

УДК 519.21:537.86

doi:10.31799/1684-8853-2019-2-10-18

Вероятностный анализ двумерных векторных случайных процессов на фазовой плоскости

В. И. Хименко^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-3005-052X, vih.13@yandex.ru
^аОАО «НИО ЦИТ «Петрокомета», Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

Введение: для моделей векторных случайных процессов характерно многообразие практических применений и, одновременно с этим, сложность исследований детальной вероятностной структуры. Такие особенности достаточно часто приводят к рассмотрению лишь отдельных компонент векторных функций и вынужденному переходу к анализу скалярных процессов. Все это существенно снижает общую информативность исследований и повышает актуальность поиска перспективных подходов к вероятностному анализу векторных процессов. **Цель:** представление векторных случайных процессов в фазовом пространстве состояний и использование методов общей теории выбросов случайных функций в исследовании вероятностной структуры фазовых траекторий. **Результаты:** выделены характерные особенности отображения случайных процессов на фазовой плоскости, введены числовые характеристики для описания и анализа вероятностного поведения выборочных функций. Выполнен вероятностный анализ характеристик типа «пересечений уровней» для векторных процессов при различном определении областей допустимых значений. На примере анализа типовых моделей двумерных гауссовых процессов и моделей класса «сигнал плюс шум» показаны аналитические зависимости вероятностной структуры фазовых траекторий от заданных пороговых уровней, основных параметров распределений и спектрально-корреляционных свойств исследуемых процессов. **Практическая значимость:** повышена информативность исследований и наглядность отображения информации при анализе вероятностного поведения векторных случайных процессов. Объединены общие методы фазового пространства векторных процессов, методы фазовой плоскости при анализе скалярных процессов и общие методы теории выбросов случайных функций. Классические подходы визуального описания фазовых траекторий дополнены методами количественного анализа детальной вероятностной структуры случайных функций.

Ключевые слова – случайные процессы, фазовое пространство, фазовые траектории, вероятностный анализ, выбросы случайных функций, характеристики пересечений уровней, обработка информации.

Для цитирования: Хименко В. И. Вероятностный анализ двумерных векторных случайных процессов на фазовой плоскости. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 2, с. 10–18. doi:10.31799/1684-8853-2019-2-10-18

For citation: Khimenko V. I. Probabilistic analysis of two-dimensional vector random processes on the phase plane. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 2, pp. 10–18 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-2-10-18

Введение

Многие задачи приема, обработки и анализа информации, задачи теории управления и теории надежности, вопросы исследования устойчивости сложных динамических систем и задачи теории рискованных ситуаций по своему содержанию приводят к необходимости рассмотрения вероятностной структуры векторных случайных процессов [1–4]. Возникают подобные задачи и при пространственно-временной обработке сигналов в радиофизических приложениях, при исследованиях вибраций и колебательных процессов в технике, при изучении электромагнитных полей в акустике, биофизике и геофизике [5–8].

Как правило, математическое описание и исследование векторных процессов заметно сложнее вероятностного анализа скалярных случайных функций. Эта особенность достаточно часто приводит к тому, что исследования векторных процессов выполняются лишь на уровне вероятностного анализа отдельных компонент, т. е. решаемые задачи сводятся к рассмотрению скалярных случайных процессов.

Такой подход упрощает вероятностный анализ, однако при этом заметно снижает информа-

тивность, ограничивает общность исследований и, соответственно, сокращает потенциальные возможности практического использования моделей векторных процессов.

Целью данной работы является рассмотрение особенностей представления двумерных случайных процессов на фазовой плоскости, введение числовых характеристик для вероятностного описания фазовых траекторий и общий анализ вероятностной структуры векторных процессов в фазовом пространстве состояний.

Фазовое пространство случайного векторного процесса

Обычно состояние сложных динамических систем характеризуется несколькими параметрами. Эти параметры могут изменяться случайным образом. Мгновенное состояние исследуемой системы можно при этом рассматривать как точку некоторого фазового пространства (пространства состояний). Изменения во времени состояния системы описываются при таком подходе функцией $\zeta(t)$ времени t , значения которой меняются в пространстве состояний. Функция $\zeta(t)$ представляет

собой случайный процесс, и если пространство состояний является многомерным, то процесс $\xi(t)$ относится к классу векторных случайных процессов.

Рассмотрим одну из наиболее простых и наиболее распространенных ситуаций, когда процесс $\xi(t)$ является двумерным векторным процессом: $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$. Компоненты этого процесса $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ будем считать непрерывными случайными функциями, значения которых изменяются на вещественной оси $\xi_i(t) \in (-\infty, \infty)$, $i = 1, 2$. Пространство состояний для такого процесса $\xi(t)$ является двумерным, и, следовательно, рассмотрение вероятностной структуры векторного процесса $\xi(t)$ может быть выполнено на основе его исследования на фазовой плоскости $(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$.

Если при анализе случайного процесса $\xi(t)$ компоненты $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ интерпретировать как координаты точки на плоскости (ξ_1, ξ_2) , то векторный процесс $\xi(t)$ геометрически можно представить в виде семейства траекторий $\{\xi_1(t), \xi_2(t), t \in T\}$. Плоскость (ξ_1, ξ_2) является в данном случае фазовым пространством (фазовой плоскостью) двумерного векторного процесса $\xi(t)$. Изменения значений $\xi(t)$ во времени $t \in T$ описываются движением фазовой (или изображающей) точки $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ по некоторой кривой — фазовой траектории $L(\xi_1, \xi_2; t)$ на плоскости (ξ_1, ξ_2) .

При анализе векторных процессов $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ фазовая плоскость (ξ_1, ξ_2) отображает информацию о совместных изменениях мгновенных значений двух случайных функций $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Эти функции, в зависимости от решаемых задач, могут иметь различные вероятностные характеристики, могут быть независимыми или функционально связанными. Как частный случай, пространство состояний $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ векторных процессов $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ при $\xi_1(t) = \xi(t)$ и $\xi_2(t) = \xi'(t) = d\xi(t)/dt$ может включать в себя и рассмотрение фазовых траекторий $(\xi_1(t), \xi_2(t)) = (\xi(t), \xi'(t))$ скалярных случайных процессов $\xi(t)$ на фазовой плоскости классического вида $(\xi_1, \xi_2) = (\xi, \xi')$.

Характеристики вероятностной структуры процессов

Исследования векторных процессов во многих прикладных задачах связаны с необходимостью детального анализа вероятностных характеристик отдельных траекторий $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ на фазовой плоскости (ξ_1, ξ_2) . При этом обычно задается некоторая область допустимых значений Ω и рассматриваются вероятностные характеристики выходов траектории $\xi(t)$ за границы заданной области Ω . Примерами таких задач могут являться задачи исследования надежности, эффективности и безопасности работы сложных систем, задачи оценки

рисковых ситуаций, задачи технической и медицинской диагностики, задачи исследования экстремальных состояний и предельно допустимых режимов работы систем [2–4, 9–12]. Моменты выходов в подобных задачах обычно отождествляются с моментами отказов системы, потерей устойчивости, наступлением рискованных ситуаций или переходом системы в режимы критических состояний.

Рассмотрим особенности описания и основные характеристики траекторий двумерного векторного случайного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ при его представлении на плоскости (ξ_1, ξ_2) (рис. 1). В диапазоне возможных изменений компонент $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ зададим некоторую область допустимых значений Ω , границы которой определяются из условий

$$\Omega: \xi_1(t) \in [-H_1, H_1], \xi_2(t) \in [-H_2, H_2]. \quad (1)$$

Выходы траектории $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ из области Ω через границы $[-H_1, H_1]$ (см. рис. 1) могут происходить только за счет выходов компоненты $\xi_1(t)$ за уровни $\pm H_1$ при условии, что вторая компонента $\xi_2(t)$ находится в интервале $[-H_2, H_2]$. Аналогично выходы траектории $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ из области Ω через границы $[-H_2, H_2]$ являются следствием выходов компоненты $\xi_2(t)$ за уровни $\pm H_2$ при условии $\xi_1(t) \in [-H_1, H_1]$. Учитывая эти особенности, для среднего числа выходов $N_\xi(\Omega, T)$ двумерного процесса $\xi(t)$ из заданной области (1) на интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$ можно записать общую формулу [13, 14]

$$\begin{aligned} N_\xi(\Omega, T) = & \left[N_1^+(H_1, T) + N_1^-(-H_1, T) \right] \times \\ & \times P\{\xi_2(t) \in [-H_2, H_2]\} + \\ & + \left[N_2^+(H_2, T) + N_2^-(-H_2, T) \right] \times \\ & \times P\{\xi_1(t) \in [-H_1, H_1]\}, \quad (2) \end{aligned}$$

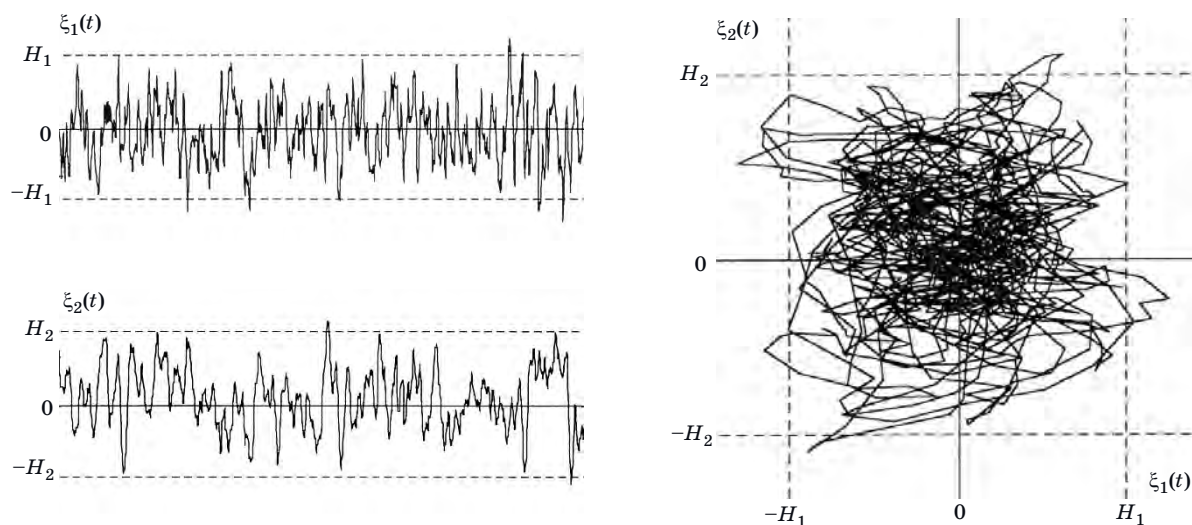
где $N_i^\pm(\pm H_i, T)$ — среднее число положительных или отрицательных выбросов одномерного процесса $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$ на интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$ за соответствующий пороговый уровень $\pm H_i$.

Пребывание траектории $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ процесса $\xi(t)$ в области Ω эквивалентно совместному выполнению условий

$$\xi_1(t) \in [-H_1, H_1] \text{ и } \xi_2(t) \in [-H_2, H_2].$$

Следовательно, для среднего значения $T_\xi(\Omega)$ относительной длительности и вероятности пребывания процесса $\xi(t)$ в заданной области Ω будет справедливо равенство

$$\begin{aligned} T_\xi(\Omega) = & P\{\xi(t) \in \Omega\} = \\ = & P\{\xi_1(t) \in [-H_1, H_1], \xi_2(t) \in [-H_2, H_2]\}. \quad (3) \end{aligned}$$



■ **Рис. 1.** Представление отдельной реализации двумерного векторного процесса на фазовой плоскости
 ■ **Fig. 1.** Representation of a sample function of a two-dimensional vector process on the phase plane

В свою очередь, если известны значения $T_{\xi}(\Omega)$ и $N_{\xi}(\Omega, T)$, то может быть найдена и средняя длительность выброса двумерного процесса $\xi(t)$ из области Ω :

$$\bar{\tau}_{\xi}(\Omega) = \frac{1 - P\{\xi(t) \in \Omega\}}{(1/T)N_{\xi}(\Omega, T)} = \frac{1 - T_{\xi}(\Omega)}{(1/T)N_{\xi}(\Omega, T)}. \quad (4)$$

Поскольку компоненты $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ в общем случае могут быть взаимно зависимыми, то для вычисления характеристик (2)–(4) необходимо знать совместную плотность вероятностей $p(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2)$ для значений компонент $\xi_1(t), \xi_2(t)$ и значений их первых производных $\xi'_1(t)$ и $\xi'_2(t)$ в один и тот же момент времени.

Если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ обладают свойством стационарности и взаимной независимости, то для входящих в формулы (2)–(4) вероятностей можно записать

$$P\{\xi_i(t) \in [-H_i, H_i]\} = \int_{-H_i}^{H_i} p(\xi_i; t) d\xi_i, \quad i = 1, 2;$$

$$P\{\xi_1(t) \in [-H_1, H_1], \xi_2(t) \in [-H_2, H_2]\} =$$

$$= \int_{-H_1}^{H_1} p(\xi_1; t) d\xi_1 \int_{-H_2}^{H_2} p(\xi_2; t) d\xi_2. \quad (5)$$

Для определения среднего числа выбросов, согласно результатам [13–15], при стационарности компонент будут справедливы общие выражения

$$N_i^+(H_i, T) = T \int_0^{\infty} \xi'_i p(H_i, \xi'_i; t) d\xi'_i;$$

$$N_i^-(-H_i, T) = -T \int_{-\infty}^0 \xi'_i p(-H_i, \xi'_i; t) d\xi'_i, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

В приведенных формулах (5) и (6) значения $p(\xi_i; t)$ соответствуют одномерной плотности вероятностей процесса $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$, а функции $p(\pm H_i, \xi'_i; t)$ — совместным плотностям вероятностей $p(\xi_i, \xi'_i; t)$ для значений рассматриваемой компоненты $\xi_i(t)$ и значений ее производной $\xi'_i(t)$ в один и тот же момент времени при условии $\xi_i(t) = \pm H_i$, $i = 1, 2$.

Результаты (1)–(6) показывают возможность общего исследования вероятностной структуры двумерных векторных случайных процессов $\{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ на фазовой плоскости (ξ_1, ξ_2) . Они позволяют определять вероятностные характеристики, связанные с выходами траекторий отдельных компонент $\xi_1(t), \xi_2(t)$ и в целом рассматриваемых процессов $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ за границы заданной области Ω .

Анализ вероятностной модели «сигнал плюс шум»

Рассмотрим теперь возможности анализа векторного случайного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ при несколько иной постановке исходных задач. Выделим при этом особенности исследования одной из наиболее распространенных на практике модели — вероятностной модели аддитивной смеси гармонического колебания и флюктуационного гауссова шума.

Будем считать, что компоненты $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ векторного процесса $\xi(t)$ представляют собой ортогональные гармонические функции вида $A_0 \cos \omega_0 t$

и $A_0 \sin \omega_0 t$, изменяющиеся с некоторой частотой ω_0 и имеющие постоянную амплитуду A_0 . Будем, кроме того, считать, что на эти гармонические функции накладывается аддитивный флюктуационный гауссов шум $n(t)$ с математическим ожиданием $m_n = M\{n(t)\} = 0$ и некоторой дисперсией $\sigma_n^2 = M\{[n(t) - m_n]^2\} = M\{n^2(t)\}$.

Из общей теории колебаний хорошо известно, что при переходе к фазовой плоскости (x, y) гармонические компоненты $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ будут формировать в фазовом пространстве состояний (ξ_1, ξ_2) окружность с единичным радиусом. Воздействия на гармонические составляющие помеховой компоненты $n(t)$ приводят к искажениям формы фазовых траекторий $\{\xi_1(t), \xi_2(t), t \in T\}$. Степень таких искажений зависит от величины дисперсии шума или, при иной трактовке, от отношения сигнал/шум.

Характерный вид отдельных составляющих $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ векторного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ и отображение траекторий $(\xi_1(t), \xi_2(t)), t \in T$ такого процесса $\xi(t)$ на фазовой плоскости (ξ_1, ξ_2) показаны на рис. 2 и 3. Для наглядности сравнения представленные результаты получены при одинаковых отношениях сигнал/шум, и основными отличиями является здесь спектральный состав

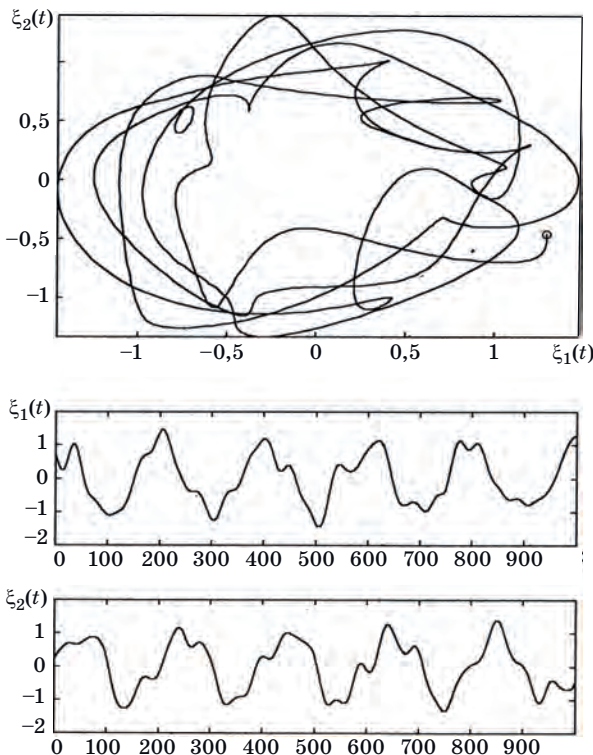
помеховых воздействий $n(t)$. Флюктуации $n(t)$ на рис. 2 относятся к классу «медленных» и узкополосных. На рис. 3 показан характер воздействий «быстрых» флюктуационных помех $n(t)$ с более широкой спектральной плотностью.

Необходимость исследования детальной вероятностной структуры подобного класса процессов $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ возникает во многих областях физики и техники. Характерными примерами могут здесь являться задачи приема и обработки радиолокационных, гидроакустических и сейсмических сигналов [6, 8, 16]. Такие задачи характерны для исследований работы автогенераторов при учете собственных флюктуационных шумов [6, 17], для анализа каналов передачи информации [1, 18], вероятностного анализа систем наведения и целеуказания [19–21], анализа поляризационных эффектов и рассмотрения эллиптической поляризации электромагнитных излучений [14, 22].

При рассмотрении особенностей векторного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ на фазовой плоскости (ξ_1, ξ_2) зададим область допустимых значений Ω уравнением

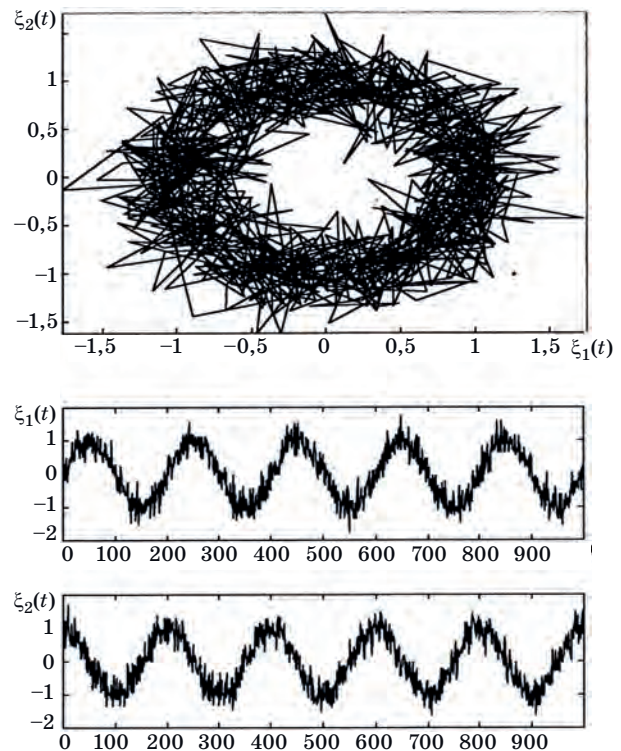
$$\Omega: (\xi_1^2/\sigma_1^2) + (\xi_2^2/\sigma_2^2) = H^2, H > 0. \quad (7)$$

В отличие от условий (1) такое определение показывает, что границы заданной области Ω



■ **Рис. 2.** Фазовые траектории и отдельные компоненты двумерного векторного процесса при воздействии «медленных» флюктуаций

■ **Fig. 2.** Phase trajectories and individual components of a two-dimensional vector process under the influence of “slow” fluctuations



■ **Рис. 3.** Влияние «быстрых» широкополосных флюктуаций на структуру векторного процесса

■ **Fig. 3.** Effect of “fast” broadband fluctuations on the structure vector process

в общем случае имеют форму эллипса или, при одинаковых слагаемых в уравнении (7), форму окружности.

В подобных задачах для вероятностного анализа фазовых траекторий $(\xi_1(t), \xi_2(t)) = L(\xi_1, \xi_2; t)$ удобно дополнительно ввести определение случайного процесса

$$\eta(t) = \left[\frac{\xi_1^2(t)}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_2^2(t)}{\sigma_2^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \eta(t) \geq 0. \quad (8)$$

Из этого определения видно, что процесс $\eta(t)$ отражает поведение модуля двумерного вектора $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ с нормированными компонентами $\xi_1(t)/\sigma_1$ и $\xi_2(t)/\sigma_2$. При прохождении фазовой траектории $L(\xi_1, \xi_2; t)$ через границу заданной области (7) для функции $\eta(t)$ выполняется равенство $\eta(t) = H$, и, следовательно, выходы векторного процесса $\xi(t)$ из области допустимых значений Ω эквивалентны выходам случайного процесса $\eta(t)$ за заданный уровень H .

С учетом такой взаимосвязи можно определить общее выражение для вероятности нахождения исследуемого векторного процесса $\xi(t)$ в области допустимых значений Ω :

$$\begin{aligned} P\{\xi(t) \in \Omega\} &= P\{\eta(t) \leq H\} = \\ &= \int_0^H p_\eta(\eta) d\eta = F_\eta(H). \end{aligned} \quad (9)$$

Вероятность выхода случайного процесса $\xi(t)$ из области Ω совпадает при этом с вероятностью события $\eta(t) > H$ и определяется как

$$\begin{aligned} P\{\xi(t) \notin \Omega\} &= P\{\eta(t) \geq H\} = \\ &= \int_H^\infty p_\eta(\eta) d\eta = 1 - F_\eta(H). \end{aligned} \quad (10)$$

Записанные результаты (9) и (10) позволяют достаточно просто вычислять соответствующие вероятности $P\{\xi(t) \in \Omega\}$ и $P\{\xi(t) \notin \Omega\}$ при условии известной плотности вероятностей $p_\eta(\eta)$ или известной функции распределения $F_\eta(\eta)$ модуля $\eta(t)$ исследуемого процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$. При рассмотрении общего подхода к решению подобных задач нахождение функций $p_\eta(\eta)$ и $F_\eta(\eta)$ должно выполняться по совместной плотности вероятностей $p_\xi(\xi_1, \xi_2; t)$ исходного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ и введенного определения (8) для процесса $\eta(t)$.

Применительно к рассматриваемой модели векторного процесса $\xi(t)$, порожденного аддитивной смесью $s(t) + n(t)$ гармонического колебания $s(t)$ и независимого гауссова шума $n(t)$, известно, что случайный процесс $\eta(t)$ будет характеризоваться обобщенным распределением Рэлея или распределением Райса [5, 6, 23]. Плотность веро-

яностей $p_\eta(\eta)$ процесса $\eta(t)$ будет при этом иметь вид

$$\begin{aligned} p_\eta(\eta) &= \frac{\eta}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{\eta^2 + A_0^2}{2\sigma_n^2}\right) I_0\left(\frac{A_0\eta}{\sigma_n^2}\right), \\ \eta &= \eta(t) \geq 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, а величина A_0/σ_n характеризует отношение сигнал/шум.

Полезно здесь еще раз подчеркнуть, что записанное распределение (11) по своей сути характеризует вероятностное поведение длины двумерного случайного вектора $\eta(t)$, составляющие которого $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ ортогональны и представляют собой квадратурные компоненты (см. рис. 2 и 3) смеси $s(t) + n(t)$ гармонического колебания $s(t)$ и флюктуационного гауссова шума $n(t)$.

Если теперь для исследуемого векторного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ рассмотреть события, связанные с выходами фазовых траекторий $L(\xi_1, \xi_2; t)$ за границы (7) области допустимых значений Ω , то среднее число таких выходов $N_L(\Omega, T)$ на интервале $t \in [t_0, t_0 + T]$ длительностью T можно характеризовать средним числом положительных выбросов $N_\eta^+(H, T)$ процесса $\eta(t)$ за заданный уровень H .

По аналогии с выражениями (6) здесь можно воспользоваться общими результатами [13–15] и записать

$$N_L(\Omega, T) = N_\eta^+(H, T) = T \int_0^\infty \eta' p(H, \eta'; t) d\eta', \quad (12)$$

где $p(H, \eta'; t)$ — совместная плотность вероятностей $p(\eta, \eta'; t)$ для значений процесса $\eta(t)$ и значений его производной $\eta'(t)$ в совпадающие моменты времени t при условии $\eta(t) = H$.

Следовательно, нахождение среднего числа выходов $N_L(\Omega, T)$ связано здесь с предварительным определением совместной плотности вероятностей $p(\eta, \eta'; t)$. Для процессов $\eta(t)$ с распределением Райса (11) эта функция имеет вид [13]

$$\begin{aligned} p(\eta, \eta'; t) &= \frac{\eta}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{\eta^2 + A_0^2}{2\sigma_n^2}\right) I_0\left(\frac{A_0\eta}{\sigma_n^2}\right) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi D[\eta']}} \exp\left\{-\frac{(\eta')^2}{2D[\eta']}\right\} = p_\eta(\eta) p_{\eta'}(\eta'), \end{aligned} \quad (13)$$

где $p_\eta(\eta)$ — одномерная плотность вероятностей (11) случайного процесса $\eta(t)$, а $p_{\eta'}(\eta')$ — гауссова плотность вероятностей производной $\eta'(t)$. Записанное выражение (13) показывает, что рассматриваемый процесс $\eta(t)$ относится к классу случайных процессов со статистически независимой производной $\eta'(t)$ в совпадающие момен-

ты времени. Кроме того, важно подчеркнуть, что хотя сам процесс $\eta(t)$ характеризуется негауссовым распределением (11), его производная $\eta'(t)$ описывается гауссовой одномерной плотностью вероятностей с математическим ожиданием $m_{\eta'} = M\{\eta'(t)\} = 0$ и дисперсией $D[\eta'] = M\{[\eta'(t)]^2\}$.

Если теперь распределение (13) подставить в общую формулу (12) и выполнить простое интегрирование, то получим

$$N_L(\Omega, T) = N_{\eta}^+(H, T) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} D^{\frac{1}{2}}[\eta'] \left(\frac{H}{\sigma_n} \right) \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_n^2} - \frac{a^2}{2} \right) I_0\left(a \frac{H}{\sigma_n} \right),$$

$$a = A_0/\sigma_n, H \geq 0. \quad (14)$$

Этот результат является достаточно общим для модели «сигнал плюс шум» и позволяет при различных значениях параметра $a = A_0/\sigma_n$ находить среднее число выходов $N_L(\Omega, T)$ фазовой траектории $L(\xi_1, \xi_2; t)$ за границы (7) заданной области Ω . В целом результаты (7)–(14) данного раздела показывают возможности анализа вероятностной структуры векторного случайного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ при его представлении на фазовой плоскости (ξ_1, ξ_2) и задании области допустимых значений Ω в виде эллипса (7).

Структура двумерных гауссовых процессов

В целях конкретизации общих выводов и более детального анализа фазовых траекторий $L(\xi_1, \xi_2; t)$ рассмотрим теперь практически важный частный случай векторного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ с ортогональными гауссовыми компонентами $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Вероятностные модели подобных процессов $\xi(t)$ настолько важны для приложений, что заслуживают специального, отдельного рассмотрения и с точки зрения анализа фазовых траекторий.

Будем считать, что компоненты $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ векторного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ имеют одинаковые вероятностные характеристики и описываются гауссовым распределением с математическим ожиданием $m_{\xi_1} = m_{\xi_2} = M\{\xi_i(t)\} = 0$, дисперсией $\sigma^2 = M\{\xi_i^2(t)\}$ и некоторой корреляционной функцией общего вида

$$R_i(\tau) = M\{\xi_i(t)\xi_i(t + \tau)\} = R(\tau) = \sigma^2 r(\tau), i = 1, 2. \quad (15)$$

При этих условиях модуль $\eta(t)$ двумерного векторного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ будет характеризоваться распределением Рэлея [5, 23]

$$\eta(t) = [\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)]^{1/2};$$

$$p_{\eta}(\eta) = \eta \sigma^{-2} \exp(-\eta^2 / 2\sigma^2), \eta = \eta(t) \in [0, \infty). \quad (16)$$

Такой результат можно рассматривать как описание χ -процесса с двумя степенями свободы [13, 23] или как частный случай распределения (11), когда параметр $a = A_0/\sigma_n = 0$ и функция $I_0(x)$ принимает значение $I_0(x) = I_0(0) = 1$.

Если при анализе векторного процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ область допустимых значений Ω рассматривать в виде эллипса (7), то с учетом плотности вероятностей (16), на основе результатов (9) и (10) можно определить вероятность нахождения исследуемого процесса $\xi(t)$ в заданной области Ω

$$P\{\xi(t) \in \Omega\} = P\{\eta(t) \leq H\} = 1 - \exp(-H^2 / 2\sigma^2) \quad (17)$$

и вероятность выхода векторного процесса $\xi(t)$ за границы области допустимых значений Ω

$$P\{\xi(t) \notin \Omega\} = P\{\eta(t) > H\} = \exp(-H^2 / 2\sigma^2). \quad (18)$$

Такие результаты наглядно показывают, что вероятности (17) и (18) зависят в данном случае лишь от порогового уровня H и дисперсии $\sigma^2 = \sigma_{\xi_1}^2 = \sigma_{\xi_2}^2$ гауссовых компонент $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

При анализе особенностей детальной вероятностной структуры случайных процессов важную роль играет поведение производной и характер совместного распределения для значений исследуемого процесса и значений его производной в совпадающие моменты времени [13, 24]. Рассматривая процессы с распределением Рэлея (16), на основе выражения (13) можно определить совместную плотность вероятностей для значений $\eta(t)$ и $\eta'(t) = d\eta(t)/dt$:

$$p(\eta, \eta'; t) = \frac{\eta}{\sigma^2 \sqrt{2\pi(-R_0'')}} \exp\left\{ -\frac{\eta^2}{2\sigma^2} - \frac{(\eta')^2}{2(-R_0'')} \right\} = p_{\eta}(\eta) \frac{1}{\sqrt{2\pi(-R_0'')}} \exp\left\{ -\frac{(\eta')^2}{2(-R_0'')} \right\}, \eta = \eta(t) \geq 0. \quad (19)$$

В этом выражении функция $p_{\eta}(\eta)$ соответствует плотности вероятностей Рэлея (16), а значение $(-R_0'')$ характеризует дисперсию производной $\eta'(t)$ и определяется по корреляционной функции (15) как

$$-R_0'' = -d^2 R(\tau)/d\tau^2|_{\tau=0} = -\sigma^2 r_0''. \quad (20)$$

Случайная функция $\eta(t)$ относится к классу процессов, порожденных исходным векторным процессом $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ с гауссовыми компонентами $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. На рис. 4 для процесса $\eta(t)$ показан характер фазовой траектории $L(\eta, \eta'; t)$ в пространстве состояний вида (η, η') . По своей

сути подобные траектории $L(\eta, \eta'; t)$ отражают поведение выборочной функции двумерного векторного процесса $\{\eta(t), \eta'(t)\}$ на фазовой плоскости классического вида (η, η') .

Поведение фазовых траекторий (см. рис. 4) хорошо согласуется с характером распределения (19). Здесь наглядно видно, что ориентация выборочных функций $L(\eta, \eta'; t)$ относительно координатных осей на плоскости (η, η') отражает свойство некоррелированности значений $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ в совпадающие моменты времени t и свойство нулевого математического ожидания $M\{\eta'(t)\} = 0$. Эти свойства характерны для всего класса стационарных процессов [14, 24]. В дополнение к этому совместное распределение (19) показывает, что значения $\eta(t)$ и $\eta'(t)$ для вероятностной модели (16) не только некоррелированные, но и взаимно независимы.

Нужно отметить, что поведение фазовых траекторий $L(\eta, \eta'; t)$ на рис. 4 наглядно отражает особенности одномерных распределений отдельных компонент векторного процесса $\{\eta(t), \eta'(t)\}$. Так, в частности, общие изменения значений $\eta(t)$ по горизонтальной оси хорошо согласуются с особенностями функции $p_\eta(\eta)$ плотности вероятностей Рэлея (16). Изменения значений второй компоненты $\eta'(t)$ по вертикальной оси фазовой плоскости (η, η') отражают характер гауссовой составляющей $\eta'(t)$ векторного процесса $\{\eta(t), \eta'(t)\}$.

Рассмотрим теперь вероятностные характеристики, связанные с выходами исследуемого двумерного гауссова процесса $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ за границы (7) области допустимых значений Ω . Для нахождения среднего числа выходов траектории $L(\xi_1, \xi_2; t)$ из области Ω на интервале времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ здесь можно воспользоваться общими формулами (12) и (19) или из выражения

(14), как частный случай, при условии $a = 0$ получить простой результат

$$N_L(\Omega, T) = N_\eta^+(H, T) = T \left(\frac{-r_0''}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{H}{\sigma} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma^2} \right), \quad H \geq 0. \quad (21)$$

Если в дополнение к этому учесть значение вероятности выхода (18), то можно получить простое выражение для средней длительности $\tau^+(\Omega)$ выходов векторного процесса $\xi(t)$ за границы заданной области Ω

$$\tau^+(\Omega) = \tau_\eta^+(H) = \frac{P\{\xi(t) \notin \Omega\}}{N_L(\Omega, 1)} = \left(\frac{2\pi}{-r_0''} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma}{H} \right). \quad (22)$$

Параметр $(-r_0'')$, входящий в формулы (20)–(22), определяется по нормированной корреляционной функции $r(\tau)$ и непосредственно связан со спектрально-корреляционными свойствами гауссовых компонент $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Во многих практических задачах этот параметр удобно представить в виде [13, 14]

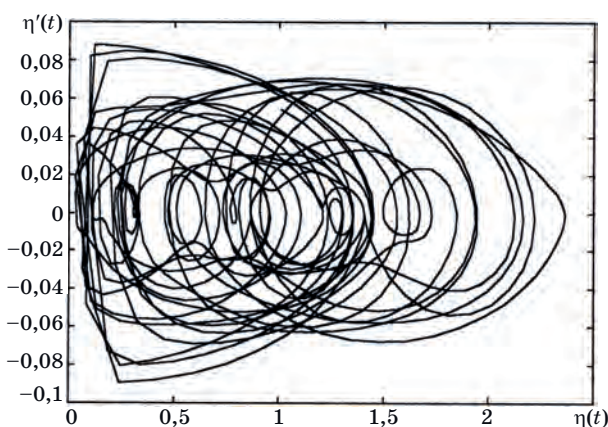
$$-r_0'' = -d^2 r(\tau) / d\tau^2 |_{\tau=0} = \kappa^2 \Delta\omega_s^2, \quad (23)$$

где κ — коэффициент формы спектральной плотности гауссовых компонент исследуемого векторного процесса $\xi(t)$; $\Delta\omega_s$ — эффективная ширина спектра. Такое соотношение позволяет оценивать влияние спектральных и корреляционных характеристик на поведение выборочных функций $L(\xi_1, \xi_2; t)$ в фазовом пространстве (ξ_1, ξ_2) .

В зависимости от содержания решаемых задач и требуемой детальности исследований на основе представленных результатов (15)–(23) могут рассматриваться вероятности или относительные длительности нахождения случайных процессов в заданной области, вероятности выходов фазовых траекторий за границы области допустимых значений, среднее число таких выходов и средние длительности выходов.

Заключение

Основной отличительной особенностью данной работы является рассмотрение и анализ детальной вероятностной структуры двумерных векторных случайных процессов на основе фазовых отображений — представлений случайных процессов в фазовом пространстве состояний. По существу, здесь объединяются общие методы фазового пространства векторных процессов, методы фазовой плоскости при анализе скалярных процессов и общие методы теории выбросов случайных функций. Такое объединение позволяет



■ **Рис. 4.** Характер фазовых траекторий случайного процесса с распределением Рэлея

■ **Fig. 4.** Character of phase trajectories of random process with distribution Rayleigh's

получать наглядное представление информации о вероятностной структуре двумерных процессов, накапливать данные на фазовой плоскости при увеличении длительности выборочных функций и наглядно отображать вероятностные зависимости при исследованиях векторных процессов «в целом» на рассматриваемом интервале наблюдений.

Представленные в работе результаты не только показывают особенности визуального, качественного рассмотрения, но и дают основу для количественного описания и анализа вероят-

ностных свойств векторных случайных процессов при их представлении на фазовой плоскости. Рассмотренные здесь вероятностные модели и результаты их анализа являются достаточно общими и могут быть полезны при решении многих, различных по своему содержанию, прикладных задач. Типовыми примерами являются при этом задачи теории надежности и теории рисков, задачи вероятностного анализа систем пространственно-временного сканирования, систем целеуказания, наведения, автоматического сопровождения и управления.

Литература

1. **Boccuzzi J.** *Signal processing for wireless communications*. N. Y., McGraw-Hill, 2008. 672 p.
2. **Simiu E.** *Chaotic transitions in deterministic and stochastic dynamical systems*. Princeton and Oxford, Princeton University Press, 2002. 208 p.
3. **Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.** *Математические методы в теории надежности*. М., URSS, 2017. 584 с.
4. *Proceedings of the International Scientific School Modelling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems (MASR-2016)*. Saint-Petersburg, 2016. 212 p.
5. **Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.** *Статистическая радиофизика и оптика*. М., Физматлит, 2010. 428 с.
6. **Шахтарин Б. И.** *Случайные процессы в радиотехнике. Нелинейные преобразования*. М., Горячая линия-Телеком, 2018. 376 с.
7. **Moore F.** *Chaotic vibrations*. N. Y., Wiley, 1992. 312 p.
8. **Гордиенко В. А.** *Векторно-фазовые методы в акустике*. М., Физматлит, 2007. 480 с.
9. **Махутов Н. А., Гаденин М. М.** Научные исследования и подготовка специалистов по обеспечению защищенности критически важных объектов. *Машиностроение и инженерное образование*, 2004, № 1, с. 19–32.
10. **Абрамов О. В.** Анализ и прогнозирование техногенных рисков. *Надежность и техническая диагностика*, 2012, № 3, с. 97–105.
11. *Методы и приборы космической кардиологии на борту Международной космической станции* / под ред. Р. М. Баевского, О. И. Орлова. М., Техносфера, 2016. 368 с.
12. **Светлицкий В. А.** *Статистическая механика и теория надежности*. М., Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 504 с.
13. **Тихонов В. И., Хищенко В. И.** *Выбросы траекторий случайных процессов*. М., Наука, 1987. 304 с.
14. **Хищенко В. И.** *Случайные данные: структура и анализ*. М., Техносфера, 2017. 424 с.
15. **Tikhonov V. I., Khimenko V. I.** Level-crossing problems for stochastic processes in physics and radio engineering: An overview. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 1998, vol. 43, no. 5, pp. 501–523.
16. **Skolnik M. I.** *Radar handbook*. N. Y., McGraw-Hill, 2008. 680 p.
17. **Малахов А. Н.** *Флуктуации в автоколебательных системах*. М., Наука, 1967. 660 с.
18. **Яковлев О. И.** *Распространение радиоволн*. М., URSS, 2017. 496 с.
19. **Лысенко Л. Н.** *Наведение и навигация баллистических ракет*. М., Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2007. 672 с.
20. **Kolobov M. I.** *Quantum imaging*. N. Y., Springer, 2007. 328 p.
21. **Афонин А. А., Никитин В. Н.** *Автоматические системы наведения лазерных пучков*. М., Физматлит, 2016. 279 с.
22. **Saleh B., Teich M.** *Fundamentals of photonics*. N. Y., Wiley, 2007. 760 p.
23. **Тихонов В. И.** *Статистическая радиотехника*. М., Радио и связь, 1982. 624 с.
24. **Хищенко В. И.** Вероятностная структура фазовых траекторий случайных процессов. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 3, с. 85–94. doi:10.15217/issn 1684-8853.2016.3.85

UDC 519.21:537.86

doi:10.31799/1684-8853-2019-2-10-18

Probabilistic analysis of two-dimensional vector random processes on the phase plane

V. I. Khimenko^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0003-3005-052X, vih.13@yandex.ru

^aJSC «The Scientific Research and Experimental Centre of Intelligent Technologies «Petrokometa», 67, B. Morskaja St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The models of vector random processes are characterized by a variety of practical applications and, at the same time, by the complexity of studying the detailed probabilistic structure. Such features often lead to considering only separate components of vector functions, forcing the shift to scalar process analysis. All this significantly reduces the overall information content of the research, increasing the relevance of the search for promising approaches to probabilistic analysis of vector processes. **Purpose:** To present vector random processes in a phase space of states, and to apply the general theory of level crossings of random functions to the study of probabilistic structure of phase trajectories. **Results:** We have identified the characteristic features of displaying random processes on a phase plane, and introduced numerical characteristics for the description and analysis of probabilistic behavior of sample functions. A probabilistic analysis has been performed for the characteristics of the «level crossing» type for vector processes with various definitions of the areas of acceptable values. We used the typical models of two-dimensional Gaussian processes and «signal plus noise» models to demonstrate how the probabilistic structure of the phase trajectories depends on the given threshold levels, major distribution parameters and spectral-correlation properties of the studied processes. **Practical relevance:** The article contributes to the research information content and its visualization in the analysis of probabilistic behavior of vector random processes. It combines general methods of phase space of vector processes, methods of phase plane in the analysis of scalar processes and the theory of level crossings of random functions. The classical approaches to the visual description of phase trajectories are supplemented by the methods of quantitative analysis of detailed probabilistic structure of random functions.

Keywords — stochastic processes, phase space, phase trajectory, probabilistic analysis, random functions, characteristics of intersections of levels of processing information.

For citation: Khimenko V. I. Probabilistic analysis of two-dimensional vector random processes on the phase plane. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 2, pp. 10–18 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-2-10-18

References

1. Bocuzzi J. *Signal processing for wireless communications*. New York, McGraw-Hill, 2008. 672 p.
2. Simiu E. *Chaotic transitions in deterministic and stochastic dynamical systems*. Princeton and Oxford, Princeton University Press, 2002. 208 p.
3. Gnedenko B. V., Belyaev Y. K., Soloviev A. D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical methods in the theory of reliability]. Moscow, URSS Publ., 2017. 584 p. (In Russian).
4. *Proceedings of the International Scientific School Modeling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems (MA SR-2016)*. Saint-Petersburg, 2016. 212 p.
5. Akhmanov S. A., Dyakov Yu. E., Charkin A. S. *Statisticheskaja radiofizika i optika* [Statistical radiophysics and optics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 428 p. (In Russian).
6. Shakhhtarin B. I. *Slychaynyye processy v radiotekhnike. Nelineynye preobrazovaniy* [Random processes in radio engineering. Nonlinear transformation]. Moscow, Goriachaia liniia-Telekom Publ., 2018. 376 p. (In Russian).
7. Moon F. *Chaotic vibrations*. New York, Wiley, 1992. 312 p.
8. Gordienko V. A. *Vektorno-fazovye metody v akustike* [Vector-phase methods in acoustics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 480 p. (In Russian).
9. Makhutov N. A., Gadenin M. M. Research and training of specialists to ensure the security of critical facilities. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2004, no. 1, pp. 19–32 (In Russian).
10. Abramov O. V. Analysis and forecasting of technogenic risks. *Nadezhnost' i tekhnicheskaya diagnostika* [Reliability and Technical Diagnostics], 2012, no. 3, pp. 97–105 (In Russian).
11. *Metody i pribory kosmicheskoy kardiologii na bortu Mezhunarodnoj kosmicheskoy stantsii* [Methods and devices in space cardiology on board the International space station]/ editors R. M. Baevsky, O. I. Orlov. Moscow, Technosfera Publ., 2016. 368 p. (In Russian).
12. Svetlitskiy V. A. *Statisticheskaja mekhanika i teoriia nadezhnosti* [Statistical mechanics and the theory of reliability]. Moscow, Moskovskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet im. N. E.H. Baumana Publ., 2004. 504 p. (In Russian).
13. Tikhonov V. I., Khimenko V. I. *Vybrosy traektorii sluchainykh protsessov* [Trajectories emissions of stochastic processes]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 304 p. (In Russian).
14. Khimenko V. I. *Sluchainye dannye: struktura i analis* [Random data: structure and analysis]. Moscow, Technosfera Publ., 2017. 424 p. (In Russian).
15. Tikhonov V. I., Khimenko V. I. Level-crossing problems for stochastic processes in physics and radio engineering: An overview. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 1998, vol. 43, no. 5, pp. 501–523.
16. Skolnik M. I. *Radar handbook*. New York, McGraw-Hill, 2008. 680 p.
17. Malakhov A. N. *Flyktyatsii v avtokolebatelnykh sistemakh* [Fluctuations in self-oscillatory systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 660 p. (In Russian).
18. Yakovlev O. I. *Rasprostraneniye radiovoln* [Propagation of radio waves]. Moscow, URSS Publ., 2017. 496 p. (In Russian).
19. Lysenko L. N. *Navedeniye i navigatsiia ballisticheskikh raket* [Guidance and navigation of ballistic missiles]. Moscow, Moskovskij gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet im. N. E.H. Baumana Publ., 2007. 672 p. (In Russian).
20. Kolobov M. I. *Quantum imaging*. New York, Springer, 2007. 328 p.
21. Afonin A. A., Nikitin V. N. *Avtomaticheskije sistemy navedeniia lasernykh puchkov* [Automatic laser beam guidance systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2016. 279 p. (In Russian).
22. Saleh B., Teich M. *Fundamentals of photonics*. New York, Wiley, 2007. 760 p.
23. Tikhonov V. I. *Statisticheskaja radiotekhnika* [Statistical radiotechnics]. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1982. 624 p. (In Russian).
24. Khimenko V. I. Probability structure of phase trajectories of random processes. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2016, no. 3, pp. 85–94 (In Russian). doi:10.15217/issn 1684-8853.2016.3.85