УДК 623.4.016
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.4.114

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА В УСЛОВИЯХ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ И ОГРАНИЧЕННОСТИ НАБЛЮДАЕМЫХ ПРИЗНАКОВ

В. Н. Арсеньев[a], *доктор техн. наук, профессор*
И. А. Трофимов[a], *канд. техн. наук, старший преподаватель*
[a]*Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, РФ*

Постановка проблемы: *разнородность поступающей информации и отсутствие методов комплексирования различной информации при решении задачи выбора требуют разработки методологического аппарата для ее решения. Целью работы является разработка методов решения задачи выбора с учетом разнородности и ограниченности получаемой информации.* ***Результаты:*** *сформулирована математическая постановка задачи выбора. Задача сведена к проверке многомерной статистической гипотезы о том, что векторы селективных признаков равны эталонным значениям. Для решения этой задачи используется критерий отношения правдоподобия, который является наиболее мощным. Вводится комбинированный показатель близости, который является мерой близости всей совокупности различных по физическому смыслу селективных признаков объекта, полученных на основе измерений, к эталонным значениям. Приведена методика решения задачи выбора при достаточно большом объеме информации об объектах. В реальных условиях объем измерительной информации о характеристиках наблюдаемых объектов, как правило, ограничен. При ограниченном объеме измерительной информации распределение Пирсона 3-го типа достаточно хорошо аппроксимирует истинное распределение комбинированного показателя близости. Разработана методика решения задачи выбора при ограниченном объеме информации.* ***Практическая значимость:*** *применение разработанных методов позволит повысить достоверность задачи выбора по сравнению с существующими методами.*

Ключевые слова *— выбор, объект, отношение правдоподобия, признак.*

Введение

Задача выбора при наличии разнородной информации об объектах является одной из наименее разработанных в теории и практике принятия решений. К одной из типовых задач многокритериального выбора относится выбор наилучшего объекта. Существует множество подходов к ее решению [1–6].

Разнородность поступающей информации при решении задачи выбора ставит проблему нахождения весовых коэффициентов, учитывающих «качество» информации. В ряде подходов требуется достаточно большой объем информации. В настоящей работе предлагается метод решения задачи выбора с учетом разнородности и ограниченности получаемой информации.

Постановка задачи

Задача выбора состоит в выборе из множества наблюдаемых объектов одного целевого объекта. Для ее решения наблюдателем производятся измерения различных физических величин, характеризующих объекты (в некоторых случаях информация о характеристиках объектов наблюдения может поступать на борт извне).

Объединим все измеряемые величины в соответствии с их физическим смыслом в r различных групп и представим каждую группу в виде вектора

$$\mathbf{X}_i^m = \left[X_{i1} \quad X_{i2} \ldots X_{im_i}\right], \tag{1}$$

где m_i — число величин, входящих в i-ю группу, $i \in \overline{1,r}$. Первая группа может характеризовать, например, баллистические признаки объекта, вторая — геометрические и т. д. Тогда множество всех измеряемых величин можно представить в виде одного составного вектора

$$\mathbf{X}^m = \left[\mathbf{X}_1^m \quad \mathbf{X}_2^m \ldots \mathbf{X}_r^m\right]. \tag{2}$$

Очевидно, что в общем случае векторы $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_r$ являются случайными и коррелированными. При нормальном законе распределения измеряемых величин X_{ij}, $j \in \overline{1, m_i}$, $i \in \overline{1,r}$, путем ортогонального преобразования можно привести их к системе некоррелированных, а значит и независимых величин.

Будем полагать, что измеряемые величины независимы друг от друга, а функция плотности распределения величин, входящих в i-ю группу, имеет вид $\varphi_i(\mathbf{X}_i;\boldsymbol{\Theta}_i)$, $i \in \overline{1,r}$. Через $\boldsymbol{\Theta}_i$ обозначен вектор селективных признаков, характеризующий i-ю группу измеряемых величин. Размерность n_i вектора $\boldsymbol{\Theta}_i$ в общем случае может отличаться от размерности m_i вектора $\mathbf{X}_i$. В качестве вектора селективных признаков обычно используются параметры закона распределения соответствующего вектора измеряемых величин или некоторые функции от этих параметров.

Допустим, что за достаточно короткий промежуток времени были произведены измерения всех физических величин, характеризующих объект.

Причем число измерений величин 1-й группы составило N_1, 2-й группы — N_2 и т. д., r-й группы — N_r. Кроме того, будем полагать, что имеются эталонные значения селективных признаков $\boldsymbol{\Theta}_{эi}, i \in \overline{1, r}$.

Тогда задача выбора может быть сведена к проверке многомерной статистической гипотезы H_0 о том, что векторы признаков равны эталонным значениям, т. е.

$$H_0 : \boldsymbol{\Theta}_i = \boldsymbol{\Theta}_{э\,i},\ i \in \overline{1, r}. \tag{3}$$

Существует несколько способов выбора альтернатив в условиях нескольких критериев: сведение многокритериальной задачи к однокритериальной, условная максимизации, нахождения множества Парето и др.

Решение задачи

Среди множества подходов к решению этой задачи следует выделить критерий отношения правдоподобия, который является наиболее мощным.

Для использования этого критерия составим функцию правдоподобия

$$L(\boldsymbol{\Theta}_1, \boldsymbol{\Theta}_2, \ldots, \boldsymbol{\Theta}_r) = \prod_{j=1}^{N_1} \phi_1(\mathbf{X}_{1j}; \boldsymbol{\Theta}_1) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{N_2} \phi_2(\mathbf{X}_{2j}; \boldsymbol{\Theta}_2) \cdot \ldots \cdot \prod_{j=1}^{N_r} \phi_r(\mathbf{X}_{rj}; \boldsymbol{\Theta}_r) \tag{4}$$

и на ее основе отношение правдоподобия для проверки гипотезы H_0

$$\nu = \frac{L(\boldsymbol{\Theta}_{э1}, \boldsymbol{\Theta}_{э2}, \ldots, \boldsymbol{\Theta}_{эr})}{L(\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_r)} =$$
$$= \frac{\prod_{j=1}^{N_1} \phi_1(\mathbf{X}_{1j}; \boldsymbol{\Theta}_{э1}) \cdot \prod_{j=1}^{N_2} \phi_2(\mathbf{X}_{2j}; \boldsymbol{\Theta}_{э2}) \cdot \ldots \cdot \prod_{j=1}^{N_r} \phi_r(\mathbf{X}_{rj}; \boldsymbol{\Theta}_{эr})}{\prod_{j=1}^{N_1} \phi_1(\mathbf{X}_{1j}; \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1) \cdot \prod_{j=1}^{N_2} \phi_2(\mathbf{X}_{2j}; \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2) \cdot \ldots \cdot \prod_{j=1}^{N_r} \phi_r(\mathbf{X}_{rj}; \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_r)} =$$
$$= \prod_{j=1}^{N_1} \frac{\phi_1(\mathbf{X}_{1j}; \boldsymbol{\Theta}_{э1})}{\phi_1(\mathbf{X}_{1j}; \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_1)} \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{N_2} \frac{\phi_2(\mathbf{X}_{2j}; \boldsymbol{\Theta}_{э2})}{\phi_2(\mathbf{X}_{2j}; \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_2)} \cdot \ldots \cdot \prod_{j=1}^{N_r} \frac{\phi_r(\mathbf{X}_{rj}; \boldsymbol{\Theta}_{эr})}{\phi_r(\mathbf{X}_{rj}; \tilde{\boldsymbol{\Theta}}_r)} =$$
$$= \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_r, \tag{5}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\Theta}}_i$ — оценка максимального правдоподобия вектора селективных признаков $\boldsymbol{\Theta}_i$, полученная по выборке $\mathbf{X}_{i1}, \mathbf{X}_{i2}, \ldots, \mathbf{X}_{iN_i}$; $\nu_i = \prod_{j=1}^{N_i} \frac{\phi_i(\mathbf{X}_{ij}; \boldsymbol{\Theta}_{эi})}{\phi_i(\mathbf{X}_{ij}; \boldsymbol{\Theta}_i)}$ — отношение правдоподобия для проверки гипотезы $\boldsymbol{\Theta}_i = \boldsymbol{\Theta}_{эi}$; $i \in \overline{1, r}$.

Отношение правдоподобия ν является мерой близости селективных признаков, полученных на основе измерений, к их эталонным значениям.

Поскольку векторы измеряемых величин $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_r$ взаимно независимы, то и величины ν_1, ν_2, ..., ν_r также взаимно независимы как функции независимых величин. Действительно, из выражения (5) видно, что ν_i является функцией измеренных значений $\mathbf{X}_{i1}, \mathbf{X}_{i2}, \ldots, \mathbf{X}_{iN_i}$ только вектора $\mathbf{X}_i$ и не зависит от измерений остальных векторов.

Рассмотрим величину

$$z = -2\ln\nu = \sum_{i=1}^{r}(-2\ln\nu_i) = \sum_{i=1}^{r} z_i, \tag{6}$$

которую в дальнейшем будем называть *комбинированным показателем близости*, поскольку она так же, как и ν, является мерой близости всей совокупности различных по физическому смыслу признаков объекта, полученных на основе измерений, к эталонным значениям. Очевидно, что составляющие ее величины $z_i = -2\ln\nu_i$, $i \in \overline{1, r}$ являются независимыми, и каждая из них характеризует близость селективных признаков i-й группы к соответствующим эталонным значениям.

Допустим, что все функции $\phi_i(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\Theta}_i)$ являются регулярными в смысле первой и второй производных по вектору $\boldsymbol{\Theta}_i$ в области его возможных значений, $i \in \overline{1, r}$. Тогда при достаточно больших объемах измерений, которые определяются величинами N_1, N_2, ..., N_r, распределение z_1 стремится к χ^2-распределению с n_1 степенями свободы, z_2 — к χ^2-распределению с n_2 степенями свободы и т. д., z_r — к χ^2-распределению с n_r степенями свободы. Поскольку распределение χ^2 является устойчивым, то величина z, определяемая по формуле (6), также в пределе будет иметь χ^2-распределение с $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ степенями свободы.

Выберем такую достаточно малую вероятность γ (вероятность ошибки первого рода — уровень значимости), чтобы событие с этой вероятностью можно было считать практически невозможным, и определим критическое значение z_γ величины z из выражения

$$\gamma = \int_{z_\gamma}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{n/2-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \mathrm{d}y, \tag{7}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция (интеграл Эйлера 2-го рода).

В этом уравнении подынтегральное выражение определяет вероятностный элемент χ^2-распределения с n степенями свободы. Поэтому значение величины z_γ является 100γ-процентной точкой χ^2-распределения с n степенями свободы, при котором справедливо уравнение (7), т. е. $z_\gamma = \chi^2_{n,\gamma}$. Оно может быть найдено по таблицам χ^2-распределения [7], входами в которую являются величины γ и n.

Критическая граница для проверки гипотезы H_0 будет определяться по формуле

$$z_\gamma = \chi^2_{n,\gamma}, \tag{8}$$

а критическая область задаваться неравенством

$$z \ge z_\gamma. \tag{9}$$

Если реализация $z^* = -2\ln(\nu^*)$ комбинированного показателя близости $z = -2\ln(\nu)$, полученная по результатам измерений векторов признаков $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_r$, характеризующих объект, больше или равна критической границе z_γ, то принимается решение о том, что данный объект не является целевым, поскольку имеет место значимое расхождение между векторами селективных признаков $\boldsymbol{\Theta}_i, i \in \overline{1,r}$ и соответствующими эталонными значениями $\boldsymbol{\Theta}_{\text{э}i}, i \in \overline{1,r}$. Вероятность того, что такая ситуация возникнет, когда гипотеза H_0 на самом деле верна, равна γ.

Если же полученная реализация

$$z^* < z_\gamma, \tag{10}$$

то гипотеза H_0 принимается и считается, что анализируемый объект является целью.

Таким образом, при достаточно большом объеме информации об объектах, находящихся в поле зрения наблюдателя, методика решения задачи селекции может быть представлена следующим образом.

Пусть в поле зрения наблюдателя находится s объектов.

1. По результатам измерений для каждого из объектов определяются оценки максимального правдоподобия $\boldsymbol{\Theta}_i, i \in \overline{1,r}$ соответствующих векторов селективных признаков $\boldsymbol{\Theta}_i, i \in \overline{1,r}$.

2. На основе эталонных значений селективных признаков $\boldsymbol{\Theta}_{\text{э}i}, i \in \overline{1,r}$ по формулам (5) и (6) рассчитываются комбинированные показатели близости $z_k^* = -2\ln(\nu_k^*)$, $k \in \overline{1,s}$ для каждого объекта.

3. Для выбранного уровня значимости γ по таблицам χ^2-распределения определяется критическое значение z_γ.

4. Из s объектов, попавших в поле зрения наблюдателя, отбрасываются те, для которых комбинированный показатель близости больше или равен z_γ.

5. Путем сравнения величин z_k^* для оставшихся объектов находим целевой объект, для которого комбинированный показатель является минимальным.

В реальных условиях объем измерительной информации о характеристиках объектов, как правило, ограничен. Это может быть связано с рядом причин: ограниченным временем, отводимым на решение задачи селекции; большими расстояниями до наблюдаемых объектов; техническими ограничениями измерителей и т. д. Следствием перечисленных причин является резкое сужение области применения разработанной выше методики для решения задачи выбора, поскольку она предполагает использование асимптотического χ^2-распределения для комплексного показателя близости (6). При небольших выборках истинное значение критической границы z_γ, используемой для принятия решения, может отличаться от значения, полученного по формуле (8), что снижает вероятность принятия правильного решения о целевом объекте. Поэтому при небольших объемах измерительной информации разработанная методика должна быть скорректирована, главным образом, по п. 3, связанному с определением критической границы z_γ. Уточнить значение критической границы можно путем нахождения более точной аппроксимирующей зависимости для закона распределения комплексного показателя z.

При ограниченном объеме измерительной информации распределение Пирсона 3-го типа достаточно хорошо аппроксимирует истинное распределение меры z [8].

Функция плотности вероятности Пирсона 3-го типа имеет вид

$$\tilde{\phi}_{\hat{z}}(z) = \frac{1}{\beta\Gamma(\rho)}\left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)^{\rho-1} \exp\left(-\frac{z-\alpha}{\beta}\right), \tag{11}$$

где $\alpha \le z < \infty$, $-\infty < \alpha < \infty$, $0 < \rho < \infty$, $0 < \beta < \infty$ — неизвестные параметры распределения, для определения которых может быть использован, например, метод моментов; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

В качестве статистических моментов возьмем семиинварианты величины z, которые в соответствии с распределением (11) определяются по формулам

$$\tilde{\kappa}_1 = \alpha + \rho\beta;\ \tilde{\kappa}_j = \rho\beta^j\Gamma(j),\ j \ge 2, \tag{12}$$

где j — порядок семиинварианта [9].

Точные значения κ_j, j = 1, 2, ... семиинвариантов меры z могут быть найдены по известным функциям распределения $\phi_i(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\Theta}_i)$, $i \in \overline{1,r}$.

Согласно формуле (6), комбинированный показатель z близости всех признаков к эталонным значениям является суммой мер z_i, каждая из которых, в свою очередь, характеризует близость признаков i-й группы к соответствующим эталонным значениям. Поскольку величины $z_i, i \in \overline{1,r}$ независимые, то в соответствии со свойствами семиинвариантов [3] получим

$$\kappa_j = \sum_{i=1}^{r} \kappa_{ji},\ j = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

где κ_{ji} — семиинвариант j-го порядка величины z_i, $i \in \overline{1,r}$.

Аналитические выражения для определения семиинвариантов z_i при различных законах распределения $\phi_i(\mathbf{X}_i;\Theta_i)$ приведены в работе [8].

Система уравнений для определения параметров распределения (11) имеет вид

$$\alpha+\rho\beta=\kappa_1;\ \rho\beta^2=\kappa_2;\ 2\rho\beta^3=\kappa_3. \qquad (14)$$

Решив систему (14), получим

$$\alpha=\kappa_1-\frac{2\kappa_2^2}{\kappa_3};\ \beta=\frac{\kappa_3}{2\kappa_2};\ \rho=-\frac{4\kappa_2^3}{\kappa_3^2}. \qquad (15)$$

Полагая, что распределение (11) достаточно хорошо аппроксимирует истинное распределение комбинированного показателя z при небольших объемах измерительной информации, из уравнения

$$\gamma=\int_{z_\gamma}^{\infty}\tilde{\phi}_{\tilde{z}}(z)\mathrm{d}z$$

или

$$\gamma=\int_{z_\gamma}^{\infty}\frac{1}{\beta\Gamma(z)}\left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)^{\rho-1}\exp\left(-\frac{z-\alpha}{\beta}\right)\mathrm{d}z$$

найдем выражение для критической границы

$$z_\gamma=\alpha+\beta\chi^2_{2\rho,\gamma}/2. \qquad (16)$$

Критическая область для проверки гипотезы H_0 будет задаваться неравенством

$$z_\gamma\ge\alpha+\beta\chi^2_{2\rho,\gamma}/2. \qquad (17)$$

Методика решения задачи выбора при этом остается без изменения за исключением п. 3, который может быть сформулирован следующим образом: «Для выбранного уровня значимости γ по таблицам χ^2-распределения определяется величина $\chi^2_{2\rho,\gamma}$ и на ее основе по формуле (16) — значение критической границы z_γ». Здесь же необходимо отметить, что при нецелых значениях параметра ρ для определения величины $\chi^2_{2\rho,\gamma}$ используются простейшие интерполяционные формулы [7].

Исследование точности аппроксимации функцией (11) истинного распределения комбинированного показателя близости при различных объемах измерительной информации проведено в работе [8]. Там же приведены практические рекомендации по минимальным объемам измерений, начиная с которых возможно применение данного приближенного метода для решения задачи выбора.

Заключение

Таким образом, задача многокритериального выбора может быть сведена к проверке многомерной статистической гипотезы о том, что векторы селективных признаков равны эталонным значениям. Введение комбинированного показателя близости, который является мерой близости всей совокупности различных по физическому смыслу селективных признаков объекта, полученных на основе измерений, к эталонным значениям, позволяет комплексировать разнородную информацию. Отношения правдоподобия для проверки гипотез, полученные по результатам проведенных измерений признаков, позволяют оценить значимость этих признаков в различных операционных ситуациях. Приоритет вектора признаков тем больше, чем больше величина соответствующего ему отношения правдоподобия или чем меньше величина комбинированного показателя.

Литература

1. **Ногин В. Д.** Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. 2-е изд., испр. и доп. — М.: Физматлит, 2004. — 176 с.
2. **Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т.** Выбор вариантов: основы теории. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 240 с.
3. **Белкин А. Р., Левин М. Ш.** Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации информации. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 160 с.
4. **Батищев Д. И., Исаев С. А., Ремер Е. К.** Эволюционно-генетический подход к решению задач невыпуклой оптимизации// Оптимизация и моделирование в автоматизированных системах: межвуз. сб. науч. тр./ ВГТУ. Воронеж, 1998. С. 20–28.
5. **Денисенко Т. И.** Проблемы многокритериальной оптимизации // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2010. № 12. С. 129–130.
6. **Ломазов В. А., Прокушев Я. Е.** Решение задачи экономичного многокритериального выбора на основе метода анализа иерархий //Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 2010. Т. 14. Вып. 7-1(78). С. 128–131.
7. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.
8. **Арсеньев В. Н.** Новые методы принятия решений при ограниченных экспериментальных данных. — СПб.: Факультет ДВО, 2008. — 90 с.
9. **Пугачев В. С.** Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Физматлит, 2002. — 496 с.

UDC 623.4.016
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.4.114

Solving the Choice Problem in the Conditions of Physical Diversity and Limited Observable Signs

Arseniev V. N.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, vladar56@mail.ru
Trofimov I. A.[a], PhD, Tech., Senior Lecturer, ilya_trofimov@inbox.ru
[a]A. F. Mozhaiskii Military Space Academy, 13, Zhdanovskaia St., 197198, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: The diversity of the input information and lack of methods to amalgamate miscellaneous information for the choice problem solution call for the development of an appropriate technique. The purpose of this work is developing methods to solve the choice problem taking into account the diversity and limited nature of the received information. **Results:** A mathematical definition has been formulated for the choice problem. The task is reduced to checking the multidimensional statistical hypothesis that selective signs vectors are equal to the reference values. To solve this task, the credibility relation criterion is used which is the most powerful one. A combined proximity indicator is introduced which is a measure of proximity to the reference values for all the selective signs of the object received by measurements. A technique for the choice problem solution is discussed for a sufficiently large volume of the information on the objects. In actual practice, the volume of the measuring information on the characteristics of the observed objects is usually limited. In this case, Pearson's distribution of the 3rd type approximates the true distribution of the combined proximity indicator well enough. A technique to solve the choice problem with a limited amount of information is developed. **Practical relevance:** Using the developed methods will help to increase the reliability of the choice problem as compared to the existing methods.

Keywords — Choice, Object, Credibility Relation, Sign.

References

1. Nogin V. D. *Priniatie reshenii v mnogokriterial'noi srede: kolichestvennyi podkhod* [Decision-Making in the Multicriteria Environment: Quantitative Approach]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 176 p. (In Russian).
2. Ajzerman M. A., Aleskerov F. T. *Vybor variantov: osnovy teorii* [Choice of Options: Theory Bases]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 240 p. (In Russian).
3. Belkin A. R., Levin M. Sh. *Priniatie reshenii: kombinatornye modeli approksimatsii* informatsii [Decision-Making: Combinatory Models of Approximation of Information]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 160 p. (In Russian).
4. Batishhev D. I., Isaev S. A., Remer E. K. Evolutionary and Genetic Approach to the Solution of Problems of not Convex Optimization. *Optimizatsiia i modelirovanie v avtomatizirovannykh sistemakh*, 1998, pp. 20–28 (In Russian).
5. Denisenko T. I. Problems of Multicriteria Optimization. *Mezhdunarodnyi zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovanii*, 2010, no. 12, pp. 129–130 (In Russian).
6. Lomazov V. A., Prokushev Ya. E. The Solution of a Problem of an Economic Multicriteria Choice on the Basis of a Method of the Analysis of Hierarchies // *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Istoriia. Politologiia. Ekonomika. Informatika*, 2010, vol. 14, no. 7-1(78), pp. 128–131 (In Russian).
7. Bol'shev L. N., Smirnov N. V. *Tablitsy matematicheskoi statistiki* [Tables of Mathematical Statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 416 p. (In Russian).
8. Arseniev V. N. *Novye metody priniatiia reshenii pri ogranichennykh eksperimental'nykh dannykh* [New Methods of Decision-Making at Limited Experimental Data]. Saint-Petersburg, Fakul'tet DVO Publ., 2008. 90 p. (In Russian).
9. Pugachev V. S. *Teoriia veroiatnostei i matematicheskaia statistika* [Probability Theory and Mathematical Statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 496 p. (In Russian).