УДК 621.396:681.323
doi:10.15217/issn1684-8853.2017.4.111

ИМПУЛЬСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПЛЕКСНЫХ ФИЛЬТРОВ

С. И. Зиатдинов[a], *доктор техн. наук, профессор*
Ю. В. Соколова[a], *магистрант*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Введение: *при создании таких систем обработки информации, как доплеровские измерители скорости и ускорения, системы селекции движущихся целей, радиовысотомеры с частотной модуляцией несущего сигнала, согласованные устройства обнаружения и оценки параметров объектов, используются когерентные методы приема и анализа сигналов. Применяемые при этом, в частности, комплексные фильтры обладают комплексными импульсными характеристиками, позволяющими при заданных входных сигналах с помощью интеграла наложения найти выходные сигналы.* ***Цель:*** *разработка методики синтеза комплексных фильтров с заданными частотными свойствами на основе комплексных импульсных характеристик.* ***Результаты:*** *в общем виде получены выражения для квадратурных составляющих импульсных характеристик как полосовых, так и режекторных комплексных фильтров, что позволяет при известных входных сигналах найти их выходные сигналы. Выдвинутые теоретические положения подтверждены конкретными примерами.* ***Практическая значимость:*** *использование комплексных фильтров в когерентных системах обработки сигналов дает возможность всецело учесть временные и спектрально-корреляционные характеристики входных воздействий и тем самым значительно повысить эффективность разнообразных радиотехнических систем.*

Ключевые слова *— комплексный фильтр, частотная передаточная функция, вычеты, полюсы, комплексная импульсная характеристика.*

Введение

В настоящее время при обработке сигналов широкое распространение получили когерентные методы обработки сигналов, элементами которых являются разнообразные фильтры. С помощью фильтров выполняются операции фильтрации, дифференцирования, интегрирования, экстраполяции и т. д. В каждом конкретном случае фильтр должен обладать определенными частотными свойствами. В когерентных системах при преобразовании высокочастотных сигналов на видеочастоту и последующей обработке необходимо полностью сохранить все временные и спектрально-корреляционные свойства сигналов, включая знак частоты Доплера [1]. Данная задача легко решается с использованием разнообразных комплексных фильтров, в которых сравнительно легко изменяется их частота настройки без изменения амплитудно-частотных характеристик. При этом частота настройки фильтров может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

В общем виде частотная передаточная функция (ПФ) непрерывного комплексного фильтра записывается следующим образом [2, 3]:

$$W(p)=\frac{a_0(p-p_0)^m+a_1(p-p_0)^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0(p-p_0)^n+b_1(p-p_0)^{n-1}+\ldots+b_n}. \quad (1)$$

Данная частотная ПФ является дробно-рациональной функцией, которая называется правильной, если $n \geq m$. Корни числителя в (1) называются нулями функции, а корни знаменателя — полюсами. Полюсы и нули являются либо действительными числами, либо комплексно-сопряженными. В выражении (1) $p=j\omega$; $p_0=j\omega_0$, где ω_0 — частота настройки комплексного фильтра. Следует отметить, что при $m<n$ и $\omega_0 \neq 0$ комплексный фильтр является полосовым фильтром, при $m<n$ и $\omega_0=0$ — фильтром нижних частот, а при $m=n$ и $\omega_0 \neq 0$ — комплексным режекторным фильтром и, наконец, при $m=n$, $\omega_0=0$ — фильтром верхних частот.

Импульсная характеристика комплексного фильтра

Для нахождения импульсной характеристики комплексного фильтра в выражении (1) введем замену переменных $s=p-p_0$. Тогда частотная ПФ (1) записывается в виде

$$W(s)=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\ldots+b_n}. \quad (2)$$

В соответствии с работами [2, 3] данную частотную ПФ можно представить в параллельной форме

$$W(s)=\frac{r_n}{s-s_n}+\frac{r_{n-1}}{s-s_{n-1}}+\ldots+\frac{r_1}{s-s_1}+W_0, \quad (3)$$

где r_i — вычеты; s_k — полюсы функции.

Целая часть $W_0 \neq 0$ при $m = n$. Вычеты, соответствующие комплексно-сопряженным полюсам, также являются комплексно-сопряженными.

Обратное преобразование Фурье параллельной формы (3) определяет импульсную характеристику комплексного фильтра в виде суммы экспонент и δ-функции [3]:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} r_k \exp(p_k t) + W_0 \delta(t), \qquad (4)$$

где $p_k = s_k + j\omega_0$ — полюсы частотной ПФ (1).

Такую импульсную характеристику имеет система с $(n + 1)$ каналами, в которой канал с импульсной характеристикой $h(t) = W_0\delta(t)$ воспроизводит входной сигнал без искажений. Это безынерционный канал с бесконечной полосой пропускания. Показатели p_k в экспоненциальных слагаемых в общем случае являются комплексными числами $p_k = c_k + j(\omega_k + \omega_0)$. При этом необходимо, чтобы действительная часть $c_k \le 0$, иначе в сумме (4) появляются слагаемые вида $r_k\exp(c_k t)$, которые со временем возрастают до бесконечности. Компонента $j\omega_k$ придает колебательный характер импульсной характеристике фильтра с частотой ω_k. Затухающий гармонический сигнал $\exp(-\alpha t)(\cos\omega_k t + j\sin\omega_k t)$ появляется на выходе при $c_k < 0$. Наличие компоненты $j\omega_0$ дает колебательный характер импульсной характеристике фильтра на частоте ω_0.

В результате импульсная характеристика комплексного фильтра может быть записана следующим образом:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} r_k \exp(c_k t)\exp[j(\omega_k + \omega_0)t] + W_0\delta(t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} r_k \exp(c_k t)\exp(j\omega_k t)[\cos(\omega_0 t) +$$
$$+ j\sin(\omega_0 t)] + W_0\delta(t). \qquad (5)$$

Из выражения (5) видно, что импульсная характеристика комплексного фильтра в общем виде является тоже комплексной, т. е. содержит как вещественную, так и мнимую составляющие. Для перехода от действительного фильтра к комплексному с частотой настройки ω_0 достаточно импульсную характеристику действительного фильтра умножить на комплексный сигнал $[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)]$, что эквивалентно переносу частотной ПФ действительного фильтра на частоту ω_0 без изменения формы амплитудно-частотной характеристики.

В систему MatLab [4] включена группа функций для работы с ПФ. Нули и полюсы ПФ (2) рассчитываются с помощью функции roots вычисления корней полиномов числителя и знаменателя. Векторы коэффициентов числителя и знаменателя ПФ записываются со старшего коэффициента. Функция poly по значениям корней вычисляет коэффициенты полиномов; функция residue(a, b) вычисляет вычеты r_k и вектор k. Пустой вектор k = [ ] показывает отсутствие целой части в ПФ $W_0 = 0$ $(n < m)$. С помощью функции freqs(a, b, ω) вычисляется комплексная ПФ на заданной оси ω по значениям коэффициентов a и b.

Примеры вычислений импульсных характеристик

1. *Комплексный полосовой фильтр на базе фильтра нижних частот Баттерворта второго порядка.*

Частотная ПФ такого фильтра с учетом соотношения (1) записывается следующим образом [3, 4]:

$$W(j\omega) = \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{j(\omega - \omega_0)^2 + \sqrt{2}j\omega_{\text{ср}}(\omega - \omega_0) + \omega_{\text{ср}}^2}, \qquad (6)$$

где $\omega_{\text{ср}}$ — частота среза фильтра.

Модуль частотной ПФ (6) определяется соотношением

$$W(\omega) = 1 \Big/ \sqrt{1 + \frac{(\omega - \omega_0)^4}{\omega_{\text{ср}}^4}},$$

при этом коэффициенты a и b имеют вид

$$a = [\omega_{\text{ср}}^2]; \;\; b = [1 \quad \sqrt{2}\omega_{\text{ср}} \quad \omega_{\text{ср}}^2].$$

Программа расчета полюсов функции (6) при $\omega_0 = 0$ по данным коэффициентам представляется следующим образом [5]:

```
a = [ωср²] % коэффициенты числителя (6)
b = [1  √2ωср  ωср²] % коэффициенты
                       знаменателя (6)
p = roots(b) % полюсы функции (6)
[r,p,k] = residue(a,b) % вычисление вычетов
                         и вектора k
```

Выполнение данной программы дает следующие результаты:

$$r_1 = 0 - j0{,}707107, \; p_1 = -0{,}7071070 + j0{,}707107;$$

$$r_2 = 0 + j0{,}707107, \; p_2 = -0{,}707107 - j0{,}707107; \; k = [].$$

Таким образом, для рассматриваемого фильтра при $\omega_0 = 0$ вычеты r_1 и r_2, а также плюсы p_1 и p_2 являются комплексно-сопряженными. Тогда в соответствии с (5) импульсная характеристика комплексного полосового фильтра определяется соотношением

$$h(t) = [r_1\exp(p_1 t) + r_2\exp(p_2 t)][\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)].$$

Полученная импульсная характеристика может быть записана через вещественную и мнимую составляющие $h_x(t)$ и $h_y(t)$. При этом $h(t) = h_x(t) + jh_y(t)$, где

$$h_x(t) = [r_1\exp(p_1 t) + r_2\exp(p_2 t)]\cos(\omega_0 t);$$

$$h_y(t) = [r_1\exp(p_1 t) + r_2\exp(p_2 t)]\sin(\omega_0 t).$$

Вид амплитудно-частотной характеристики рассматриваемого комплексного полосового фильтра при $\omega_{ср} = 1$ рад/с и $\omega_0 = 10$ рад/с показан на рис. 1 (линия *1*), а на рис. 2, *а* изображены квадратурные составляющие $h_x(t)$ и $h_y(t)$ импульсной характеристики фильтра.

2. *Комплексный режекторный фильтр на базе фильтра нижних частот Баттерворта второго порядка.*

Частотная ПФ и ее модуль рассматриваемого фильтра с учетом соотношения (1) могут быть записаны, соответственно, в виде [2, 3]

$$W(j\omega) = \frac{j(\omega-\omega_0)^2}{j(\omega-\omega_0)^2 + \sqrt{2}j\omega_{ср}(\omega-\omega_0) + \omega_{ср}^2};$$

$$W(\omega) = \frac{(\omega-\omega_0)^2}{\omega_{ср}^2} \Big/ \sqrt{1 + \frac{(\omega-\omega_0)^4}{\omega_{ср}^4}}. \qquad (7)$$

Модуль частотной ПФ $W(\omega)$ показан на рис. 1 (линия *2*) для случая, когда $\omega_{ср} = 1$ рад/с и $\omega_0 = -5$ рад/с.

Векторы коэффициентов фильтра представляются следующим образом:

$$a = [1\ 0\ 0];\ b = [1\quad \sqrt{2}\omega_{ср}\quad \omega_{ср}^2].$$

При этом программа расчетов полюсов функции (7) $\omega_0 = 0$ по заданным коэффициентам принимает вид

a = [1 0 0] % коэффициенты числителя (7)

b = [1 $\sqrt{2}\omega_{ср}$ $\omega_{ср}^2$] % коэффициенты знаменателя (7)

p = roots(b) % полюсы функции (7)

[r, p, k] = residue(a, b) % вычисление вычетов и вектора k

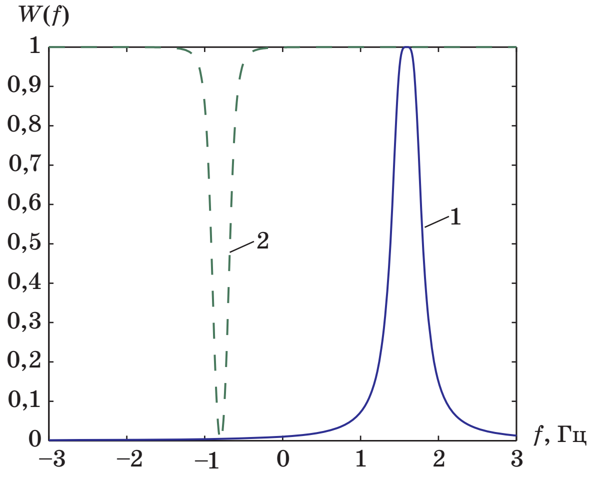
При выполнении данной программы получаются следующие результаты:

$$r_1 = -0{,}707107 + j0,\ p_1 = -0{,}7071070 + j0{,}707107;$$

$$r_2 = -0{,}707107 + j0,\ p_1 = -0{,}7071070 - j0{,}707107;\ k = 1.$$

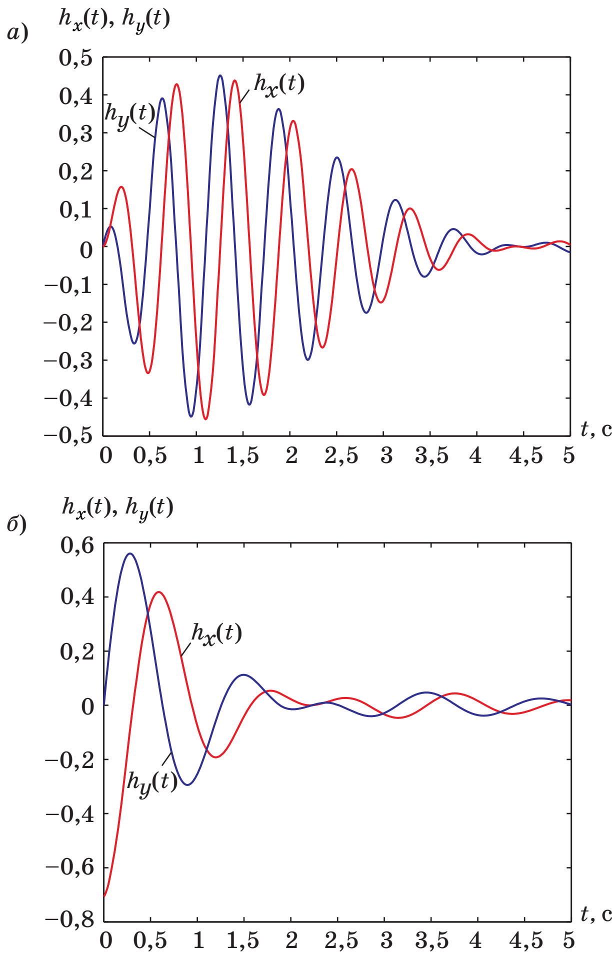
В итоге импульсная характеристика комплексного режекторного фильтра приобретает вид

$$h(t) = [r_1\exp(p_1 t) + r_2\exp(p_2 t)][\cos(\omega_0 t) + $$
$$+ j\sin(\omega_0 t)] + \delta[0].$$



■ *Рис. 1.* Амплитудно-частотные характеристики полосового 1 и режекторного 2 комплексных фильтров

■ *Fig. 1.* Amplitude-frequency characteristics of bandpass 1 and notch 2 complex filters



■ *Рис. 2.* Импульсные характеристики полосового (*а*) и режекторного (*б*) фильтра

■ *Fig. 2.* Pulse characteristics of the bandpass (*а*) and notch (*б*) filter

Для случая, когда $\omega_{ср} = 1$ рад/с и $\omega_0 = -5$ рад/с, на рис. 2, *б* представлены квадратурные составляющие импульсной характеристики фильтра за исключением δ-функции.

Заключение

Полученные теоретические результаты показывают, что импульсные характеристики как полосового, так и режекторного комплексных фильтров являются также комплексными и содержат вещественную и мнимую составляющие, сдвинутые по фазе на 90°. Для преобразования действительного фильтра в комплексный достаточно его импульсную характеристику умножить на комплексный сомножитель $[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)]$, где ω_0 — частота настройки фильтра. Рассмотренная в статье методика расчета импульсных характеристик может быть распространена на полосовые и режекторные комплексные фильтры практически любых порядков. Подобные фильтры могут быть использованы при построении когерентных доплеровских измерителей скорости и ускорения, систем селекции движущихся целей, радиовысотомеров и т. д.

Литература

1. Микропроцессорные системы автоматического управления/под общ. ред. В. А. Бесекерского. — Л.: Машиностроение, 1988. — 365 с.
2. **Воробьев С. Н.** Цифровая обработка сигналов. — М.: Академия, 2013. — 318 с.
3. **Гоноровский И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с.
4. **Зиатдинов С. И.** Импульсная характеристика комплексного полосового фильтра Баттерворта // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 8. С. 9–14.
5. **Кетков Ю., Кетков А., Шульц М.** MATLAB 6.x: программирование численных методов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 650 с.

UDC 621.396:681.323
doi:10.15217/issn1684-8853.2017.4.111

Impulse Characteristics of Complex Filters

Ziatdinov S. I.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, kaf53@guap.ru
Sokolova Y. V.[a], Master Student, kaf53@guap.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: When developing such information processing systems as Doppler measuring instruments for speed or acceleration, moving target selection systems, radio altimeters with frequency modulation of the bearing signal, or coordinated devices for detection and assessment of object parameters, the developers often use coherent methods of signal reception and analysis. In particular, they use complex filters with complex impulse characteristics which allow you to find output signals for any preset input signals by means of integral of imposing. **Purpose:** We need to develop a technique of synthesizing complex filters with preset frequency properties on the basis of complex impulse characteristics. **Results:** We have obtained expressions in general terms for quadrature components of impulse characteristics of both band and rejection complex filters. This allows you to find their output signals for the known input ones. The suggested theoretical statements are substantiated by concrete examples. **Practical relevance:** The use of complex filters in coherent systems of signal processing allows you to fully consider the temporal and spectral-correlation characteristics of the input signals and to considerably increase the efficiency of various radio-technical systems.
Keywords — Complex Filter, Frequency Transfer Function, Deductions, Poles, Complex Impulse Characteristic.

Reference

1. *Mikroprotsessornye sistemy avtomaticheskogo upravleniia* [Microprocessor-based Automatic Control Systems]. Ed. by V. A. Besekerskiy. Saint-Petersburg, Mashinostroenie Publ., 1988. 365 p. (In Russian).
2. Vorobyov S. N. *Tsifrovaia obrabotka signalov* [Digital Signal Processing]. Saint-Petersburg, Akademiia Publ., 2013. 318 p. (In Russian).
3. Gonorovsky I. S. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* [Radio Circuits and Signals]. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1986. 512 p. (In Russian).
4. Ziatdinov S. I. Impulse Response of a Complex Band-pass Butterworth Filter. *Izvestiia vuzov. Priborostroenie*, 2015, vol. 58, no. 8. pp. 9–14 (In Russian).
5. Ketkov Yu., Ketkov A., Shultz M. *MATLAB 6.x: programmirovanie chislennykh metodov* [Programming of Numerical Methods]. Saint-Petersburg, BKhV-Petersburg Publ., 2004. 650 p. (In Russian).