УДК 621.391; 004.89
doi:10.15217/issn1684-8853.2017.3.2

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ БАЗ ЗНАНИЙ В МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

С. Г. Фомичева[a], *канд. техн. наук, профессор*
[a]*Норильский государственный индустриальный институт, Норильск, РФ*

Постановка проблемы: *интенсивное использование беспроводных и мобильных сетей связи в распределенных информационно-телекоммуникационных системах и автоматизированных системах управления технологическими процессами промышленных корпораций приводит к формированию в архитектуре таких систем новых концептуальных сущностей, называемых агентами, которыми необходимо управлять в реальном масштабе времени. При оценке эффективности многоагентных систем на первый план выходит коммуникационная сложность взаимодействия агентов, напрямую зависящая от количества адаптируемых при коммуникации параметров. Для интеллектуальных агентов основными проблемами в данном случае являются, с одной стороны, требование к быстрой адаптации и самоадаптации параметров их баз знаний, а с другой — необходимость обеспечения целостности и защищенности как данных, так и знаний агентов.* ***Цель исследования:*** *разработка теоретических и алгоритмических механизмов мягкого квантования аддитивных продукционных баз знаний агентов, обеспечивающих снижение как вычислительной, так и коммуникационной сложности взаимодействия интеллектуальных агентов.* ***Результаты:*** *доказан ряд утверждений, которые позволяют выполнять изоморфные преобразования классических аддитивных нечетких моделей, функционирующих в поле вещественных чисел, в их аналоги, способные функционировать в конечных полях Галуа. Показан гомеоморфизм (топологический изоморфизм) рассматриваемых нечетких и нейронечетких моделей. На базе доказанных утверждений разработан алгоритм мягкого квантования нечетких импликаций. Сущность предложенного алгоритма мягкого квантования заключается в гибком управлении топологией нейронечетких иерархических моделей при сохранении заданной точности аппроксимации контролируемых агентом параметров. Новизна подхода состоит в том, что доказана принципиальная возможность адекватного квантования аддитивных продукционных баз знаний. Разработан механизм автоматического регулирования количества параметров оптимизации баз знаний, к которым относятся число термов лингвистических переменных, число параметров адаптации каждого лингвистического терма, количество уровней иерархии аддитивной нечеткой модели. Для этого в качестве ограничений приняты допущения о непрерывном покрытии пространства решений (континуум) термами лингвистических переменных нечетких импликаций. Показано, что для обеспечения континуума при квантовании достаточно регулировать характеристику поля Галуа.* ***Практическая значимость:*** *разработанный метод мягкого квантования нечетких импликаций, во-первых, позволит существенно (на порядки) снизить объем базы знаний, необходимой агентам для принятия адекватных решений, тем самым упростить вычислительную и коммуникационную сложность взаимодействия агентов; во-вторых, даст возможность регулировать уровень защиты данных и знаний агентов.*

Ключевые слова *— аддитивные нечеткие модели, мультиагентные телекоммуникационные системы, изоморфизм, гомеоморфизм, квантование, конечные поля Галуа, приведенные полиномы над конечными полями, коммуникационная сложность.*

Введение

Интенсивное развитие беспроводных и мобильных сетей связи, распределенных информационно-телекоммуникационных систем и, в частности, открытых мультиагентных систем приводит к формированию новых концептуальных сущностей, например таких, как агенты, которыми необходимо управлять в реальном масштабе времени [1]. Процесс коммуникаций между агентами осуществляется через «доски объявлений», «белые» и «желтые» страницы посредством сообщений. Структура сообщений при этом в основном рассматривается как набор квантованных данных, но не знаний. Понятие кванта знаний на сегодняшний день слабо формализовано. Для аддитивных нечетких моделей квантом знаний может выступать базисный набор элементарных нечетких импликаций, мощность которого и определяется на этапе квантования продукционной базы знаний.

При оценке эффективности многоагентных систем на первый план выходит коммуникационная сложность взаимодействия агентов, напрямую зависящая от количества адаптируемых при коммуникации параметров. Для интеллектуальных агентов основными проблемами в данном случае являются, с одной стороны, требование к быстрой адаптации и самоадаптации параметров их баз знаний, а с другой — необходимость обеспечения целостности и защищенности как данных, так и знаний агентов.

Целью работы является разработка теоретических и алгоритмических механизмов мягкого квантования аддитивных продукционных баз знаний агентов, обеспечивающих снижение коммуникационной сложности взаимодействия интеллектуальных агентов. В данной статье, во-первых, докажем возможность адекватного квантования продукционных баз знаний в принципе. Во-вторых, докажем, что аддитивные нечеткие модели могут быть со сколь угодно малой точностью аппроксимированы приведенными полиномами над конечными полями Галуа. Эти результаты необходимы для решения задачи оптимизации параметров баз знаний агентов. В-третьих, приведем алгоритм мягкого квантования продукционных баз знаний, позволяющий в практических задачах адекватно выполнять процессы коммуникаций между агентами в автоматическом режиме.

С точки зрения коммуникационной сложности оптимизируемыми параметрами при квантовании знаний, представленных в виде аддитивных нечетких моделей, могут выступать, например, количество значимых правил базы знаний, число термов лингвистических переменных, число параметров адаптации каждого лингвистического терма, количество уровней иерархии аддитивной нечеткой модели, точность обобщения. Выбранные параметры квантования знаний, очевидно, определяют объем транспортируемой мобильными агентами базы знаний, скорость ее адаптации и модификации, возможность применения конкретных механизмов защиты структуры базы знаний и ее содержимого.

Также следует отметить, что уровень защиты знаний должен быть выше уровня защиты данных, на основе которых эти знания сформированы. То есть возникает необходимость в построении *иерархических* систем защиты как знаний, так и данных. Конструктивные подходы к созданию иерархических систем защиты информации существуют [2, 3] и, как правило, реализуются алгебраическими механизмами в конечных полях Галуа. Следовательно, структура транспортируемой базы знаний и ее содержимое должны быть подготовлены для адекватного применения к ним иерархических механизмов защиты. В частности, база знаний после ее *квантования* может быть представлена в виде изоморфных концептуальных сущностей, например таких, как *полиномы* над конечными полями Галуа.

Приведенные в статье доказательства подтверждают существование конструктивных алгоритмов непротиворечивого обмена информацией между агентами, а также возможность адекватного пополнения баз данных и знаний агентов на пути их миграции.

Аппроксимация аддитивных нечетких моделей полиномиальными функциями над полем вещественных чисел

В целом ряде работ [4–7] доказаны теоремы об универсальной аппроксимации нечетких продукционных моделей полиномами над полями вещественных чисел. Доказательства этих теорем опираются на теоремы Вейерштрасса и Вейерштрасса — Стоуна в том смысле, что в основе этой универсальной аппроксимации лежит способность аддитивных нечетких моделей аппроксимировать любую полиномиальную функцию, которой, в свою очередь, можно аппроксимировать любую непрерывную функцию.

Приведем здесь без доказательства теоремы Вейерштрасса и Вейерштрасса — Стоуна [8].

Теорема 1.1 (Вейерштрасса). Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $p(x)$ с вещественными коэффициентами, что для любого $x \in [a, b]$ выполнено условие

$$\left|f(x) - p(x)\right| < \varepsilon.$$

Теорема 1.2 (Вейерштрасса — Стоуна). Пусть $C(X)$ — кольцо непрерывных функций на бикомпакте X с топологией равномерной сходимости, порожденной нормой

$$\left\|f(x)\right\| = \max_{x \in X}\left|f(x)\right|,\ f(x) \in C(X),$$

и пусть $C_0 \subseteq C(x)$ есть подкольцо, содержащее все константы и разделяющее все точки из X, т. е. для любых двух различных точек $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ существует функция $f(x) \in C_0$, для которой $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда $[C_0] = C(x)$, т. е. всякая непрерывная функция на X есть предел равномерно сходящейся последовательности функций из C_0.

Приведем также формулировку и доказательство теоремы Коско [5].

Теорема 1.3 (Коско). Аддитивная нечеткая система F универсально аппроксимирует функцию $f(X) \to Y$, если множество X компактно и функция $f(X)$ непрерывна на этом компакте.

Доказательство: Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторая малая величина. Требуется показать, что $|F(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X$, где X — компактное подмножество R^n. $F(x)$ — центроид выходной лингвистической переменной аддитивной нечеткой системы F.

Поскольку непрерывность $f(X)$ на компакте X определяет универсальную непрерывность, то существует некоторое фиксированное расстояние d такое, что для всех x и z в X $\left|f(x) - f(z)\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, если $|x - z| < d$. Построим цепь открытых кубов $M_1, ..., M_m$, которые покрывают X таким образом, что это приводит к наложению их в координатах n так, что каждый угол куба находится в центре c_j его соседа M_j.

Пусть B_j — симметричное нечеткое множество, сосредоточенное над $f(c_j)$. Тогда $f(c_j)$ есть центр (высота) нечеткого множества B_j. Пусть $u \in X$. Тогда конструкция u содержит самое большее 2^n перекрывающихся открытых куба M_j. Пусть w — любой в том же множестве куб. Если $u \in M_j$ и $w \in M_k$, то для всех $v \in M_j \cap M_k$ имеем $|u - v| < d$ и $|u - w| < d$. Универсальная непрерывность подразумевает, что

$\left|f(u)-f(w)\right| \le \left|f(u)-f(v)\right| + \left|f(v)-f(w)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для центров кубов c_j и c_k имеем $\left|f(c_j)-f(c_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $x \in X$. Тогда x также находится самое большее в 2^n открытых кубах с центрами c_j и $\left|f(c_j)-f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. По k-й координате ограниченного пространства R^p устанавливается k-я высота (центр) элемента аддитивной системы $F(x)$, которая лежит либо «на» k-й высоте (центре) компоненты B_j, либо в «ближайшей окрестности» k-й высоты (центра) компоненты B_j.

Поскольку $\left|f(c_j)-f(c_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $f(c_j)$, то $\left|F(x)-f(c_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $\left|F(x)-f(x)\right| \le \left|F(x)-f(c_j)\right| + \left|f(c_j)-f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Доказательство теоремы Коско показывает, что нечеткие множества A_i и B_j можно заменить совокупностью конечных векторов $\left(a_1^i, \ldots, a_n^i\right)$ и $\left(b_1^j, \ldots, b_p^j\right)$. Дискретный вариант B_j должен иметь высоту «*в*» или «*близко*» к центроиду B_j. Таким образом, всегда можно работать с большемерными гиперкубами, рассматривая нечеткие правила или продукции как картографическую матрицу (или нечеткую реляционную базу знаний) между гиперкубами, как точки в еще большем гиперкубе.

Конструктивным результатом доказательства этих теорем является оценка необходимого количества правил модели для заданной точности аппроксимации, которое определяется с помощью минимального расстояния между центроидами двух смежных нечетких множеств, представляющих заключения правил, обозначаемых как y_i и y_{i+1}:

$$\left|y_i - y_{i+1}\right| < \frac{\varepsilon}{2^g - 1}, \qquad (1)$$

где ε — точность аппроксимации; g — максимальное число перекрытий (overlapping) нечетких множеств входных переменных на компактном множестве X (для одной входной переменной $g = 2$). Для одной входной переменной необходимое количество правил определяется выражением $n \ge \frac{|X|}{\varepsilon}$. Очевидно, что при стремлении ε к нулю количество правил неограничено, но для заданного значения ε количество правил может быть оценено с помощью (1).

Однако данные результаты не дают ответов на вопросы: какую конкретно нечеткую модель необходимо выбрать и сколько должно быть правил для аппроксимации заданной функции, каковы механизмы регулирования точности аппроксимации, — а также остается не решенной проблема компактной упаковки аддитивной нечеткой модели в ограниченное адресное пространство.

Аппроксимация аддитивных нечетких моделей приведенными полиномами над конечными полями

Докажем основные утверждения, позволяющие обосновать и реализовать механизмы мягкого квантования знаний агентов и их надежного хранения в информационно-телекоммуникационных открытых мультиагентных системах. Для этого следует обосновать возможность создания аналогов нечетких и нейронечетких структур, адекватно функционирующих в конечных полях. Покажем, что:

Теорема 2.1. Аддитивная нечеткая система F со сколь угодно малой точностью $\varepsilon > 0$ аппроксимирует полином с вещественными коэффициентами $p(x) \to Y$, если множество X компактно.

Доказательство: В силу верности теоремы Коско имеем, что аддитивная нечеткая система F универсально аппроксимирует непрерывную функцию $f(x) \to Y$ на компактном множестве X, если эта функция непрерывна на этом компакте, т. е.

$$\left|F(x)-f(x)\right| < \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — сколь угодно малая величина, $x \in X$.

В соответствии с теоремой Вейерштрасса любая непрерывная функция $f(x)$, определенная на компакте X, может быть аппроксимирована с точностью $\varepsilon_2 > 0$ многочленом $p(x)$ с вещественными коэффициентами, т. е. для $\forall\ x \in X$ выполнено условие $|f(x) - p(x)| < \varepsilon_2$. Тогда

$$\left|F(x)-f(x)\right| = \left|F(x)-\left(p(x)\pm\varepsilon_2\right)\right| =$$
$$= \left|F(x)-p(x)\pm\varepsilon_2\right| < \varepsilon_1,\ \left|F(x)-p(x)\right| < \left|\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2\right|.$$

Положив $\varepsilon = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$, получаем требуемое утверждение $|F(x) - p(x)| < \varepsilon$.

Для доказательства иных аппроксимирующих свойств аддитивных нечетких и адаптивных нейронечетких систем потребуется ряд известных утверждений. Необходимость в этих утверждениях возникает в связи с требованием перехода из вещественного поля вычислений в поле вычислений над конечными полями. Отметим, что обычной дискретизацией вещественных чисел в множество целых чисел проблемы масштабирования баз знаний решить нельзя, так как множество целых чисел не является полем (в нем отсутствует мультипликативно обратный элемент). Кроме того, вычисления в конечных полях повсеместно используются в теории кодирования и в теории криптографии, без которых, в свою очередь, невозможно обосновать параметры надежной передачи информации в каналах связи открытых мультиагентных систем информационно-телекоммуникационных систем.

Конечное поле — поле, число элементов которого конечно. Если число элементов поля является степенью q^m — некоторого натурального простого числа q, являющегося характеристикой этого поля, то такое поле называют полем Галуа и обозначают $GF(q^m)$. Известно [9], что для $\forall q$ и $\forall m \in N$, где N — множество натуральных чисел, существует единственное (с точностью до изоморфизма) поле из q^m элементов. Количество элементов поля называют *порядком* этого поля и обозначают $card(GF(q^m))$. Также известны утверждения 2.1–2.7 [9].

Утверждение 2.1. Поле $GF(q^n)$ содержит подполе $GF(q^m)$ в том и только в том случае, если $n|m$ (m делит n). В частности, в любом $GF(q^m)$ содержится $GF(q)$, называемое *простым* полем.

Утверждение 2.2. Поле $GF(q)$ изоморфно полю $Z|(q)$ — классов вычетов кольца целых чисел по модулю q.

Любое конечное расширение поля алгебраично.

Утверждение 2.3. Поле вещественных чисел R является алгебраическим замыканием Ω поля Галуа, так как всякий отличный от константы многочлен с коэффициентами из $GF(q)$ имеет по крайней мере один корень на поле вещественных чисел R.

Утверждение 2.4. В любом фиксированном *алгебраическом замыкании* Ω поля $GF(q)$ существует только одно подполе $GF(q^m)$ для каждого m. Соответствие $m \leftrightarrow GF(q^m)$ является изоморфизмом между решеткой натуральных чисел (являющихся подмножеством вещественных чисел) относительно операции делимости и решеткой конечных алгебраических расширений поля $GF(q)$, лежащих в Ω относительно включения.

Такова же решетка множества конечных алгебраических расширений любого поля Галуа, лежащего в его фиксированном алгебраическом замыкании.

Утверждение 2.5. Алгебраическое расширение $GF(q^m)/GF(q)$ является простым, т. е. $\exists\alpha \in GF(q^m)$ — примитивный элемент такой, что $GF(q^m) = GF(q)(\alpha)$. Таким примитивным элементом α будет любой корень неприводимого многочлена степени m из кольца $GF(q)[X]$.

Утверждение 2.6. Множество элементов поля $GF(q^m)$ в точности совпадает с множеством корней многочлена $X^{q^m} - X$ в Ω, т. е. $GF(q^m)$ характеризуется как подполе элементов из Ω, инвариантных относительно автоморфизма $\tau:\ x \to x^{q^m}$, называемым автоморфизмом Фробениуса.

Утверждение 2.7. Если $GF(q^n) \supset GF(q^m)$, то расширение $GF(q^n)/GF(q^m)$ нормально и его группа Галуа $Gal(GF(q^n)/GF(q^m))$ циклическая порядка $n|m$.

В качестве образующей группы $Gal(GF(q^n)/GF(q^m))$ может быть взят автоморфизм τ.

Теоремы 1.1–1.3 и утверждения 2.1–2.7 позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 2.2 [10]. Пусть аддитивная нечеткая система F со сколь угодно малой точностью $\varepsilon_1 > 0$ аппроксимирует полином $p(x)$ с вещественными коэффициентами на компакте X. Тогда $\exists q$ и $\exists$полином $g(\tilde{X})$ над $GF(q^m)$ ($\tilde{x} \in \tilde{X} = \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $m \in N$, $m > 0$) изоморфный $p(x)$, который F также аппроксимирует со сколь угодно малой точностью $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \pm o(\varepsilon_1)$.

Доказательство: В силу верности утверждений 2.3, 2.4 устанавливается изоморфизм компакта X вещественного поля и $GF(q^m)$. Далее, в силу утверждения 2.6, имеем существование лексикографического порядка элементов $GF(q^m)$, инвариантного относительно автоморфизма Фробениуса, из которого следует существование $g(\tilde{X})$ над $GF(q^m)$, $\tilde{x} \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ и изоморфизм $p(X) \leftrightarrow g(\tilde{X})$.

В теореме 2.2 говорится о существовании полинома $g(\tilde{X})$ над $GF(q^m)$, который с заданной точностью аппроксимирует аддитивную нечеткую систему F, но не устанавливается вид этого полинома. Чтобы указать вид этого полинома, введем в рассмотрение ряд обозначений и ограничений.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — вектор нечетких входных переменных $x \in X$, y — нечеткая выходная переменная аддитивной нечеткой системы F, $y \in Y$. Пусть q — некоторое априорно заданное простое число.

Ограничение 2.1. Пусть $A^{(i)} = \{A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \ldots, A_q^{(i)}\}$ — множество лингвистических термов нечеткой входной переменной x_i, заданных на X соответствующими нечеткими множествами с функциями принадлежности $\mu_{A_l}(x_i) \in [0, 1]$ для $l = \overline{1, q}$. A — множество лингвистических термов вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$:

$$A = A^{(1)} \times A^{(2)} \times \ldots \times A^{(m)}.$$

Ограничение 2.2. Пусть $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_q\}$ — множество лингвистических термов, заданных на Y соответствующими нечеткими множествами с функциями принадлежности $\mu_{B_z}(y) \in [0, 1]$ для $z = \overline{1, q}$.

Ограничение 2.3. Пусть каждая функция принадлежности $\mu_{A_l}(x_i) \in [0, 1]$ для $l = \overline{1, q}$ и $\mu_{B_z}(y) \in [0, 1]$ для $z = \overline{1, q}$ является симметричной и имеет центроиды $x_i^{(l)}$ с вершинами в точках с абсциссами $\frac{l-1}{q-1}$ и основаниями: $\left[0, \frac{1}{2(q-1)}\right]$ при $l = 1$, $\left[1 - \frac{1}{2(q-1)}, 1\right]$ при $l = q$ и $\left[\frac{l-1}{q-1} - \frac{1}{2(q-1)}, \frac{l-1}{q-1} + \frac{1}{2(q-1)}\right]$ при $l \neq 1$ и $l \neq q$.

То есть ограничения 2.1 и 2.3 указывают на то, что характеристика поля полностью определяет расположение и количество термов. Тогда можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2.3. Аддитивная нечеткая система F при ограничениях 2.1–2.3 может быть аппроксимирована со сколь угодно малой точностью $\varepsilon > 0$ приведенным полиномом с коэффициентами над $GF(q)$.

Доказательство: Множество всех возможных паттернов $(x, y) = (x_1, x_2, ..., x_m, y)$ полностью определяют состояния и выход аддитивной нечеткой системы F, причем в силу ограничения 2.1 количество различных векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ ограничено и равно $\| A \| = q^m$.

Введение ограничений 2.3 на положение центроидов и размах оснований функций принадлежности обеспечивает непрерывное покрытие компакта X упорядоченными лингвистическими термами, что дает возможность применять теорему Коско и, следовательно, теоремы 2.1 и 2.2.

Тогда векторы $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ аддитивной нечеткой системы F могут быть изоморфно отображены в конечное поле $GF(q^m)$, а сама F с использованием ограничения 2.2 полностью задана ее таблицей значений для многозначной логики. Число строк в таблице значений равно $card(GF(q^m))$ и однозначно связано с мощностью базы правил для заданной точности аппроксимации, которое определяется с помощью минимального расстояния между центроидами двух смежных нечетких множеств, представляющих заключения правил.

Известно, что таблица истинности для булевых функций может быть задана полиномом Жегалкина, а алгебраическая нормальная форма для многозначной логики, определяемая таблица значений, — приведенным многочленом с коэффициентами в $GF(q)$.

Следовательно:

$$\left|F(x) - p(x)\right| = \left|F(\tilde{x}) - q(\tilde{x})\right| < \varepsilon,$$

где $F(\tilde{x})$ — изоморфное отображение F в $GF(q^m)$ для априорно заданного q, определяющего количество термов в ее нечетких переменных:

$$g(\tilde{x}) = a_0 \oplus \sum a_i \tilde{x}_i \oplus \sum a_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_j \oplus \ldots \oplus a_{12\ldots m} x_1 x_2 \ldots x_m, \quad (2)$$

где $g(\tilde{x})$ — приведенный многочлен над $GF(q)$; a_i, a_{ij}, $a_{12\ldots m} \in GF(q)$; $\tilde{x} \in GF(q)$, $i = \overline{1, m_i}$.

Алгоритмы формирования приведенных полиномов аналогичны алгоритмам построения полиномов Жегалкина, среди последних наиболее эффективные приведены в работах [11, 12], что уже само по себе приближает решение задачи автоматического формирования полной базы знаний агента. Число слагаемых полинома (2) определяется количеством различных мономов (элементарных конъюнкций при $q = 2$), которые в свою очередь являются элементарными правилами. Приведем нижние и верхние оценки сложности формирования функций в классе приведенных полиномов.

Оценки сложности формирования функций в классе приведенных полиномов над конечными полями

Введем ряд обозначений для оценки сложности функций в классе полиномов [11]. Множество всех функций многозначной логики с основанием q обозначим P_q. Пусть $l(G)$ обозначает количество слагаемых полинома G и называется длиной полинома G. Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_m) \in P_q$ и имеет соответствующий ей приведенный полином G_f над P_q. Введем функционал $l_G(f) = \min(l(G_f))$, обозначающий длину полинома G_f. Значение $l_G(f)$ называют *сложностью функции f в классе приведенных полиномов*.

Также введем в рассмотрение функцию $L_G(m) = \max\limits_{f \in P_q(m)} (l_G(f))$, которая характеризует сложность «самой сложной функции» от m переменных в классе приведенных полиномов. Функция $L_G(m)$ называется *функцией Шеннона сложности в классе приведенных полиномов*. Тогда можно доказать следующие утверждения для нижней и верхней оценок сложности функций.

Теорема 3.1. Нижняя оценка для функции Шеннона сложности в классе приведенных полиномов над $GF(q)$ задается неравенством

$$L_G(m) \geq \frac{q^m}{m \log_q (q+1)}.$$

Доказательство: Пусть $L_G(m) = L$. Всего существует $(q + 1)^m$ мономов (элементарных конъюнкций при $q = 2$) от m переменных, поэтому количество полиномов длины не больше L от m переменных не превосходит $((q + 1)^m)^L$. Число функций P_q от m переменных равно q^{q^m}. Очевидно, что количество полиномов не может быть меньше числа функций, иначе найдется функция, для которой не существует эквивалентный ей полином длины $\leq L$, что противоречит определению $L_G(m)$. Следовательно: $(q+1)^{mL} \geq q^{q^m}$. Выразив L из данного неравенства, получаем

$$L_G(m) \geq \frac{q^m}{m \log_q (q+1)}. \quad (3)$$

Оценку сверху для $L_G(m)$ можно получить, обобщив на случай многозначной логики верхнюю оценку для булевых функций, а именно [11]: $L_{P_2}(m) \leq 2\frac{2^m}{m}(1+\ln(m))$. Тогда для приведенного полинома в P_q получим

$$L_G(m) \leq \frac{q^{m+1}}{m}(1+\ln(m)). \qquad (4)$$

Как видно из выражений (3) и (4), при аппроксимации аддитивных нечетких систем приведенными полиномами над $GF(q^m)$ по-прежнему, как и в классических нечетких продукционных моделях, имеет место экспоненциальный рост количества правил при стремлении к нулю ошибки аппроксимации, что приводит к существенному росту либо вычислительной сложности, либо коммуникационной сложности и практической неприменимости. С практической точки зрения достаточно иметь приемлемую для адекватного принятия решения точность аппроксимации. В этом случае задача сводится к поиску компромисса между указанной точностью и количеством правил модели. Подходы к поиску такого компромисса могут быть следующими:

1) использовать алгоритмы формирования приближенных приведенных полиномов;

2) модифицировать известные из существующих рекурсивные алгоритмы, базирующиеся на формировании эквивалентных генераторов линейных рекуррентных последовательностей;

3) выполнить построение иерархических конструкций из адаптивных нечетких систем или их изоморфных образов над конечными полями, используя возможность представления приведенного полинома в виде произведения его неприводимых сомножителей.

Отметим, что ограничение 3.2 можно ослабить без потери общности до более слабого ограничения 3.4 на перекрытия оснований функций принадлежности, обеспечив касание термов более чем в одной общей точке, но этого достаточно, чтобы сохранить компакт X и, следовательно, оставить пространство топологичным.

Ограничение 3.4. Пусть каждая функция принадлежности $\mu_{A_l}(x_i) \in [0, 1]$ для $l = \overline{1, q}$ и $\mu_{B_z}(y) \in [0, 1]$ для $z = \overline{1, q}$ является симметричной и имеет центроиды $x_i^{(l)}$ с вершинами в точках с абсциссами $\frac{l-1}{q-1}$ и основаниями: $\left[0, \frac{1}{q-1}\right]$ при $l = 1$, $\left[1-\frac{1}{q-1}, 1\right]$ при $l = q$ и $\left[\frac{l-1}{q-1}-\frac{1}{q-1}, \frac{l-1}{q-1}+\frac{1}{q-1}\right]$ при $l \neq 1$ и $l \neq q$.

Ограничения 3.2 и 3.4 указывают на диапазон возможных интервалов настройки параметров функций принадлежности, если аддитивная нечеткая модель является адаптивной (нейронечеткой), сохраняя ее топологию.

Наличие целевой функции у агента позволяет добиться регулируемого баланса между количеством правил и точностью аппроксимации, формируя иерархические нечеткие продукционные модели (аддитивные m-входные иерархические нечеткие модели), включающие в себя $(m-1)$-входных нечетких продукционных моделей [12]. Иерархическая схема при этом, очевидно, должна учитывать рейтингование вложенных в нее нечетких моделей (рейтинговые механизмы в данной статье не рассматриваются).

Докажем, что аддитивные m-входные иерархические нечеткие модели также являются универсальными аппроксиматорами. Для этого следует показать, что вид полинома, аппроксимирующего аддитивную нечеткую модель, может быть представлен некоторой иерархической структурой. Иерархическая структура в свою очередь всегда может быть получена из мультипликативной формы полинома.

Теорема 3.2. Существует полином $p(X) \to Y$ с вещественными коэффициентами и с мультипликативной структурой своих одночленов, который аппроксимирует аддитивная нечеткая система F со сколь угодно малой точностью $\varepsilon > 0$, если множество X компактно.

Доказательство: Возможность представления произвольного полинома в виде мультипликативной структуры его членов вытекает из существования интерполяционной формулы Лагранжа, а также непосредственно из утверждений теорем 2.3, Вейерштрасса и Коско. Формула Лагранжа в данном случае имеет следующий вид:

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{(a_1 a_2 \ldots a_m)} f(a_1 a_2 \ldots a_m) \times$$
$$\times (x_1 + a_1 + 1)\ldots(x_m + a_m + 1).$$

Теоремы 1.1–3.2 лежат в основе алгоритма мягкого квантования нечетких импликаций, представленного в следующем разделе. С помощью данного алгоритма появляется возможность автоматического регулирования мощности продукционных баз знаний, используемых, в частности, в многоагентных телекоммуникационных системах.

Алгоритм мягкого квантования нечетких импликаций

Как аддитивная, так и мультипликативная форма приведенного полинома, который является образом аддитивной нечеткой модели, позволяет распределять (и перераспределять) его мономы (элементарные дизъюнкции и конъюнкции при

$q = 2$) между отдельными агентами, объединенными в одну группу для выполнения целевой функции. Целевая функция представляет собой не что иное, как полную (или полную с заданной точностью аппроксимации) форму приведенного полинома (аддитивную или мультипликативную).

Подчеркнем, что любое метрическое пространство топологично. Изменяя число уровней иерархии m-входной иерархической нейронечеткой модели, мы, по сути, регулируем коэффициенты полинома Пуанкаре, которые есть не что иное, как числа Бетти. Обобщенный алгоритм мягкого квантования базы знаний одновременно конструирует ее архитектуру — строит адаптивный классификатор, балансируя между его метрической и топологической структурами. Основные шаги мягкого квантования базы знаний рассматриваемых архитектур следующие.

Шаг 1. Для каждой входной нечеткой переменной $x_1, x_2, ..., x_m$ базы знаний создать своего агента A_j, $j = \overline{1, m}$ (предполагается, что $x_1, x_2, ..., x_m$ нормированы).

Шаг 2. Каждого агента назначить ответственным за свою характеристику q_i, $i = \overline{1, q}$, где q — простое число или степень простого числа.

Шаг 3. Установить начальные значения для количества термов каждой топологии: для плоской $N_j^{flat} = 1$, для иерархической $N_j^{hier} = 1$.

Шаг 4. В параллельном режиме каждый агент решает задачу выбора топологии своего нечеткого входа.

До тех пор, пока $\left|f(x_{ji}) - \hat{f}(x_{ji})\right| = \varepsilon_i > \varepsilon$ ($\hat{f}(x_i)$ — эталонная выборка на этапе обучения) или число уровней иерархии модели меньше q, делаем параллельно:

— для плоской модели увеличиваем N_j^{flat}: $N_j^{flat} = N_j^{flat} q_i$ — число термов для x_j;

— для иерархической модели фиксируем на первом слое для x_j количество термов равным q_i, для термов x_j со степенью принадлежности *второго* рода $\mu'(y, x_j) \geq \delta$ (δ зависит от решаемой задачи и известна априорно, обычно являясь точкой перехода, $\delta = 0{,}5$) добавить новый слой также с количеством термов, равным q_i: $N_j^{hier} = N_j^{hier} + q_i$.

Условие выхода из цикла говорит о том, что он конечен.

Шаг 5. Сравнить количество термов в соответствии с условием: если $N_j^{flat} \leq N_j^{hier}$, то оставить модель плоской (значит, выход y гладко зависит от x_j), иначе сохранить иерархию топологии.

Шаг 6. Инкапсулировать выбранную на шаге 4 топологию модели (считать сформированную топологию кандидатом на узел m-входной иерархической нейронечеткой модели, зафиксировать его топологию, рассчитанное количество термов и $q_i^{(j)}$).

Шаг 7. Ранжировать $x_1, x_2, ..., x_m$ в соответствии с их влиянием на целевую функцию y, объединить сформированные инкапсулированные узлы в иерархию в соответствии с разложением числа m по основанию $q_{opt} = \max\limits_{j=1,m} q_i^{(j)}$.

Следовательно, количество входов для надуровня $m^{(+1)} = \log_{q\_opt}(m)$. (Если $m^{(+1)} \geq q_{opt}$, то топологию можно наращивать до $m^{(+2)}$, но при этом алгоритм экспоненциально сходится).

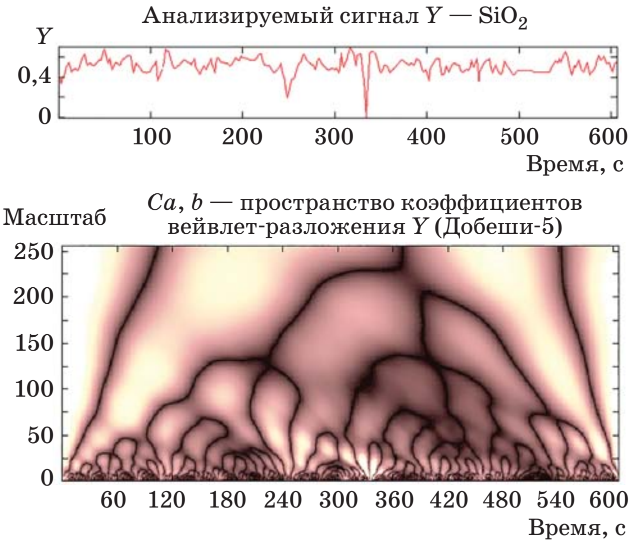
Шаг 8. Параметры настройки начальных термов для входов надуровня принять равными выходным термам текущего уровня. Проверить ошибку обобщения, при необходимости адаптировать параметры входных термов надуровня.

Шаг 9. В зависимости от решаемой задачи — если свою базу знаний агенту не нужно публиковать (т. е. он квантовался, чтобы получить данные от других агентов), то задачу квантования считать решенной. Если базу знаний нужно транспортировать через других агентов или по незащищенным каналам связи, то выполнить жесткое пороговое кодирование полученной топологии, сохранив массив настроек функций принадлежности на момент жесткого квантования. Объем такого массива линеен по отношению к количеству входов иерархической нейронечеткой модели. Для каждого входа в рамках своего узла найти приведенный полином, аппроксимирующий данный вход как линейную рекуррентную последовательность. При этом потеря информации не происходит, а объем передаваемой базы знаний определяется степенью полученного полинома.

Поскольку коммуникационная сложность CC определяется как глубина графа коммуникационного протокола, то из приведенного выше алгоритма мягкого квантования очевидно, что оценки коммуникационной сложности m-входной иерархической нейронечеткой модели определяются неравенством

$$\log q_{opt} \leq CC \leq \log\left(\min_j \left(\max_j N_j^{flat} + \max_j N_j^{hier}\right)\right) \leq$$
$$\leq 2\log q_{opt},\ j = \overline{1, m}.$$

Отметим, что на практике при решении задач автономного адаптивного управления технологическими параметрами, например в горнометаллургическом производстве, «плавающие» оптимизируемые выходные параметры успешно удается контролировать нейронечеткими сетями (агентами) с мощностью правил до 1000. Например, содержание оксида кремния SiO_2 в шлаке при выплавке медно-никелевых руд (Y), вейвлет-разложение (Добеши-5) коэффициентов которого отображено на рисунке, контролирует-



■ Вейвлет-разложение Добеши-5 контролируемого параметра Y

ся адаптивной системой [13] со средней мощностью правил 378 вместо 5^{16} при 16 входных нечетких параметрах. При этом переквантование выполняется автоматически при появлении «четвертой ноги» во фрактальной структуре Y, меняя q_{opt} в диапазоне от 3 до 5. Важно, что информация о драгметаллах в открытых каналах передается защищенной.

В целом отметим, что иерархические адаптивные нейронечеткие модели, представленные приведенными полиномами, позволяют реализовать принципы распределенности многоагентных систем, а их практическая реализация [13] подтверждает эффективность функционирования в распределенных производственных информационно-телекоммуникационных системах.

Заключение

В данной статье на основании теорем об универсальной аппроксимации нечетких продукционных моделей доказаны теоремы о существовании фиксированного простого числа q, при котором аддитивная нейронечеткая система F с симметричными функциями принадлежности для ее входных x_i и выходной переменной y на компакте X может быть аппроксимирована со сколь угодно малой точностью $\varepsilon > 0$ приведенным полиномом.

Даны верхние и нижние оценки функций Шеннона сложности для приведенных полиномов над конечными полями Галуа. Показана возможность аппроксимации иерархических нечетких и нейронечетких систем приведенными полиномами над конечными полями Галуа. Представлен алгоритм мягкого квантования аддитивных продукционных баз знаний и оценки коммуникационной сложности продукционной базы знаний, аппроксимируемой полиномом.

Полученные в статье доказательства могут быть использованы при решении задач автоматического квантования баз знаний, реализованных в виде аддитивных нечетких и нейронечетких сетей, что особенно важно при разработке интеллектуальных агентов открытых мультиагентных систем распределенных информационно-телекоммуникационных систем.

В частности, при решении практических задач представленные в статье результаты позволяют, во-первых, автоматически снижать объем продукционной базы знаний (на порядки) за счет построения иерархии правил базы знаний, представленных в виде мультипликативной и гранулированных форм ее приведенного полинома. При необходимости, наоборот, наращивать базу знаний нечеткими импликациями. Во-вторых, формировать метазнания в виде функций над приведенными полиномами. В-третьих, автоматически управлять уровнем защиты знаний и данных, изменяя его в соответствии с уровнем иерархии правил, выделенных на этапе квантования. В-четвертых, распределять и перераспределять правила между мобильными агентами перед транспортировкой базы знаний по каналам связи, распределяя тем самым время доставки ее получателю при обеспечении требуемого уровня надежности.

Литература

1. **Тимофеев А. В., Юсупов Р. М.** Интеллектуализация процессов управления и навигации робототехнических систем // Робототехника и техническая кибернетика. 2014. № 2(3). С. 19–22.
2. Patent USA 7532724 H04L 9/00. Method for Encrypting and Decrypting Data for Multi-Level Access Control in an Ad-Hoc Network/ S. Bezzateev, Tae-chul Jung, Kyung-hee Lee, E. Krouk, A. Sitalov.
3. **Фомичева С. Г.** Защита информации в распределенных иерархических системах // Научно-технические ведомости СПбГТУ. Информатика, телекоммуникации, управление. 2008. № 2. С. 91–97.
4. **Борисов В. В., Круглов А. С., Федулов А. С.** Нечеткие модели и сети. — М.: Горячая линия–Телеком, 2012. — 284 с.
5. **Kosco B.** Fuzzy System as Universal Approximators // Proc. of IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, San Diego, 1992. P. 1153–1162.
6. **Wang L. X.** Fuzzy Systems are Universal Approximators // Proc. of IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, San Diego, 1992. P. 1163–1169.

7. **Ying H.** Sufficient Conditions on Uniform Approximation of Multivariate Functions by General Takagi — Sugeno Fuzzy Systems with Linear Rule Consequents // IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics. 1998. Vol. 28. Part A. N 4. P. 515–520.
8. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Физматлит, 2003. Т. 1. — 680 с.
9. **Lidl R., Niederreiter H.** Finite Fields. — Cambridge University Press, 1985. — 822 p.
10. **Фомичева С. Г.** Теория потоковых систем защиты информации. — Норильск: Норильский инд. ин-т, 2007. — 243 с.
11. **Селезнева С. Н.** Булевы функции и полиномы. http://mk.cs.msu.ru/images/e/ea/ Bool_polynoms.pdf (дата обращения: 25.01.2017).
12. **Фомичева С. Г.** и др. Моделирование развития информационно-телекоммуникационных систем. — СПб.: Синтез-Бук, 2009. — 384 с.
13. **Фомичева С. Г., Конев А. В.** Адаптивная система управления содержанием оксида кремния в шлаках при переработке медно-никелевых руд // Программные продукты и системы. 2014. № 3(107). С. 131–141.

UDC 621.391; 004.89
doi:10.15217/issn1684-8853.2017.3.2

Theoretical Aspects of Knowledge base Quantization in Multi-Agent Systems

Fomicheva S. G.[a], PhD, Tech., Professor, levikha@rambler.ru
[a]Norilsk State Industrial Institute, 7, 50 Let Oktyabrya St., 663310, Norilsk, Russian Federation

Introduction: Intensive use of wireless and mobile communication networks in distributed information-telecommunication systems and automated systems of control over technological processes in industrial corporations leads to the situation when the architecture of such systems forms new conceptual entities called agents which should be controlled in real time. When assessing the effectiveness of multi-agent systems, you should take into account the communication complexity of the interaction between the agents, which directly depends on the number of the adapted parameters. For intelligent agents, the main issues in this case are, on the one hand, the requirement of rapid adaptation and self-adaptive parameters of their knowledge bases and, on the other hand, the need to ensure the integrity and security of both the data and the agents' knowledge. **Purpose:** The goal of this research is developing theoretical and algorithmic ways for soft quantization of additive production knowledge bases, which would reduce the communication complexity of the interaction between intelligent agents. **Results:** We have proved a number of statements which allow you to perform isomorphic transformations of classical additive fuzzy models functioning in the field of real numbers into their analogs able to function in finite Galois fields. We have demonstrated the homeomorphism (topologic isomorphism) of the discussed fuzzy and neuro-fuzzy models. On the base of the proven statements, an algorithm of soft quantization of fuzzy implications has been developed. The essence of this algorithm is flexible control over the topology of neuro-fuzzy hierarchical models while maintaining the given accuracy of the approximation of the agent-controlled parameters. The novelty of our approach is the substantiated principal possibility of adequate quantization of additive production knowledge bases. A way has been found to automatically control the amount of knowledge base optimization parameters which include the number of terms in linguistic variables, the number of adaptation parameters for each linguistic terms, and the number of hierarchical levels in an additive fuzzy model. As constraints, we have accepted the assumptions about continuous coverage of the solution space (continuum) by terms of linguistic variables of fuzzy implications. It has been shown that to ensure a quantization continuum, it is sufficient to adjust the Galois field characteristic. **Practical relevance:** The developed method for soft quantization of fuzzy implications allows you to significantly (in several orders) reduce the volume of the knowledge base necessary for the agents to make appropriate decisions, thereby reducing the communication complexity of the interaction between the agents. Also, it provides the possibility to adjust the level at which the data and the knowledge of the agents are protected.

Keywords — Additive Fuzzy Models, Multi-Agent Telecommunication Systems, Isomorphism, Homeomorphism, Quantization, Finite Galois Field, Given Polynomials over Finite Fields, Communication Complexity.

References

1. Timofeev A. V., Iusupov R. M. Intellectualization of the Processes for Control and Robotic Navigation Systems. *Robototekhnika i tekhnicheskaia kibernetika* [Robotics and Technical Cybernetics], 2014, no. 2(3), pp. 19–22 (In Russian).
2. Bezzateev S., Jung Tae-chul, Lee Kyung-hee, Krouk E., Sitalov A. Method for Encrypting and Decrypting Data for Multi-Level Access Control in an Ad-Hoc Network. Patent USA 7532724 H04L 9/00.
3. Fomicheva S. G. Protection of Information in Distributed Hierarchical Systems. *Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbGPU. Informatika, telekommunikatsii, upravlenie*, 2008, no. 2, pp. 91–97 (In Russian).
4. Borisov V. V., Kruglov A. S., Fedulov A. S. *Nechetkie modeli i seti* [Fuzzy Models and Nets]. Moscow, Goriachaia liniia–Telekom Publ., 2012. 284 p. (In Russian).
5. Kosco B. Fuzzy System as Universal Approximators. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, 1992, pp. 1153–1162.
6. Wang L. X. Fuzzy Systems are Universal Approximators. *Proc. of IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, 1992, pp. 1163–1169.
7. Ying H. Sufficient Conditions on Uniform Approximation of Multivariate Functions by General Takagi–Sugeno Fuzzy Systems with Linear Rule Consequents. *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, 1998, vol. 28, part A, no. 4, pp. 515–520.
8. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia* [Course of Differential and Integral Calculus]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 680 p. (In Russian).
9. Lidl R., Niederreiter H. *Finite Fields*. Cambridge University Press, 1985. 822 p.
10. Fomicheva S. G. *Teoriia potokovykh sistem zashchity informatsii* [The Stream Systems Theory for Information Protection]. Norilsk, Noril'skii industrial'nyi institute Publ., 2007. 243 p. (In Russian).
11. Selezneva S. N. *Bulevy functsii i polinomy* [The Boolean Functions and Polynomial's]. Available at: http://mk.cs.msu.ru/images/e/ea/Bool_polynoms.pdf (accessed 25 January 2017).
12. Fomicheva S. G., et. al. *Modelirovanie razvitiia informatsionno-telekommunikatsionnykh sistem* [The Simulation of the Development for Information and Telecommunication Systems]. Saint-Petersburg, Sintez-Buk Publ., 2009. 384 p. (In Russian).
13. Fomicheva S. G., Konev A. V. Adaptive Control System for Silicon Oxide Concentration in Slags at Processing Cooper-nickel Ores. *Programmnye produkty i sistemy* [Software & Systems], 2014, no. 3(107), pp. 131–141 (In Russian).