

СИНТЕЗ НЕРЕКУРСИВНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

С. И. Зиатдинов^а, доктор техн. наук, профессор

^аСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ

Введение: переход от непрерывных фильтров к нерекурсивным дискретным фильтрам с использованием отсчетов импульсных характеристик непрерывных фильтров-аналогов приводит к ошибкам в формировании переходных процессов. Вместе с тем динамические свойства фильтров в полном объеме определяются их переходными характеристиками. Синтез нерекурсивных дискретных фильтров на базе переходных характеристик позволяет обеспечить их динамические свойства, совпадающие с динамическими свойствами непрерывных фильтров. **Цель:** разработка методики синтеза нерекурсивных дискретных фильтров с использованием переходных характеристик. **Методы:** представление импульсной характеристики дискретного фильтра в виде первой конечной разности его переходной характеристики и нахождение с использованием интеграла наложения выходного сигнала. **Результаты:** получена новая методика синтеза нерекурсивного дискретного фильтра, позволяющая при заданном входном сигнале и известной переходной характеристике фильтра найти его выходной сигнал. Выдвинутые теоретические положения подтверждены конкретным примером. **Практическая значимость:** полученная методика позволяет при решении задач фильтрации сигналов в помехах и шумах использовать нерекурсивные дискретные фильтры, динамические свойства которых совпадают с динамическими свойствами непрерывных фильтров-аналогов.

Ключевые слова — частотная передаточная функция, импульсная и переходная характеристики, нерекурсивные дискретные фильтры, разностные уравнения, коэффициенты.

Введение

При обработке сигналов самое широкое распространение получили разнообразные фильтры, с помощью которых решаются задачи фильтрации, дифференцирования, интегрирования, экстраполяции и т. д. В каждом конкретном случае фильтр должен обладать определенными частотными свойствами.

В современных условиях все чаще приходится сталкиваться с цифровыми методами обработки на базе персональных компьютеров или специализированных вычислителей. При этом стоит задача преобразования непрерывных фильтров в дискретные. В настоящее время достаточно хорошо отработана методика синтеза дискретных фильтров по их непрерывным аналогам.

Можно выделить два основных метода синтеза: синтез дискретных фильтров в частотной области и синтез дискретных фильтров во временной области. При синтезе дискретных фильтров в частотной области [1] должны воспроизводиться амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики непрерывных фильтров с минимальными погрешностями. Преобразование частотной передаточной функции непрерывного фильтра в частотную передаточную функцию дискретного фильтра осуществляется на базе билинейного преобразования, которое используется для создания в основном фильтров верхних частот и режекторных фильтров.

В случае синтеза дискретных фильтров во временной области применяется метод инвариант-

ной импульсной характеристики, при котором отсчеты импульсной характеристики непрерывного фильтра используются для вычисления коэффициентов линейного разностного уравнения дискретного фильтра.

Для дискретных фильтров импульсная характеристика представляется последовательностью масштабированных отсчетов непрерывной импульсной характеристики $h(t)$ [2]:

$$h[i] = Th(t_i),$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$ — номер отсчета импульсной характеристики; T — период следования отсчетов входного и выходного сигналов дискретного фильтра; $t_i = iT$ — текущее дискретное время.

В результате алгоритм работы дискретного фильтра определяется дискретной сверткой отсчетов обрабатываемого сигнала $x(t)$ и импульсной характеристикой $h(t)$ фильтра [2, 3]

$$y[k] = \sum_{i=0}^k x[i]h[k-i], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Выходной сигнал дискретного фильтра в общем виде можно описать линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} y[k] &= a_0 x[k] + a_1 x[k-1] + \dots + a_n x[k-n] - \\ &- b_1 y[k-1] - b_2 y[k-2] - \dots - b_n y[k-n] = \\ &= \sum_{i=0}^n a_i x[k-i] - \sum_{i=1}^n b_i y[k-i], \end{aligned} \quad (1)$$

где n — порядок разностного уравнения; a_i, b_i — постоянные коэффициенты.

При этом синтез дискретного фильтра для заданного порядка n заключается в выборе постоянных коэффициентов a_i, b_i , которые определяют вид частотной характеристики фильтра.

На практике широко используются как нерекурсивные, так и рекурсивные дискретные фильтры.

Нерекурсивные дискретные фильтры

Для нерекурсивных дискретных фильтров разностное уравнение (1) записывается следующим образом:

$$y[k] = a_0 x[k] + a_1 x[k-1] + \dots + a_n x[k-n] = \sum_{i=0}^n a_i x[k-i]. \quad (2)$$

При этом порядок уравнения n рассчитывается так, чтобы произведение nT было больше длительности переходного процесса в фильтре $nT > t_n$, а коэффициенты a_i принимаются равными отсчетам импульсной характеристики $h[i]$:

$$a_0 = h[0], a_1 = h[1], \dots, a_n = h[n].$$

Тогда выражение (2) для выходного сигнала нерекурсивного дискретного фильтра принимает хорошо известный вид

$$y[k] = h[0]x[k] + h[1]x[k-1] + \dots + h[n]x[k-n] = \sum_{i=0}^n h[i]x[k-i]. \quad (3)$$

Покажем, что в общем случае данное соотношение является неверным, т. е. не отражает точно истинные физические процессы, протекающие в дискретном фильтре.

В качестве примера рассмотрим фильтр нижних частот (ФНЧ) первого порядка с частотной передаточной функцией в непрерывном варианте

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau},$$

где τ — постоянная времени фильтра.

Данной частотной передаточной функции соответствуют импульсная и переходная характеристики вида [1]

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + j\omega\tau} e^{j\omega t} d\omega = \omega_{cp} e^{-\omega_{cp} t};$$

$$g_H(t) = 1 - e^{-\omega_{cp} t}, \quad (4)$$

где $\omega_{cp} = \frac{1}{\tau}$ — частота среза фильтра.

В соответствии с (3) переходная характеристика рассматриваемого нерекурсивного дискретного фильтра, как его реакция на единичное

входное воздействие, записывается следующим образом:

$$g[k] = h[0]1[k] + h[1]1[k-1] + \dots + h[n]1[k-n] = \sum_{i=0}^n h[i]1[k-i], \quad (5)$$

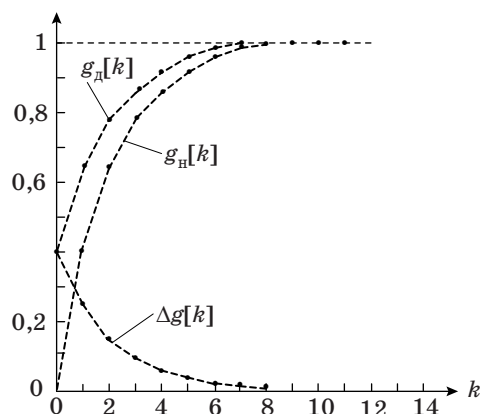
где $1[k]$ — единичный решетчатый входной сигнал.

Синтезированный нерекурсивный дискретный фильтр должен по своим параметрам соответствовать непрерывному фильтру, т. е. переходная характеристика дискретного фильтра (5) должна с точностью до постоянного множителя равняться переходной характеристике непрерывного фильтра (4) в дискретные моменты времени $t_i = iT$.

На рисунке показаны переходные характеристики рассматриваемого непрерывного ФНЧ $g_H[k]$ и нерекурсивного дискретного ФНЧ $g_D[k]$ для случая $T\omega_{cp} = 0,4$. Здесь же представлено отклонение переходных характеристик непрерывного и дискретного фильтров $\Delta g[k] = g_D[k] - g_H[k]$.

Анализируя представленные результаты расчетов, можно отметить, что для ФНЧ первого порядка на протяжении длительности переходного процесса $t_n \approx 8T$ отклонение переходной характеристики дискретного фильтра от переходной характеристики непрерывного фильтра изменяется от 40 % практически до нуля относительно установившегося значения $g_H[\infty] = 1$. Расчеты, проведенные для ФНЧ второго порядка, показывают, что указанное отклонение переходных характеристик составляет 10 %.

Таким образом, существующая методика определения коэффициентов разностного уравнения нерекурсивных дискретных фильтров на базе импульсной характеристики является неточной и в результате не обеспечивает требуемого качества работы дискретных фильтров в пределах переходного процесса.



■ Переходные характеристики ФНЧ и отклонение переходных характеристик

В полном объеме физические процессы, протекающие в фильтрах, описываются их переходными характеристиками. В связи с этим рассмотрим синтез нерекурсивных дискретных фильтров на базе их переходных характеристик.

В общем виде выходной сигнал нерекурсивного фильтра определяется интегралом наложения

$$y(t) = \int_0^t x(t - \tau)h(\tau)d\tau. \quad (6)$$

При этом импульсная характеристика фильтра $h(t)$ связана с его переходной характеристикой $g(t)$ соотношением

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (7)$$

После подстановки (7) в (6) получим

$$y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^t x(t - \tau) \frac{g(\tau) - g(\tau - \Delta t)}{\Delta t} d\tau. \quad (8)$$

Будем считать, что за время Δt не происходит заметных изменений переходной характеристики. Тогда, положив $\Delta t = T$ и заменяя интеграл в (8) суммой, получим

$$y(k) = \sum_{i=0}^n x[k-i] \{g[i] - g[i-1]\} = \sum_{i=0}^n x[k-i] \Delta g[i], \quad (9)$$

где $\Delta g[i] = g[i] - g[i-1]$; $g[i]$ — отсчеты переходной характеристики фильтра.

Для $k = 0, 1, 2, \dots$ на основании (9) можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0] \Delta g[0]; \\ y[1] &= x[1] \Delta g[0] + x[0] \Delta g[1]; \\ y[2] &= x[2] \Delta g[0] + x[1] \Delta g[1] + x[0] \Delta g[2]; \\ &\dots \\ y[k] &= x[k] \Delta g[0] + x[k-1] \Delta g[1] + \dots + x[0] \Delta g[k]. \end{aligned}$$

Представим данную систему в виде

$$\begin{aligned} y[0] &= a_0 x[0]; \\ y[1] &= a_0 x[1] + a_1 x[0]; \\ y[2] &= a_0 x[2] + a_1 x[1] + a_2 x[0]; \\ &\dots \\ y[k] &= a_0 x[k] + a_1 x[k-1] + \dots + a_k x[0], \end{aligned} \quad (10)$$

где коэффициенты $a_0 = \Delta g[0]$, $a_1 = \Delta g[1]$, ..., $a_k = \Delta g[k]$.

Расчет переходных характеристик нерекурсивных дискретных фильтров как нижних, так и верхних частот первого порядка с коэффициентами, вычисленными с использованием соотношений (10), показал совпадение с переходными характеристиками соответствующих непрерывных фильтров на всем протяжении переходных характеристик. Для фильтров более высоких порядков при $T\omega_{cp} = 0,4$ отклонение переходных характеристик непрерывных и дискретных фильтров не превышает десятых долей процентов и резко уменьшается с уменьшением произведения $T\omega_{cp}$.

Заключение

Известная методика расчетов коэффициентов разностного уравнения нерекурсивных дискретных фильтров на базе отсчетов импульсной характеристики не обеспечивает правильной реализации переходных процессов.

Методика расчетов коэффициентов с использованием отсчетов переходной характеристики позволяет получить динамические свойства нерекурсивных дискретных фильтров, совпадающие с динамическими свойствами непрерывных фильтров-аналогов как в переходном, так и в установившемся режимах.

Предложенная методика является общей и может быть распространена на нерекурсивные и рекурсивные дискретные фильтры как нижних, так и верхних частот практически любых порядков.

Литература

1. Воробьев С. Н. Цифровая обработка сигналов. — М.: Академия, 2013. — 318 с.
2. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Радио и связь, 1986. — 512 с.
3. Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer. Discrete-Time Signal Processing. — Prentice Hall, 1989. — 1120 p.

UDC 621.396:681.323

doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.98

Synthesis of Non-Recursive Discrete Filters in Temporal RangeZiatdinov S. I.^a, Dr. Sc., Tech., Professor, kaf53@guap.ru^aSaint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaja St., Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The transition from continuous filters to non-recursive discrete filters using the readings of impulsive characteristics of continuous filters-analogs leads to mistakes in forming transient processes. At the same time, the dynamic properties of the filters are fully determined by their transient characteristics. Synthesis of non-recursive discrete filters based on transient characteristics provides that their dynamic properties coincide with the dynamic properties of continuous filters. **Purpose:** The goal is to create a method for the synthesis of non-recursive discrete filters using transient characteristics. **Method:** We represent the impulsive characteristic of a discrete filter as the first final difference of its transient characteristic, and find the output signal using an imposition integral. **Results:** A new technique has been obtained for the synthesis of non-recursive discrete filter, which allows you to calculate the output signal of a filter when its input signal is given and the transient characteristic known. The theoretical results are substantiated by an example. **Practical relevance:** The obtained technique allows you to solve the problems of filtering signals in noises by using non-recursive discrete filters whose dynamic properties coincide with the dynamic properties of continuous filters-analogs.

Keywords — Frequency Transmission Function, Impulse and Transient Characteristic, Non-Recursive Discrete Filters, Difference Equation, Coefficients.

References

1. Vorobiev C. N. *Tsifrovaia obrabotka signalov* [Digital Signal Processing]. Moscow, Akademiia Publ., 2013. 318 p. (In Russian).

2. Gonorovskii I. S. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* [Radio Circuits and Signals]. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1986. 512 p. (In Russian).
3. Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processnig*. Prentice Hall, 1989. 1120 p.

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научная электронная библиотека (НЭБ) продолжает работу по реализации проекта SCIENCE INDEX. После того как Вы регистрируетесь на сайте НЭБ (<http://elibrary.ru/defaultx.asp>), будет создана Ваша личная страничка, содержание которой составят не только Ваши персональные данные, но и перечень всех Ваших печатных трудов, имеющих в базе данных НЭБ, включая диссертации, патенты и тезисы к конференциям, а также сравнительные индексы цитирования: РИНЦ (Российский индекс научного цитирования), h (индекс Хирша) от Web of Science и h от Scopus. После создания базового варианта Вашей персональной страницы Вы получите код доступа, который позволит Вам редактировать информацию, помогая создавать максимально объективную картину Вашей научной активности и цитирования Ваших трудов.