Сборка ТСЕ_7620»	Имеет подзадачу	Задача «Сборка каркаса ТСЕ 7620»
Задача «Сборка каркаса ТСЕ 7620»	Требует	Ресурс «Рабочий»: профессия = сборщик-клепальщик разряд > 4

На рис. 6 показано последовательное сужение множества возможных исполнителей задачи в соответствии с требованиями: любой сотрудник → клепальщик → клепальщик 4-го разряда → клепальщик 4-го разряда, имеющий компетенцию «может выполнять транспортировку».

Пример описания технологического процесса в виде набора записей в БЗ показан в таблице.

### Результаты адаптивного управления ресурсами

Описанные разработки помогают достичь следующих результатов [27]:

- управление сложностью для нужд производственных компаний, управление цепочками поставок и другими сетями;
- решение «неразрешимых» проблем с возможностью привлечения большего количества факторов, критериев, предпочтений и ограничений;
- поддержка командной работы с пользователями, формирующими баланс интересов;
- детальное представление объектов и процессов реального мира;
- адаптивное реагирование на события в режиме реального времени;
- использование знаний, относящихся к конкретной предметной области или компании, для создания допустимых расписаний, которые соответствуют противоречивым предпочтениям и ограничениям лиц, принимающих решения;
- поддержка БЗ предприятия для управления ресурсами с помощью семантической Wiki в конструкторе онтологий;
- визуализация процессов принятия решений и поддержка вовлечения пользователей для интерактивной корректировки решений с последующим интеллектуальным ручным перерасчетом расписаний;
- возможность пересматривать ограничения, балансовую стоимость, прибыль и уровень обслуживания в индивидуальном порядке для заказов и ресурсов;

— прозрачность и интеграция процессов планирования по всем корпоративным и бизнес-процессам;

— возможность проводить моделирование «что если» параллельно с основным потоком оперативного планирования;

— поддержка подробного расчета затрат на основе действий для заказов и ресурсов;

— работа с ограничениями в существующих технологических решениях.

## Заключение

В статье описан метод применения мультиагентного подхода и баз знаний на основе онтологий для задач планирования ресурсов в реальном времени. Обсуждаются ключевые требования к системе и поведению агентов, влияющие на процесс принятия решений и оптимизацию текущих планов по поступающим событиям. Показано, что

мультиагентная система обеспечивает адаптивность построенного плана, а использование онтологии предметной области обеспечивает гибкость системы для преодоления ограничений и построения консенсусного решения. Преимущество в использовании онтологий заключается в построении отношений понятий задач и ресурсов, что дает возможность учитывать особенности новых задач и осуществлять планирование на основе новых описаний задач и ресурсов. Предлагаемый подход проиллюстрирован примером использования БЗ для разработки шаблона технологической операции предприятия машиностроения.

Статья подготовлена на основе материалов научных исследований в рамках госбюджетной темы ИПУСС РАН № АААА-А16-116040410059-7 «Разработка и исследование моделей, методов и алгоритмов построения планов сменно-суточных заданий при производстве продукции в условиях неопределенности и высокой динамики изменений производственной обстановки».

## Литература

1. Ugarte S., Artiba A., et al. Manufacturing execution system — a literature review. *Production Planning & Control*, 2009, vol. 20, no. 6, pp. 525–539.
2. Kletti J. *Manufacturing Execution System*. Springer, 2010. 272 p.
3. Jeon B. W., et al. An architecture design for smart manufacturing execution system. *Computer-Aided Design and Applications*, 2017, vol. 14, no. 4, pp. 472–485.
4. Strang D., Galaske N., Anderl R. Dynamic, adaptive worker allocation for the integration of human factors in cyber-physical production systems. *Advances in Ergonomics of Manufacturing: Managing the Enterprise of the Future*. Springer, 2016, pp. 517–529.
5. Giret A., Trentesaux D., Prabhu V. Sustainability in manufacturing operations scheduling: A state of the art review. *Journal of Manufacturing Systems*, 2015, vol. 37, no. 1, pp. 126–140.
6. Rzevski G., Skobelev P. *Managing complexity*. WIT Press, 2014. 198 p.
7. Framinan J. M., Leisten R., García R. R. *Manufacturing Scheduling Systems*. Springer, 2014. 400 p.
8. Leung J. Y. T. (Ed.). *Handbook of scheduling: algorithms, models, and performance analysis*. CRC Press, 2004. 1216 p.
9. Voß S. Meta-heuristics: The state of the art. *Local Search for Planning and Scheduling*. Ed. A. Nareyek. LNAI 2148, Springer, 2001, pp. 1–23.
10. Binitha S., Siva Sathya S. A survey of bio inspired optimization algorithms. *International Journal of Soft Computing and Engineering*, 2012, vol. 2, iss. 2, pp. 137–151.
11. Xhafa F., Abraham A. *Metaheuristics for scheduling in industrial and manufacturing applications*. Series: Studies in Computational Intelligence. Springer, 2008, vol. 128. 346 p.
12. Skobelev P. Multi-agent systems for real time adaptive resource management. *Industrial Agents: Emerging Applications of Software Agents in Industry*. Eds. Paulo Leitão, Stamatis Karnouskos. Elsevier, 2015, pp. 207–230.
13. Скобелев П. О. Открытые мультиагентные системы для оперативной обработки информации в процессах принятия решений. *Автометрия*, 2002, т. 38, № 6, с. 45–61.
14. Skobelev P., Vittikh V. Multiagent interaction models for constructing the needs-and-means networks in open systems. *Automation and Remote Control*, 2003, vol. 64, no. 1, pp. 177–185. doi:10.1023/A.1021836811441
15. Виттих В. А., Скобелев П. О. Метод сопряженных взаимодействий для управления распределением ресурсов в реальном масштабе времени. *Автометрия*, 2009, т. 45, № 2, с. 78–87.
16. Mayorov I., Skobelev P. Towards thermodynamics of real timescheduling. *International Journal of Design & Nature and Ecodynamics*, WIT Press, 2015, vol. 10, iss. 3, pp. 213–223. doi:10.2495/DNE-V10-N3-213-223
17. Meridou D. T., Kapsalis A. P., Papadopoulou M.-E. Ch., et al. An ontology-based smart production management system. *IT Professional*, 2015, vol. 17, iss. 6, pp. 36–46.
18. Saeidlou S., Saadat M., Amini Sharifi E., Jules G. D. An ontology-based intelligent data query system in manufacturing networks. *Production & Manufacturing Research Journal*, 2017, vol. 5, iss. 1, pp. 250–267.
19. Klima M., Gregor J., Harcuba O., Marik V. Agent-based shop floor scheduling. *Proceedings of the 8th*

- International Conference on Industrial Applications of Holonic and Multi-Agent Systems (HoloMAS'2017)*, Lion, France, August 28–30, 2017, LNAI 10444, Springer, 2017, pp. 24–38.
20. **Jirkovsky V., Kadera P., Rychtyckij N.** Semi-automatic ontology matching approach for integration of various data models in automotive. *Proceedings of the 8th International Conference on Industrial Applications of Holonic and Multi-Agent Systems (HoloMAS'2017)*, Lion, France, August 28–30, 2017, LNAI 10444, Springer, 2017, pp. 53–65.
21. **Rodrigues N., Leitão P., Oliveira E.** An agent-based approach for the dynamic and decentralized service reconfiguration in collaborative production scenarios. *Proceedings of the 8th International Conference on Industrial Applications of Holonic and Multi-Agent Systems (HoloMAS'2017)*, Lion, France, August 28–30, 2017, LNAI 10444, Springer, 2017, pp. 140–154.
22. **André P., Cardin O.** Trusted services for cyber manufacturing systems. *Proceedings of the 7th Workshop on Service Orientation in Holonic and Multi-Agent Manufacturing (SOHOMA17)*, Nantes, France, October 19–20, 2017. *Service Orientation in Holonic and Multi-Agent Manufacturing, Studies in Computational Intelligence*. Eds. Borangiu T., Trentesaux D., Thomas A., Cardin O. Springer, 2018, vol. 762, pp. 359–370.
23. **Vecht B. van der, Diggelen J. van, Peeters M., Barnhoorn J., and Waa J. van der.** SAIL: A social artificial intelligence layer for human-machine teaming. *Proceedings of the 16th International Conference on Practical Applications of Agents and Multiagent Systems (PAAMS 2018)*, Toledo, Spain, 20–22 June, 2018. *Advances in Practical Applications of Agents, Multi-Agent Systems, and Complexity*. Eds. Y. Demazeau, et al. Springer, 2018, LNAI 10978, pp. 262–274.
24. **Saad E., Hindriks K. V., Neerincx M. A.** Ontology design for task allocation and management in urban search and rescue missions. *Proceedings of the 10th International Conference on Agents and Artificial Intelligence (ICAART 2018)*, Funchal, Madeira, Portugal, 16–18 January, 2018, SciTePress, 2018, vol. 2, pp. 622–629.
25. **Skobelev P., Kozhevnikov S., Mayorov I., Poludov D., Simonova E.** Smart projects: Multi-agent solution for aerospace applications. *International Journal of Design & Nature and Ecodynamics*, 2017, vol. 12, iss. 4, pp. 492–504. doi:10.2495/DNE-V12-N4-492-504
26. **Skobelev P., Eliseev V., Mayorov I., Travin V., Zhilyaev A., Simonova E.** Designing distributed multi-agent system for aggregate and final assembly of complex technical objects on ramp-up stage. *Proceedings of the 10th International Conference on Agents and Artificial Intelligence (ICAART 2018)*, Funchal, Madeira, Portugal, 16–18 January, 2018, SciTePress, 2018, vol. 1, pp. 250–257.
27. **Skobelev P.** Towards autonomous AI systems for resource management: Applications in industry and lessons learned. *Proceedings of the 16th International Conference on Practical Applications of Agents and Multiagent Systems (PAAMS 2018)*, Toledo, Spain, 20–22 June, 2018. *Advances in Practical Applications of Agents, Multi-Agent Systems, and Complexity*. Eds. Y. Demazeau, et al. Springer, 2018, LNAI 10978, pp. 12–25.

UDC 338.984

doi:10.31799/1684-8853-2018-6-105-117

**Adaptive multi-agent planning of industrial resources based on ontology**P. O. Skobelev<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Acting Head of Labs, orcid.org/0000-0003-2199-9557O. I. Lakhin<sup>b</sup>, PhD, Tech., Chief Executive Officer, orcid.org/0000-0002-9360-3198I. V. Mayorov<sup>a</sup>, PhD, Tech., Analyst, orcid.org/0000-0002-3130-8142E. V. Simonova<sup>c</sup>, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0003-2638-2572, simonova.elena.v@gmail.com<sup>a</sup>Institute for the Control of Complex Systems of RAS, 61, Sadovaya St., 443020, Samara, Russian Federation<sup>b</sup>Software Engineering Company «Smart Solutions», 17, Moscovskoe St., 443013, Samara, Russian Federation<sup>c</sup>Samara National Research University, 34, Moscovskoe St., 443086, Samara, Russian Federation

**Introduction:** Currently, new solutions are required in managing industrial resources, in order to maintain a high level of adaptability and efficiency. Classical combinatorial or heuristic methods and tools cannot provide adequate solutions for real-time resource management. **Purpose:** Development of a method for planning industrial resources based on multi-agent technologies and ontology, in order to adapt the system to unforeseen events, such as new orders, unavailable resources, etc. **Results:** An adaptive planning method has been developed, in which agents continuously improve the system performance in real time by identifying and resolving conflict situations caused by unforeseen events. To adjust multi-agent planning to specific features of the production process, semantic networks (ontologies) are used, which are the basis of ontological knowledge bases for storing information about the peculiarities of a particular enterprise. In this regard, the following elements have been developed: the basic planning ontology, an ontology editor for creating a specialized enterprise ontology, a knowledge base in the form of a semantic Wikipedia for the enterprise, and a multi-agent scheduler which can be customized using the basic and specialized ontologies in accordance with specific production features and requirements for the technological operations. **Practical relevance:** Application of the system developed with the method of planning industrial resources is not limited to machine-building enterprises, but can be recommended for managing projects, supply chains, etc.

**Keywords** — complex systems, resource management, real-time scheduling, ontology, knowledge base, multi-agent technology, demand-resource network, self-organizing, adaptability.

**Citation:** Skobelev P. O., Lakhin O. I., Mayorov I. V., Simonova E. V. Adaptive multi-agent planning of industrial resources based on ontology. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 105–117 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2018-6-105-117

## References

- Ugarte S., Artiba A., et al. Manufacturing execution system — a literature review. *Production Planning & Control*, 2009, vol. 20, no. 6, pp. 525–539.
- Kletti J. *Manufacturing Execution System*. Springer, 2010. 272 p.
- Jeon B. W., et al. An architecture design for smart manufacturing execution system. *Computer-Aided Design and Applications*, 2017, vol. 14, no. 4, pp. 472–485.
- Strang D., Galaske N., Anderl R. Dynamic, adaptive worker allocation for the integration of human factors in cyber-physical production systems. *Advances in Ergonomics of Manufacturing: Managing the Enterprise of the Future*. Springer, 2016, pp. 517–529.
- Giret A., Trentesaux D., Prabhu V. Sustainability in manufacturing operations scheduling: A state of the art review. *Journal of Manufacturing Systems*, 2015, vol. 37, no. 1, pp. 126–140.
- Rzevski G., Skobelev P. *Managing complexity*. WIT Press, 2014. 198 p.
- Framinan J. M., Leisten R., García R. R. *Manufacturing Scheduling Systems*. Springer, 2014. 400 p.
- Leung J. Y. T. (Ed.). *Handbook of scheduling: algorithms, models, and performance analysis*. CRC Press, 2004. 1216 p.
- Voß S. Meta-heuristics: The state of the art. *Local Search for Planning and Scheduling*. Ed. A. Nareyek. LNAI 2148, Springer, 2001. pp. 1–23.
- Binitha S., Siva Sathya S. A survey of bio inspired optimization algorithms. *International Journal of Soft Computing and Engineering*, 2012, vol. 2, iss. 2, pp. 137–151.
- Xhafa F., Abraham A. *Metaheuristics for scheduling in industrial and manufacturing applications*. Series: Studies in Computational Intelligence. Springer, 2008, vol. 128. 346 p.
- Skobelev P. Multi-agent systems for real time adaptive resource management. *Industrial Agents: Emerging Applications of Software Agents in Industry*. Eds. Paulo Leitão, Stamatios Karnouskos. Elsevier, 2015, pp. 207–230.
- Skobelev P. Open multi-agent systems for decision making support. *Avtometriya*, 2002, vol. 38, no. 6, pp. 45–61 (In Russian).
- Skobelev P., Vittikh V. Multiagent interaction models for constructing the needs-and-means networks in open systems. *Automation and Remote Control*, 2003, vol. 64, no. 1, pp. 177–185. doi:10.1023/A.1021836811441
- Vittikh V., Skobelev P. The compensation method of agents interactions for real time resource allocation. *Avtometriya*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 78–87 (In Russian).
- Mayorov I., Skobelev P. Towards thermodynamics of real timescheduling. *International Journal of Design & Nature and Ecodynamics*, WIT Press, 2015, vol. 10, iss. 3, pp. 213–223. doi:10.2495/DNE-V10-N3-213-223
- Meridou D. T., Kapsalis A. P., Papadopoulou M.-E. Ch., et al. An ontology-based smart production management system. *IT Professional*, 2015, vol. 17, iss. 6, pp. 36–46.
- Saeidlou S., Saadat M., Amini Sharifi E., Jules G. D. An ontology-based intelligent data query system in manufacturing networks. *Production & Manufacturing Research Journal*, 2017, vol. 5, iss. 1, pp. 250–267.
- Klima M., Gregor J., Harcuba O., Marik V. Agent-based shop floor scheduling. *Proceedings of the 8th International Conference on Industrial Applications of Holonic and Multi-Agent Systems (HoloMAS'2017)*, Lion, France, August 28–30, 2017, LNAI 10444, Springer, 2017, pp. 24–38.
- Jirkovsky V., Kadera P., Rychtyckyj N. Semi-automatic ontology matching approach for integration of various data models in automotive. *Proceedings of the 8th International Conference on Industrial Applications of Holonic and Multi-Agent Systems (HoloMAS'2017)*, Lion, France, August 28–30, 2017, LNAI 10444, Springer, 2017, pp. 53–65.
- Rodrigues N., Leitão P., Oliveira E. An agent-based approach for the dynamic and decentralized service reconfiguration in collaborative production scenarios. *Proceedings of the 8th International Conference on Industrial Applications of Holonic and Multi-Agent Systems (HoloMAS'2017)*, Lion, France, August 28–30, 2017, LNAI 10444, Springer, 2017, pp. 140–154.
- André P., Cardin O. Trusted services for cyber manufacturing systems. *Proceedings of the 7th Workshop on Service Orientation in Holonic and Multi-Agent Manufacturing (SOHOMA17)*, Nantes, France, October 19–20, 2017. Service Orientation in Holonic and Multi-Agent Manufacturing, Studies in Computational Intelligence. Eds. Borangiu T., Trentesaux D., Thomas A., Cardin O. Springer, 2018, vol. 762, pp. 359–370.
- Vecht B. van der, Diggelen J. van, Peeters M., Barnhoorn J., and Waa J. van der. SAIL: A social artificial intelligence layer for human-machine teaming. *Proceedings of the 16th International Conference on Practical Applications of Agents and Multiagent Systems (PAAMS 2018)*, Toledo, Spain, 20–22 June, 2018. Advances in Practical Applications of Agents, Multi-Agent Systems, and Complexity. Eds. Y. Demazeau, et al. Springer, 2018, LNAI 10978, pp. 262–274.
- Saad E., Hindriks K. V., Neerinx M. A. Ontology design for task allocation and management in urban search and rescue missions. *Proceedings of the 10th International Conference on Agents and Artificial Intelligence (ICAART 2018)*, Funchal, Madeira, Portugal, 16–18 January, 2018, SciTePress, 2018, vol. 2, pp. 622–629.
- Skobelev P., Kozhevnikov S., Mayorov I., Poludov D., Simonova E. Smart projects: Multi-agent solution for aerospace applications. *International Journal of Design & Nature and Ecodynamics*, 2017, vol. 12, iss. 4, pp. 492–504. doi:10.2495/DNE-V12-N4-492-504
- Skobelev P., Eliseev V., Mayorov I., Travin V., Zhilyaev A., Simonova E. Designing distributed multi-agent system for aggregate and final assembly of complex technical objects on ramp-up stage. *Proceedings of the 10th International Conference on Agents and Artificial Intelligence (ICAART 2018)*, Funchal, Madeira, Portugal, 16–18 January, 2018, SciTePress, 2018, vol. 1, pp. 250–257.
- Skobelev P. Towards autonomous AI systems for resource management: Applications in industry and lessons learned. *Proceedings of the 16th International Conference on Practical Applications of Agents and Multiagent Systems (PAAMS 2018)*, Toledo, Spain, 20–22 June, 2018. Advances in Practical Applications of Agents, Multi-Agent Systems, and Complexity. Eds. Y. Demazeau, et al. Springer, 2018, LNAI 10978, pp. 12–25.

**АБРАМОВ**  
**Максим**  
**Викторович**



Научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН, старший преподаватель математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. В 2013 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет по специальности «Прикладная информатика в сфере международных отношений». В 2018 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором 72 научных публикаций. Область научных интересов — информационная безопасность, социоинженерные атаки, клиент-серверные технологии, бизнес-аналитика и др. Эл. адрес: mva16@list.ru

**БЛАУНШТЕЙН**  
**Натан**  
**Шаевич**



Профессор Иерусалимского технологического института, профессор-эмеритус кафедры систем связи инженерного факультета Негевского университета им. Бен-Гуриона, Беэр-Шева, Израиль. В 1972 году окончил Томский государственный университет по специальности «Радиофизика и электроника, включая квантовую». В 1991 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Является автором около 200 научных публикаций, в том числе 12 монографий, пяти патентов и трех изобретений. Область научных интересов — радиофизика, системы проводной и беспроводной связи, радары, оптика и лидары. Эл. адрес: nathan.blaunstein@hotmail.com

**ВАСИЛЬЕВ**  
**Николай**  
**Николаевич**



Старший научный сотрудник лаборатории теории представлений и динамических систем Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В 1975 году окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета по специальности «Алгебра и теория чисел». В 1990 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Является автором более 120 научных публикаций. Область научных интересов — компьютерная алгебра, вычислительная алгебраическая геометрия и коммутативная алгебра, теория динамических систем, небесная механика. Эл. адрес: vasiliev@pdmi.ras.ru

**БАЛОНИН**  
**Николай**  
**Алексеевич**



Профессор кафедры вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. В 1982 году окончил Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) по специальности «Автоматика и телемеханика». В 2008 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором более 100 научных публикаций, в том числе трех монографий. Область научных интересов — теория динамических систем, теория идентификации, теория операторов, теория матриц, вычислительные методы, интернет-робототехника, интернет-книги с исполняемыми алгоритмами, научные социальные сети. Эл. адрес: korbendfs@mail.ru

**БУРЯЧЕНКО**  
**Владимир**  
**Викторович**



Старший преподаватель кафедры информатики и вычислительной техники Сибирского государственного университета науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнёва, Красноярск. В 2011 году окончил магистратуру Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнёва по специальности «Интеллектуальные системы». В 2014 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором 23 научных публикаций и двух свидетельств на регистрацию программных продуктов. Область научных интересов — цифровая обработка изображений и видеопоследовательностей, стабилизация видео. Эл. адрес: buryachenko@sibsau.ru

**ВОРОНИН**  
**Алексей**  
**Владимирович**



Ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Москва. В 1989 году окончил Высшее военное командное училище связи им. М. И. Калинина по специальности «Радиосвязь». В 2001 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором более 130 научных публикаций. Область научных интересов — защита информации, информационная безопасность, информатика и управление. Эл. адрес: aleksey.v.v@mail.ru



**ЗОЛОТИН  
Андрей  
Алексеевич**



Старший инженер-разработчик ЕПАМ Системс ГмбХ, Франкфурт-на-Майне, Германия. В 2015 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет по специальности «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем». В 2018 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Является автором 37 научных публикаций. Область научных интересов — вероятностные графические модели, алгебраические байесовские сети, данные с неопределенностью, нечеткие вычисления, байесовские сети доверия, задачи линейного программирования и др. Эл. адрес: andrey.zolotin@gmail.com

**КУЦ  
Александр  
Константинович**



Магистрант кафедры автоматизации, управления, мехатроники Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю. А. В 2017 году окончил бакалавриат Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю. А. по специальности «Мехатроника и робототехника». Является автором двух научных публикаций и одной программы для ЭВМ. Область научных интересов — методы анализа нейрофизиологических сигналов, нейронаука, методы математического моделирования робототехнических систем. Эл. адрес: kuc1995@mail.ru

**МАЙОРОВ  
Игорь  
Владимирович**



Руководитель отдела разработки математических моделей, методов и алгоритмов ООО «НПК «Разумные решения», Самара. В 1989 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета по специальности «Физика». В 2017 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором более 40 научных публикаций. Область научных интересов — системы искусственного интеллекта, мультиагентные системы, теория оптимизации, дискретная математика. Эл. адрес: imayorov@kg.ru

**ЕДНЕРАЛ  
Виктор  
Федорович**



Старший научный сотрудник НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, доцент Российского университета дружбы народов, ветеран труда. В 1976 году окончил Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова по специальности «Физик». В 1981 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Является автором более 100 научных публикаций и пяти свидетельств о регистрации прав на программное обеспечение. Область научных интересов — компьютерная алгебра, динамические системы, построение нормальных форм. Эл. адрес: edneral\_vf@rudn.ru

**ЛАХИН  
Олег  
Иванович**



Руководитель направления, ООО «НПК «Разумные решения», Самара. В 1998 году окончил Поволжский институт информатики, радиотехники и связи по специальности «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», в 2006 году — Самарский государственный экономический университет по Федеральной программе подготовки управленческих кадров. Является автором 31 научной публикации. Область научных интересов — мультиагентные технологии для создания интеллектуальных систем управления ресурсами в реальном времени, использующих принципы самоорганизации и эволюции. Эл. адрес: lakhin@yandex.ru

**МАКСИМЕНКО  
Владимир  
Александрович**



Доцент Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю. А., старший научный сотрудник научно-образовательного центра «Нелинейная динамика сложных систем». В 2012 году окончил Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского по специальности «Физика открытых нелинейных систем». В 2015 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Является автором более 50 научных публикаций. Область научных интересов — анализ устойчивости динамических режимов, реализующихся в пространственно-распределенных системах различной природы и др. Эл. адрес: maximenkovl@gmail.com

**МАЛЬЦЕВ  
Георгий  
Николаевич**



Профессор кафедры космических радиотехнических систем Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, заслуженный деятель науки РФ, действительный член Академии космонавтики им. К. Э. Циолковского. В 1980 году окончил Военный инженерный Краснознаменный институт им. А. Ф. Можайского по специальности «Радиотехнические системы комплексов». В 1994 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором более 300 научных публикаций и 27 патентов на изобретения. Область научных интересов — обработка сигналов в радиотехнических и оптико-электронных информационных системах и др. Эл. адрес: georgy\_maltsev@mail.ru

**ПИСАРЧИК  
Александр  
Николаевич**



Профессор, ведущий научный сотрудник Центра биомедицинских технологий Технического университета Мадрида, академический редактор журнала PLoS One и др. В 1976 году окончил Белорусский государственный университет по специальности «Физика». В 1990 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Является автором более 300 научных публикаций и пяти патентов на изобретения. Область научных интересов — нелинейная динамика, хаос, синхронизация, нейронная динамика, мультистабильность, стохастические эффекты, анализ нейрофизиологических данных и интерфейсы мозг-компьютер. Эл. адрес: alexander.Pisarchik@ctb.upm.es

**САДОВНИКОВ  
Сергей  
Александрович**



Аспирант, младший научный сотрудник Института оптики атмосферы им. В. Е. Зуева СО РАН, Томск. В 2015 году окончил Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники по специальности «Фотоника и оптоинформатика». Является автором 16 научных публикаций. Область научных интересов — атмосферный пограничный слой, физика лазеров, спектроскопия атмосферы. Эл. адрес: sadsa@iao.ru

**ПАРАСИДИС  
Иоаннис**



Доцент кафедры электротехники Технологического института Фессалии, Греция. В 1980 году окончил математический факультет Казахского государственного университета им. С. М. Кирова (Алма-Ата) по специальности «Математика». В 1989 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Является автором 30 научных публикаций. Область научных интересов — расширение операторов, краевые задачи для дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, спектральные задачи, обратные задачи, разностные уравнения. Эл. адрес: paras@teilar.gr

**ПРОВИДАС  
Ефимнос**



Доцент кафедры машиностроения Технологического института Фессалии, Греция. В 1984 году окончил бакалавриат математического факультета Аристотельского университета города Салоники, Греция. В 1991 году защитил диссертацию (PhD) на факультете математики и статистики Брунельского университета, Великобритания. Является автором 32 научных публикаций. Область научных интересов — прикладная математика, дифференциальные, интегральные и разностные уравнения, численные методы, метод конечных элементов. Эл. адрес: providas@teilar.gr

**СЕРГЕЕВ  
Александр  
Михайлович**



Старший преподаватель кафедры вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. В 2004 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения по специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети». Является автором 35 научных публикаций. Область научных интересов — численные методы, теория вычислительных процессов, проектирование специализированных процессоров. Эл. адрес: asklab@mail.ru

**СЕРГЕЕВ**  
**Михаил**  
**Борисович**



Профессор, директор Института вычислительных систем и программирования, заведующий кафедрой вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, почетный работник высшего профессионального образования РФ.

В 1980 году окончил ЛЭТИ по специальности «Электронные вычислительные машины».

В 2001 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук.

Является автором более 100 научных публикаций и 14 патентов на изобретения.

Область научных интересов — теория разрядных вычислений, методы проектирования спецпроцессоров для систем контроля и управления и др.

Эл. адрес: mbse@mail.ru

**СКОБЕЛЕВ**  
**Петр**  
**Олегович**



Ведущий научный сотрудник Института проблем управления сложных системами РАН, профессор кафедры инженерии знаний Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, Самара.

В 1983 году окончил Куйбышевский авиационный институт им. академика С. П. Королева по специальности «АСУ и прикладная математика».

В 2003 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук.

Является автором 191 научной публикации и трех патентов на изобретения.

Область научных интересов — мультиагентные технологии для создания интеллектуальных систем управления ресурсами в реальном времени и др.

Эл. адрес: petr.skobelev@gmail.com

**ТИМОФЕЕВСКАЯ**  
**Ольга**  
**Дмитриевна**



Доцент кафедры квантовой теории и физики высоких энергий физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

В 1974 году окончила физический факультет МГУ по специальности «Физик». В 1978 году защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Является автором более 90 научных публикаций, в том числе двух книг.

Область научных интересов — компьютерная алгебра, квантовая теория, квантовые вычисления и квантовая информация.

Эл. адрес: timofod@mail.ru

**СИМОНОВА**  
**Елена**  
**Витальевна**



Ведущий аналитик ООО «НПК «Разумные решения», Самара, доцент кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королева.

В 1985 году окончила Куйбышевский авиационный институт им. академика С. П. Королева по специальности «Автоматизированные системы управления».

В 1994 году защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором 126 научных публикаций.

Область научных интересов — разработка интеллектуальных систем управления мобильными ресурсами на основе мультиагентных технологий и др.

Эл. адрес: simonova.elena.v@gmail.com

**СОХЕН**  
**Михаил**  
**Юрьевич**



Первый заместитель генерального директора по развитию ЗАО «ЭВРИКА», Санкт-Петербург.

В 1997 году окончил Военную инженерно-техническую академию им. А. Ф. Можайского по специальности «Защита информационных технологий».

В 2000 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором более 25 научных публикаций.

Область научных интересов — системы радиосвязи, мониторинга, геоинформационные системы.

Эл. адрес: sohen@euresca.ru

**ТУЛУПЬЕВ**  
**Александр**  
**Львович**



Заведующий лабораторией теоретических и междисциплинарных проблем информатики Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН.

В 1992 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет по специальности «Прикладная математика», в 1997 году — по специальности «Социология», в 2003 году — Йельский университет, США.

В 2010 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Является автором 400 научных публикаций.

Область научных интересов — представление и обработка данных и знаний с неопределенностью и др.

Эл. адрес: alexander.tulup'ev@gmail.com

**ФАВОРСКАЯ  
Маргарита  
Николаевна**



Профессор, заведующая кафедрой информатики и вычислительной техники Сибирского государственного университета науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнёва, Красноярск. В 1980 году окончила Рыбинский авиационный технологический институт по специальности «Конструирование и производство электронно-вычислительной аппаратуры». В 2011 году защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором около 160 научных публикаций. Область научных интересов — распознавание образов, цифровая обработка изображений, кластерный анализ, интеллектуальные технологии обработки данных и др.  
Эл. адрес: favorskaya@sibsau.ru

**ХЛОБЫСТОВА  
Анастасия  
Олеговна**



Стажер-исследователь лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН, студентка Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — социоинженерные атаки, поведение пользователей в контексте информационной безопасности, оценка уязвимости пользователя, профиль компетенции злоумышленника при анализе защиты информационных систем от социоинженерных атак.  
Эл. адрес: akhlobystova@yandex.ru

**ХРАМОВ  
Александр  
Евгеньевич**



Заведующий кафедрой автоматизации, управления, мехатроники Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю. А., профессор кафедры электроники, колебаний и волн Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. В 1996 году окончил Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. В 2005 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Является автором более 200 научных публикаций. Область научных интересов — нейронаука, теория сложных сетей, вейвлет-анализ и его приложения в нелинейной динамике и нейронауке, нейроинтерфейсы.  
Эл. адрес: hramovae@gmail.com

**ЩЕКОТОВ  
Максим  
Сергеевич**



Научный сотрудник лаборатории интегрированных систем автоматизации Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН. В 2013 году окончил Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ) по специальности «Информатика и вычислительная техника». Является автором 19 научных публикаций. Область научных интересов — управление знаниями, профилирование, базы данных, мобильные технологии, облачные технологии.  
Эл. адрес: max.schekotov@mail.ru

# СОДЕРЖАНИЕ ЖУРНАЛА «ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ» ЗА 2018 г. [№ 1–6]

	№	Стр.
<b>Balonin N. A., Doković D. Ž.</b> Symmetric Hadamard matrices of orders 268, 412, 436 and 604	4	2
<b>Balonin Yu. N., Sergeev A. M.</b> Two-circulant Hadamard matrices, weighing matrices, and ryser’s conjecture	3	2
<b>Blaunstein N. S., Ben-Shimol Y.</b> Prediction of operational parameters of radio signals passing a land-satellite link through stormtime ionosphere	1	85
<b>Blaunstein N. S., Sergeev M. B., Nenashev V. A.</b> Impact of built-up terrain on operational parameters of signals in land-satellite communication links	1	74
<b>Engelberg S., Keren O.</b> Error-correcting codes for ternary content addressable memories: a new perspective	1	68
<b>Favorskaya M. N., Buryachenko V. V.</b> Background extraction method for analysis of natural images captured by camera traps	6	35
<b>Lyandres V.</b> Model of deep fading	1	123
<b>Maksimenko V. A., Runnova A. E., Kulanin R. A., Protasov P. A., Zhuravlev M. O., Chholak P., Pisarchik A., Hramova A. E.</b> Algorithm for automatic estimation of human brain activity features during mental task evaluation	5	104
<b>Martynova L. A., Bezruk G. G., Myslivyi A. A.</b> Application of differential mode for auv location	4	15
<b>Mikhailov V. V., Perevaryukha A. Yu., Reshetnikov Yu. S.</b> Model of fish population dynamics with calculation of individual growth rate and hydrological situation scenarios	4	31
<b>Pastushok I. A.</b> Efficiency evaluation of scheduling algorithms for delay-sensitive traffic in OFDM downlink	5	88
<b>Runnova A. E.</b> Mathematical model of pattern selection for complex multichannel data in EEG processing	4	39
<b>Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.</b> Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 1	4	86
<b>Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.</b> Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 2	5	94
<b>Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.</b> Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 3	6	82
<b>Sinjuk A. D., Ostroumov O. A.</b> Theorem about key capacity of a communication network	5	79
<b>Trofimov A. N.</b> Random coding bound for channels with memory — decoding function with partial overlapping. Part 1. Derivation of main expression	3	79
<b>Trofimov A. N.</b> Random coding bound for channels with memory — decoding function with partial overlapping. Part 2. Examples and discussion	4	73
<b>Vassiliev N. N., Parasidis I. N., Providas E.</b> Exact solution method for Fredholm integro-differential equations with multipoint and integral boundary conditions. Part 1. Extention method	6	14
<b>Агеев С. А., Саенко И. Б., Котенко И. В.</b> Метод и алгоритмы обнаружения аномалий в трафике мультисервисных сетей связи, основанные на нечетком логическом выводе	3	61
<b>Балонин Н. А., Сергеев М. Б.</b> Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Часть 1	6	2
<b>Бритов Г. С.</b> Оптимальное терминальное диагностирование управляемых динамических систем	3	17
<b>Бураков М. В., Коновалов А. С.</b> Нечеткий супервизор ПИД-регулятора	5	13

	№	Стр.
<b>Воронин А. В., Мальцев Г. Н., Сохен М. Ю.</b> Наглядность визуализации данных в геоинформационной системе при использовании свойств золотого сечения	6	46
<b>Галинина О. С., Андреев С. Д., Тюрликов А. М.</b> Учет специфики доступа большого числа устройств при межмашинном взаимодействии в современных сотовых сетях	4	105
<b>Гордеев А. В., Горелик Д. В.</b> Сравнительное тестирование контейнерной и гипервизорной виртуализации	2	60
<b>Городецкий А. Е., Курбанов В. Г., Тарасова И. Л.</b> Принятие решений в центральной нервной системе робота	1	21
<b>Григорьев А. П., Бурлуцкий С. Г., Чернелевский А. О.</b> Диагностирующая система деятельности оператора-навигатора на основе задачного подхода	2	96
<b>Егорова И. С., Ицыксон В. М.</b> Обзор динамических методов восстановления частичных спецификаций программных библиотек на основе анализа программных проектов	2	67
<b>Егоров И. В., Мелехин В. Ф.</b> Способ организации автомата с памятью с повышенной устойчивостью к мягким отказам и регистрацией мягких отказов	2	18
<b>Еднерал В. Ф., Тимофеевская О. Д.</b> Поиск периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода нормальной формы. Случай уравнений четвертого порядка	6	24
<b>Ефимов А. А.</b> Моделирование системы управления в скользящем режиме активным преобразователем тока	2	49
<b>Зиатдинов С. И., Осипов Л. А., Соколова Ю. В.</b> Синтез дискретных фильтров методом инвариантных дифференциальных уравнений	3	10
<b>Иночкин Ф. М., Круглов С. К., Бронштейн И. Г.</b> Преодоление дифракционного предела при оптических измерениях границ объектов	1	96
<b>Карасёв Е. Ю., Ватаманюк И. В., Савельев А. И., Ронжин А. Л.</b> Архитектурные решения интеграции модуля видео-конференц-связи в киберфизическое интеллектуальное пространство	1	2
<b>Княжский А. Ю.</b> Синтез и анализ точности системы измерения параметров морского волнения, используемой на низколетящем аппарате	2	91
<b>Козин И. С.</b> Метод обеспечения безопасности персональных данных при их обработке в информационной системе на основе анализа поведения пользователей	3	69
<b>Коршунов Г. И., Липатников В. А., Шевченко А. А., Малышев Б. Ю.</b> Метод адаптивного управления защитой информационно-вычислительных сетей на основе анализа динамики действий нарушителя	4	61
<b>Красильников Н. Н., Красильникова О. И.</b> Проблема совместимости систем телевизионного вещания 2D и 3D и метод ее решения	1	11
<b>Крюков Д. А., Тескер И. А.</b> Генерация псевдослучайных чисел на основе преобразований графических объектов	2	2
<b>Кузнецов В. А., Людаев М. Ю.</b> Стереофотометрическое трехмерное сканирование с использованием импульсного осветителя	3	25
<b>Кучмин А. Ю.</b> Проблемы идентификации нестационарных динамических объектов	2	28
<b>Лада А. Н., Майоров И. В.</b> Мультиагентный метод построения сменно-суточных заданий для задачи планирования производственных ресурсов в реальном времени	5	112
<b>Лашков И. Б.</b> Подход к распознаванию стиля вождения водителя транспортного средства на основе использования сенсоров смартфона	5	2
<b>Лиманова Н. И., Атаев С. Г.</b> Метод анализа снимков компьютерной томографии на основе поэтапной бинаризации изображений и его программная реализация	3	98

	№	Стр.
<b>Лямин А. В.</b> Метод формальной верификации программ для виртуальной лаборатории «Машина Поста»	2	104
<b>Максименко В. А., Куц А. К., Писарчик А. Н., Храмов А. Е.</b> Математическое моделирование процессов обработки визуальной сенсорной информации по многоканальным сигналам ЭЭГ	6	58
<b>Максименко В. А., Харченко А. А., Лютъёханн А.</b> Автоматизированная система для предсказания эпилептических приступов по многоканальным записям электрической активности мозга	4	115
<b>Мальцев Г. Н., Якимов В. Л., Соловьев С. В., Лебедева Н. В.</b> Первичная обработка телеметрической информации с использованием динамических моделей изменения параметров и парциальной нелинейной фильтрации	5	22
<b>Мальцев Г. Н., Якимов В. Л.</b> Достоверность многоэтапного контроля технического состояния объектов испытаний	1	49
<b>Мартынова Л. А.</b> Метод эффективного удержания положения АНПА на маршрутной траектории при ведении сейсморазведки	3	34
<b>Мартынова Л. А.</b> Решение задачи подводного наблюдения в условиях применения интеллектуальных помех	1	31
<b>Матвеев Н. В., Тюрликов А. М.</b> Словотый АЛОНА с итерационной процедурой разрешения коллизий. Стабильность и нестабильность	3	89
<b>Моторин Д. Е., Попов С. Г.</b> Алгоритм многокритериального поиска траекторий движения робота на многослойной карте	3	45
<b>Муромцев Д. Ю., Грибков А. Н., Тюрин И. В., Шамкин В. Н.</b> Проектирование базы знаний интеллектуальной информационно-управляющей системы для многомерных технологических объектов	4	24
<b>Ненашев В. А., Сергеев А. М., Капранова Е. А.</b> Исследование и анализ автокорреляционных функций кодовых последовательностей, сформированных на основе моноциклических квазиортогональных матриц	4	9
<b>Пономарев А. В.</b> Модель и метод оценки качества вклада участника системы совместной разметки изображений	4	45
<b>Путин Е. О., Шалыто А. А.</b> Нейронная сеть с конкурентным порогом для генерации малых органических молекулярных структур	4	52
<b>Руннова А. Е., Максименко В. А., Пчелинцева С. В., Куланин Р. А., Храмов А. Е.</b> Метод вейвлет-анализа паттернов двигательной активности на экспериментальных данных многоканальной электроэнцефалографии человека для управления внешними устройствами	1	106
<b>Садовников С. А.</b> Программно-алгоритмическая система для численного моделирования широкополосного лазерного газоанализа атмосферы	6	66
<b>Скобелев П. О., Лахин О. И., Майоров И. В., Симонова Е. В.</b> Адаптивное мультиагентное планирование производственных ресурсов на основе онтологии	6	105
<b>Скороходов Я. А., Андреев А. М.</b> Моделирование функционирования космического сегмента системы автоматической идентификации морских судов	2	36
<b>Суворова А. В., Тулупьев А. Л.</b> Синтез структур байесовской сети доверия для оценки характеристик рискованного поведения	1	116
<b>Татарникова Т. М., Вольский А. В.</b> Оценка вероятностно-временных характеристик сетевых узлов с дифференциацией трафика	3	54
<b>Татарникова Т. М., Дзюбенко И. Н.</b> Система детектирования опасных веществ по запаху, построенная на технологии Интернета вещей	2	84
<b>Татарникова Т. М.</b> Статистические методы исследования сетевого трафика	5	35

	№	Стр.
<b>Таубин Ф. А.</b> Решетчатые сигнально-кодовые конструкции для каналов с линейными искажениями	5	66
<b>Федорченко А. В., Котенко И. В.</b> Корреляция информации в SIEM-системах на основе графа связей типов событий	1	58
<b>Хлобыстова А. О., Абрамов М. В., Тулупьев А. Л., Золотин А. А.</b> Поиск кратчайшей траектории социоинженерной атаки между парой пользователей в графе с вероятностями переходов	6	74
<b>Хорев В. С., Ишбулатов Ю. М., Лапшева Е. Е., Киселев А. Р., Гриднев В. И., Безручко Б. П., Бутенко А. А., Пономаренко В. И., Караваев А. С.</b> Диагностика направленной связи контуров регуляции кровообращения по временным рядам математической модели сердечно-сосудистой системы человека	1	42
<b>Штанько С. В.</b> Ограничение несанкционированного доступа в радиотехнических системах с широковещательной передачей информации	5	57
<b>Шумская О. О., Железны М.</b> Адаптивный алгоритм встраивания информации в сжатые JPEG-изображения на основе операции замены	5	44
<b>Щекотов М. С.</b> Метод навигации и коллаборативного полуавтоматического построения карт сигналов Wi-Fi внутри помещений	6	95
<b>Щербань И. В., Кириленко Н. Е., Щербань О. Г.</b> Эффективные критериальные функции спектральной энтропии для поиска высокочастотных паттернов в составе зашумленных электрограмм	2	8
<b>Юркин Д. В., Уткина А. А., Первушин А. О.</b> Формализованный анализ протоколов аутентификации	2	76
Сведения об авторах	1	128
Сведения об авторах	2	115
Сведения об авторах	3	107
Сведения об авторах	4	123
Сведения об авторах	5	120
Сведения об авторах	6	118