



## Улучшенная граница вероятности ошибки при оптимальном приеме в канале с межсимвольной интерференцией

А. Н. Трофимов<sup>а</sup>, канд. техн. наук, доцент, [orcid.org/0000-0003-1233-5222](https://orcid.org/0000-0003-1233-5222), [andrei.trofimov@k36.org](mailto:andrei.trofimov@k36.org)

Ф. А. Таубин<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0002-8781-9531](https://orcid.org/0000-0002-8781-9531)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

**Введение:** межсимвольная интерференция является одним из существенных факторов, определяющих помехоустойчивость и сложность реализации высокоскоростных систем передачи данных и систем хранения данных, использующих каналы записи с высокой плотностью. Традиционный анализ помехоустойчивости оптимального приемника для каналов с межсимвольной интерференцией базируется на применении аддитивной границы и границы Чернова и (или) ее модификаций, но точность границы Чернова во многих ситуациях оказывается неприемлемой. **Цель:** улучшить верхнюю границу вероятности ошибки посредством замены границы Чернова точным значением попарной вероятности ошибки, вычисляемым с использованием аппарата характеристических функций. **Результаты:** полученная в работе улучшенная верхняя граница вероятности ошибки для оптимального приемника в канале с межсимвольной интерференцией обеспечивает более высокую точность, чем предложенные ранее границы, обладая при этом вполне приемлемой сложностью вычисления. Как показывают численные примеры, выигрыш по точности может достигать одного порядка. Более того, имеется хорошее соответствие и даже практически полное совпадение результатов моделирования и улучшенной верхней границы. Это соответствие наблюдается в широком диапазоне значений отношения сигнал/шум, включая область малых значений отношения сигнал/шум, для которых известные границы оказываются очень грубыми. **Практическая значимость:** полученная в работе верхняя граница вероятности ошибки позволяет заметно улучшить обменные соотношения между отношением сигнал/шум и помехоустойчивостью для каналов с межсимвольной интерференцией и тем самым повысить надежность и адекватность технических решений, направленных на рациональный выбор между повышением скорости передачи (или плотности записи) и степенью влияния межсимвольной интерференции.

**Ключевые слова** – прием по максимуму правдоподобия, аддитивная граница вероятности ошибки, попарная вероятность ошибки, характеристическая функция, канал с межсимвольной интерференцией.

**Для цитирования:** Трофимов А. Н., Таубин Ф. А. Улучшенная граница вероятности ошибки при оптимальном приеме в канале с межсимвольной интерференцией. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 5, с. 33–42. doi:10.31799/1684-8853-2023-5-33-42, EDN: MDHOXU

**For citation:** Trofimov A. N., Taubin F. A. Improved bound on optimal reception error probability for an intersymbol interference channel. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 5, pp. 33–42 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-5-33-42, EDN: MDHOXU

### Введение

Межсимвольная интерференция (МСИ), возникающая вследствие присущему некоторым передающим средам и средам хранения данных рассеянию энергии передаваемого и (или) хранимого сигнала, является одним из важных факторов, определяющих помехоустойчивость и сложность реализации как высокоскоростных систем передачи данных, так и систем хранения с высокой плотностью данных. Среди систем передачи данных, для которых проблемы, связанные с анализом доминирующего влияния МСИ и методов ее компенсации, являются весьма значимыми, можно выделить три важных класса.

Во-первых, это беспроводные системы связи сантиметрового и миллиметрового диапазонов [1–6], а также системы связи видимого света, использующие видимый диапазон оптического из-

лучения (от 380 до 780 нм) в качестве среды передачи данных с помощью светодиодов (LED) [7–9]. В этих беспроводных системах МСИ порождает весьма существенной многолучевостью, на которую накладываются замирания и (или) доплеровское рассеяние передаваемых сигналов. Второй класс образуют волоконно-оптические системы связи. МСИ в волоконно-оптических системах возникает вследствие дисперсионных искажений оптического сигнала при распространении по волокну как диэлектрическому круглому волноводу оптического диапазона. При высокой скорости (порядка 40 Гбит/с и выше) МСИ сопровождается эффектом нелинейного распространения оптического сигнала, порождающего внутриканальную перекрестную фазовую модуляцию при мультиплексировании с разделением по длине волны [10–13]. В качестве третьего класса систем передачи, в которых влияние МСИ

относительно остальных искажений (например, теплового шума и (или) временного джиттера) на помехоустойчивость и сложность реализации является доминирующим, следует выделить повсеместно используемые проводные высокоскоростные соединительные устройства. Среди них можно назвать проводные сетевые подключения и объединительные платы при передаче 10-гигабитного Ethernet [14, 15] и шины, соединяющие между собой микросхемы [16], например 10-сантиметровый встроенный микрополосковый межблочный кабель, а также беспроводные шины [17]. Скорость передачи в таких соединительных устройствах находится в диапазоне от нескольких гигабит в секунду до нескольких десятков гигабит в секунду, что приводит к появлению весьма сильной МСИ с глубиной несколько десятков тактовых интервалов.

Существенное влияние МСИ в современных системах хранения данных в наибольшей степени характерно для систем записи на жесткие диски и перспективных голографических систем хранения данных. В жестких дисках данные хранятся в наногранулярной тонкой магнитной пленке, которая наносится напылением на обе стороны подложки диска. Как правило, один бит данных хранится в домене прямоугольной формы, содержащем 20–30 намагниченных гранул размером около 10 нм. Количество гранул в домене определяет уровень считываемого сигнала. Поскольку размер домена обычно меньше размера головки считывающего устройства, считываемый сигнал содержит информацию не только о считываемом бите, но и о соседних битах, что приводит к появлению МСИ.

Для достижения сверхвысокой плотности хранения данных — порядка нескольких терабит на квадратный дюйм — в современных жестких дисках используется несколько недавно разработанных передовых технологий, позволяющих повысить плотность записи. Среди них наиболее продвинутыми являются технология записи, основанная на битовых шаблонах [18, 19], и двумерная магнитная запись [20] в сочетании с технологией черепичной записи [21]. При использовании этих технологий вместо традиционной организации носителя в виде совокупности доменов, содержащих случайное количество гранул, носитель организован как упорядоченный массив изолированных магнитных островков с литографическим рисунком, каждый из которых хранит 1 бит. При повышении плотности записи, достигаемой за счет уменьшения расстояния между магнитными островками, появляется двумерная межсимвольная интерференция (2D МСИ) [20, 22].

Отметим, что, как правило, сложность реализации оптимальных схем вынесения решений при наличии двумерной межсимвольной интер-

ференции оказывается неприемлемо высокой. В этой связи был предложен ряд схем приема в канале с двумерной межсимвольной интерференцией, базирующихся на преобразовании каким-либо образом эффекта двумерной межсимвольной интерференции в некоторую подходящим образом подобранную классическую модель с *одномерной интерференцией*. Один из часто используемых подходов — отдельный учет интерференции по столбцам и строкам обрабатываемой двумерной матрицы выходного сигнала.

Классическая модель канала с одномерной МСИ включает линейный фильтр с постоянной во времени конечной импульсной характеристикой и аддитивный белый гауссов шум (АБГШ), действующий на выходе фильтра (см., например, [23–26]). Такая модель является достаточно адекватной для проводных высокоскоростных соединений и волоконно-оптических систем при умеренной скорости передачи, а также для беспроводных систем передачи со сравнительно медленно меняющимися параметрами канала, что позволяет использовать в приемнике текущие оценки меняющихся параметров канала.

Традиционный метод анализа помехоустойчивости оптимального приемника, реализующего алгоритм приема по максимуму правдоподобия (МП), в канале с МСИ состоит в использовании аддитивной границы [23–26]. При этом попарные вероятности ошибки оцениваются сверху посредством границы Чернова и (или) ее модификаций, точность которых во многих ситуациях оказывается недостаточной [24]. Предложенный в настоящей работе подход, состоящий в получении точного выражения для попарной вероятности ошибки применительно к каналу с МСИ, основан на использовании аппарата характеристических функций для логарифма отношения правдоподобия, что позволяет представить попарную вероятность ошибки в виде определенного интеграла. Применение аддитивной границы к этим интегральным выражениям и использование диаграммы состояний для ошибочных последовательностей позволяет получить итоговое выражение для границы вероятности ошибки, значение которого удается вычислить путем одномерного численного интегрирования с требуемой точностью.

## Модель и обозначения

В настоящей работе рассматривается классическая стандартная модель канала с постоянной во времени линейной МСИ [23–26], который определяется некоторым линейным фильтром с импульсной переходной характеристикой  $g(t)$ . Предполагается, что передача ведется с использованием двоичных

противоположных сигналов  $s_0(t) = s(t)$  и  $s_1(t) = -s(t)$ , где  $s(t)$  — сигнальная функция, заданная на интервале  $[0, T]$  и тождественно равная нулю вне этого интервала. Последовательность сигналов на входе канала имеет вид

$$s(t, \mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{N-1} x^{(l)} s(t - lT), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(L)}, \dots, x^{(N-1)})$ ,  $x^{(l)} = \pm 1$  — информационная последовательность независимых случайных величин, равновероятно принимающих значения  $\pm 1$ . Кроме того, предполагается, что  $x^{(l)} = 0$  при  $l < 0$ . На выходе канала наблюдается выходной сигнал  $y(t) = s(t, \mathbf{x}) * g(t) + n(t)$ , где  $n(t)$  — АБГШ со спектральной плотностью мощности  $N_0/2$ ;  $*$  — обозначение операции интегральной свертки. С использованием равенства (1) можно записать

$$y(t) = \left( \sum_{l=0}^{N-1} x^{(l)} s(t - lT) \right) * g(t) + n(t) = \sum_{l=0}^{N-1} x^{(l)} s(t - lT) * g(t) + n(t) = \sum_{l=0}^{N-1} x^{(l)} h(t - lT) + n(t),$$

где  $h(t) = s(t) * g(t)$ . Далее будем полагать, что функция  $h(t)$  имеет эффективную длительность  $LT$ , где  $L$  — целое число, т. е.  $h(t) = 0$  или близка к нулю с достаточной точностью при  $t \geq L$ . Заметим, что случай  $L = 1$  означает отсутствие межсимвольной интерференции, поэтому далее всюду рассматривается случай  $L \geq 2$ .

Обозначим сигнальную последовательность на выходе фильтра канала как

$$v(t, \mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{N-1} x^{(l)} h(t - lT). \quad (2)$$

Тогда выходной сигнал канала с МСИ может быть представлен как

$$y(t) = v(t, \mathbf{x}) + n(t). \quad (3)$$

Каждая сигнальная последовательность  $v(t, \mathbf{x})$  однозначно определяется информационной последовательностью  $\mathbf{x}$ . Поэтому множество всех возможных сигналов  $v(t, \mathbf{x})$  конечно и содержит  $2^N$  элементов. Для этого множества существует ортонормированный функциональный базис размерности  $D \leq 2^N$ . Следовательно, для равенства (3) существует  $D$ -мерное представление

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — гауссов случайный  $D$ -мерный вектор с независимыми компонентами. Тогда оптималь-

ное решающее правило, или правило МП, может быть представлено как

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \{+1, -1\}^N} p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x})), \quad (4)$$

где

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \right)^D \exp \left( -\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{v}(\mathbf{x})\|^2}{N_0} \right). \quad (5)$$

Оптимальное решающее правило (4) может быть [26] переформулировано как

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \{+1, -1\}^N} \sum_{k=0}^{N-1} m_d(r^{(k)}; x^{(k)}, x^{(k-1)}, \dots, x^{(k-L+1)}), \quad (6)$$

где  $r^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) h(t - kT) dt$ , а

$$m_d(r^{(k)}; x^{(k)}, x^{(k-1)}, \dots, x^{(k-L+1)}) = 2r^{(k)} x^{(k)} - (x^{(k)})^2 h_0 - 2x^{(k)} \sum_{i=1}^{L-1} h_i x^{(k-i)}$$

и

$$h_i = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h(t - iT) dt. \quad (7)$$

Заметим, что  $h_i = 0$  при  $i \geq L$ . На практике оптимальное решающее правило (6) обычно реализуется в виде алгоритма Витерби на решетке с  $2^{L-1}$  состояниями.

### Точная аддитивная граница вероятности ошибки

Для рассматриваемой модели передачи попарная вероятность ошибки представляет собой вероятность того, что для пары информационных последовательностей значение правдоподобия для переданной последовательности меньше, чем для иной (неправильной) последовательности. Традиционный подход состоит в том, что вероятность ошибки для двух последовательностей обычно оценивается сверху, а затем эти оценки для всех возможных попарных вероятностей суммируются и дают окончательный результат для аддитивной границы в замкнутой форме. В настоящей работе представлен метод *точного* вычисления аддитивной границы вероятности ошибки для оптимального приема в канале с МСИ. Техника получения границы основана на построении *точного* вы-

ражения для попарной вероятности ошибки с использованием характеристических функций логарифмов отношений правдоподобия, которое имеет вид определенного интеграла. Эти интегральные выражения далее используются в качестве слагаемых в аддитивной границе. Использование диаграммы состояний для ошибочных последовательностей позволяет получить итоговое выражение, значение которого удается определить численным интегрированием с желаемой точностью.

Рассмотрим передачу одной из двух информационных последовательностей  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$ . Пусть  $\Pr[\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}]$  – вероятность решения в пользу последовательности  $\mathbf{x}'$  при условии передачи последовательности  $\mathbf{x}$ , т. е. попарная вероятность ошибки. Тогда при условии, что решение принимается по МП (4), можно записать

$$\begin{aligned} \Pr[\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}] &= \Pr\left[\frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x}'))}{p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x}))} > 1 \mid \mathbf{x}\right] = \\ &= \Pr\left[\ln \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x}'))}{p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x}))} > 0 \mid \mathbf{x}\right]. \end{aligned}$$

С использованием результатов [27, 28] можно получить

$$\begin{aligned} \Pr[\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}] &= \Pr\left[\frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x}'))}{p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x}))} > 1 \mid \mathbf{x}\right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{C(\alpha - j\beta; \mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\beta + j\alpha} d\alpha, \end{aligned} \quad (8)^1$$

где  $C(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}')$  – характеристическая функция случайной величины  $z(\mathbf{y}; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \ln(p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x}')) / p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x})))$ , т. е.

$$\begin{aligned} C(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \overline{e^{j\omega z(\mathbf{y}; \mathbf{x}, \mathbf{x}')}} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x}))^{j\omega} p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x}'))^{1-j\omega} d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

где черта сверху означает усреднение по вектору  $\mathbf{y}$ , распределенному в соответствии с функцией плотности вероятности  $p(\mathbf{y} | \mathbf{v}(\mathbf{x}))$ . Используя выражение (5), можно показать, что

$$C(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{j\omega(1-j\omega)\|\mathbf{v}(\mathbf{x}') - \mathbf{v}(\mathbf{x})\|^2}{N_0}\right). \quad (9)$$

Рассмотрим далее выражение  $\|\mathbf{v}(\mathbf{x}') - \mathbf{v}(\mathbf{x})\|^2$ . С учетом равенства (2) можно показать, что

<sup>1</sup> Выражение (8) справедливо в рассматриваемом случае для любых значений свободного параметра  $\beta > 0$ ; для практических вычислений удобным оказывается значение  $\beta = 1/2$  [27, 28].

$$\|\mathbf{v}(\mathbf{x}') - \mathbf{v}(\mathbf{x})\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (v(t, \mathbf{x}') - v(t, \mathbf{x}))^2 dt = \mathbf{e}\mathbf{H}\mathbf{e}^T,$$

где  $\mathbf{e} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ ;  $\mathbf{H} = [H_{ik}]$  – квадратная матрица порядка  $N$ ,  $H_{ik} = h_{|i-k|}$ ,  $i, k = 0, 1, \dots, N-1$ , а величины  $h_i$  определены равенством (7). Поэтому можно записать

$$C(\omega; \mathbf{x}, \mathbf{x}') = C(\omega; \mathbf{e}), \quad (10)$$

где

$$C(\omega; \mathbf{e}) = \exp\left(-\frac{j\omega(1-j\omega)\mathbf{e}\mathbf{H}\mathbf{e}^T}{N_0}\right), \quad (11)$$

а также  $\Pr[\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}] = \Pr[\mathbf{0}_N \rightarrow \mathbf{e} | \mathbf{0}_N]$ , где  $\mathbf{0}_N$  – нулевая последовательность длины  $N$ . Это равенство означает, что для вычисления попарной вероятности ошибки вместо последовательностей *реальных* информационных последовательностей  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \{+1, -1\}^N$  на входе канала можно рассматривать *виртуальные* последовательности  $\mathbf{0}_N$  и  $\mathbf{e} \in \{-2, 0, +2\}^N$ . Обозначим далее  $P(\mathbf{e}) = \Pr[\mathbf{0}_N \rightarrow \mathbf{e} | \mathbf{0}_N]$ . Используя равенства (8), (9) и (11), получаем

$$P(\mathbf{e}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{C(\alpha - j\beta; \mathbf{e})}{\beta + j\alpha} d\alpha. \quad (12)$$

Далее будем использовать обозначение  $\mathbf{e}_p^q = (e^{(p)}, e^{(p+1)}, \dots, e^{(q-1)}, e^{(q)})$  для указания сегмента последовательности  $\mathbf{e}$ ,  $p, q = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $q \geq p$ . Рассмотрим выражение  $\mathbf{e}\mathbf{H}\mathbf{e}^T$  в показателе экспоненты в правой части (11). Поскольку  $h_i = 0$  при  $i \geq L$ , то матрица  $\mathbf{H} = [H_{ik}] = h_{|i-k|}$ ,  $i, k = 0, 1, \dots, N-1$ , имеет полосовую структуру. С учетом этого можно показать, что  $\mathbf{e}\mathbf{H}\mathbf{e}^T = \sum_{k=0}^{N-1} m(\mathbf{e}_{k-L+1}^k)$ , а слагаемые в этой сумме вычисляются как

$$\begin{aligned} m(\mathbf{e}_{k-L+1}^k) &= m(e^{(k-L+1)}, e^{(k-L+2)}, \dots, e^{(k-1)}, e^{(k)}) = \\ &= (e^{(k)})^2 h_0 - 2e^{(k)} \sum_{i=1}^{L-1} h_i e^{(k-i)}, \end{aligned} \quad (13)$$

и по определению  $e^{(i)} = 0$  при  $i < 0$ . Поэтому равенство (11) может быть представлено как

$$\begin{aligned} C(\omega; \mathbf{e}) &= \exp\left(-\frac{j\omega(1-j\omega) \sum_{k=0}^{N-1} m(\mathbf{e}_{k-L+1}^k)}{N_0}\right) = \\ &= \prod_{k=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{j\omega(1-j\omega)m(\mathbf{e}_{k-L+1}^k)}{N_0}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

В общем виде функция  $m(\cdot)$  из равенства (13) определяется для аргумента  $\mathbf{u} = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(L)}) \in \{-2, 0, +2\}^L$  следующим образом:

$$m(\mathbf{u}) = m(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(L-1)}, u^{(L)}) = (u^{(L)})^2 h_0 - 2u^{(L)} \sum_{i=1}^{L-1} h_i u^{(L-i)}. \quad (15)$$

Рассмотрим сегмент  $\mathbf{e}_{k-L+1}^k = (e^{(k-L+1)}, \dots, e^{(k-1)}, e^{(k)})$  длиной  $L$  и два его (перекрывающихся при  $L > 2$ ) сегмента  $\mathbf{e}_{k-L+1}^{k-1} = (e^{(k-L+1)}, \dots, e^{(k-1)}, e^{(k-1)})$  и  $\mathbf{e}_{k-L+2}^k = (e^{(k-L+2)}, \dots, e^{(k-1)}, e^{(k)})$  длиной  $L-1$ . Очевидно, что имеется однозначное соответствие между вектором  $\mathbf{e}_{k-L+1}^k$  и парой векторов  $(\mathbf{e}_{k-L+1}^{k-1}, \mathbf{e}_{k-L+2}^k)$ . Определим векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{-2, 0, +2\}^{L-1}$  и назовем их состояниями. Назовем состояния  $\mathbf{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(L-1)})$  и  $\mathbf{b} = (b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(L-1)})$  смежными, если  $\mathbf{a}_2^{L-1} = \mathbf{b}_1^{L-2}$ , и будем обозначать это свойство как  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ . Определим функцию  $c(\omega; \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , где  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{-2, 0, +2\}^{L-1}$ , как

$$c(\omega; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{j\omega(1-j\omega)m(\mathbf{e})}{N_0}\right), & \text{если } \mathbf{a} \mapsto \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{e} = (\mathbf{a}, b^{(L-1)}) = (a^{(1)}, \mathbf{b}); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (16)$$

Поясним это определение примером. Пусть  $L = 4$ ,  $\mathbf{a} = (2, 0, -2)$ ,  $\mathbf{b} = (0, -2, 2)$ . В этом случае  $\mathbf{a}_2^{L-1} = \mathbf{a}_2^3 = (0, -2)$ ,  $\mathbf{b}_1^{L-2} = \mathbf{b}_1^2 = (0, -2)$ , т. е.  $(2, 0, -2) \mapsto (0, -2, 2)$ , так как выполняется условие  $\mathbf{a}_2^{L-1} = \mathbf{b}_1^{L-2}$ . Это значит, что  $c(\omega; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \exp(-j\omega(1-j\omega)m(\mathbf{e})/N_0)$ , где  $\mathbf{e} = (\mathbf{a}, b^{(3)}) = (a^{(1)}, \mathbf{b}) = (2, 0, -2, 2)$ . Если же, например,  $\mathbf{a} = (2, 0, -2)$ , но  $\mathbf{b} = (0, 0, 2)$ , то  $\mathbf{a}_2^{L-1} \neq \mathbf{b}_1^{L-2}$ , т. е. эти состояния не смежные, и тогда  $c(\omega; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ .

Тогда равенство (14) можно переписать в виде  $C(\omega; \mathbf{e}) = \prod_{k=1}^{N-1} c(\omega; \mathbf{e}_{k-L+1}^{k-1}, \mathbf{e}_{k-L+2}^k)$ , и вероятность (12) с учетом этого выражения и формулы (10) может быть представлена как

$$P(\mathbf{e}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{\prod_{k=1}^{N-1} c(\alpha - j\beta; \mathbf{e}_{k-L+1}^{k-1}, \mathbf{e}_{k-L+2}^k)}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad (17)$$

где функция  $c(\omega; \cdot, \cdot)$  определена формулой (16). Заметим, что последовательность  $\mathbf{e} = (e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(k)}, \dots, e^{(N-1)})$  взаимно однозначно связана с последовательностью смежных состояний  $\mathbf{e}_{2-L}^0 \mapsto \mathbf{e}_{3-L}^1 \mapsto \mathbf{e}_{4-L}^2 \mapsto \dots \mapsto \mathbf{e}_{k-L+2}^k \mapsto \mathbf{e}_{k-L+1}^{k-1} \mapsto \dots \mapsto \mathbf{e}_{N+1-L}^{N-1}$ . Пусть  $E_l$  – множество последовательностей  $\mathbf{e}$  длиной  $l$ , которой соответствует последовательность смежных состояний  $\mathbf{e}_{2-L}^0 \mapsto \mathbf{e}_{3-L}^1 \mapsto \mathbf{e}_{4-L}^2 \mapsto \dots \mapsto \mathbf{e}_{k-L+2}^k \mapsto \mathbf{e}_{k-L+1}^{k-1} \mapsto \dots \mapsto \mathbf{e}_{l+1-L}^{l-1}$  такая, что  $\mathbf{e}_{2-L}^0 = \mathbf{e}_{l+1-L}^{l-1} = \mathbf{0}_{L-1}$ , а все остальные сегменты  $\mathbf{e}_{k-L+2}^k \neq \mathbf{0}_{L-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, l-2$ . Вероятность ошибочного события  $P_e$  и вероятность ошибки на бит  $P_b$  при оптимальном приеме последовательности на выходе канала с МСИ оценивается сверху следующим образом [24, 26]:

$$P_e \leq \sum_{l=0}^N \sum_{\mathbf{e} \in E_l} 2^{-w(\mathbf{e})} P(\mathbf{e}) < \sum_{l=0}^\infty \sum_{\mathbf{e} \in E_l} 2^{-w(\mathbf{e})} P(\mathbf{e}); \quad (18)$$

$$P_b \leq \sum_{l=0}^N \sum_{\mathbf{e} \in E_l} w(\mathbf{e}) 2^{-w(\mathbf{e})} P(\mathbf{e}) < \sum_{l=0}^\infty \sum_{\mathbf{e} \in E_l} w(\mathbf{e}) 2^{-w(\mathbf{e})} P(\mathbf{e}), \quad (19)$$

где  $w(\cdot)$  – обозначение веса Хэмминга. Для вычисления значений границ (18) и (19) введем функцию  $F(Y)$  следующего вида:

$$F(Y) = \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^\infty \sum_{\mathbf{e} \in E_l} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{\prod_{k=1}^{l-1} c(\alpha - j\beta; \mathbf{e}_{k-L+1}^{k-1}, \mathbf{e}_{k-L+2}^k) Y^{w(\mathbf{e}^{(k)})}}{\beta + j\alpha} d\alpha = \quad (20)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{\sum_{l=1}^\infty \sum_{\mathbf{e} \in E_l} \prod_{k=1}^{l-1} c(\alpha - j\beta; \mathbf{e}_{k-L+1}^{k-1}, \mathbf{e}_{k-L+2}^k) Y^{w(\mathbf{e}^{(k)})}}{\beta + j\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{D(\alpha - j\beta, Y)}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad (21)$$

где

$$D(\omega, Y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{e} \in E_l} \prod_{k=1}^{l-1} c(\omega; \mathbf{e}_{k-L+1}^{k-1}, \mathbf{e}_{k-L+2}^k) Y^{w(\mathbf{e}^{(k)})}.$$

Тогда с учетом равенств (17), (20) и (21) можно записать, что границы (18) и (19) принимают вид

$$P_e \leq F(Y)|_{Y=1/2}; \quad (22)$$

$$P_b \leq \frac{1}{2} \frac{dF(Y)}{dY} \Big|_{Y=1/2}. \quad (23)$$

Пусть  $i(\mathbf{a})$  – индекс вектора  $\mathbf{a}$  в множестве некоторым образом упорядоченных векторов  $\mathbf{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(L-1)})$ ,  $a^{(k)} \in \{-2, 0, +2\}$ , при этом положим, что  $i(\mathbf{0}_{L-1}) = 0$ . Ясно, что  $0 \leq i(\mathbf{a}) \leq 3^{L-1} - 1$ . Определим величины  $A_{i(\mathbf{a}), i(\mathbf{b})}(\omega, Y) = c(\omega; \mathbf{a}, \mathbf{b}) Y^{w(\mathbf{b}^{(L-1)})}$ , где функция  $c(\omega; \mathbf{a}, \mathbf{b})$  задана равенством (16), и построим матрицу  $3^{L-1} \times 3^{L-1}$  вида  $\mathbf{A}(\omega, Y) = [A_{pq}(\omega, Y)]$ ,  $p, q = 0, 1, \dots, 3^{L-1} - 1$ , и представим ее следующим образом:

$$\mathbf{A}(\omega, Y) = [A_{pq}(\omega, Y)] = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{P}_1(\omega, Y) \\ \mathbf{P}_2(\omega, Y) & \mathbf{P}(\omega, Y) \end{bmatrix}.$$

Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} D(\omega, Y) &= \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{P}_1(\omega, Y) \mathbf{P}(\omega, Y)^{l-1} \mathbf{P}_2(\omega, Y) = \\ &= \mathbf{P}_1(\omega, Y) (\mathbf{I} - \mathbf{P}(\omega, Y))^{-1} \mathbf{P}_2(\omega, Y), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица порядка  $3^{L-1} - 1$ . Подстановка этого выражения в (21) и далее в (22) и (23) дает окончательный ответ. Некоторую сложность представляет нахождение значения производной  $dF(Y)/dY|_{Y=1/2}$ , которое требуется для вычисления границы для  $P_b$  (23). Ясно, что

$$\frac{dF(Y)}{dY} \Big|_{Y=1/2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{D'(\alpha - j\beta, Y) \Big|_{Y=1/2}}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad (25)$$

где  $D'(\omega, Y) = dD(\omega, Y)/dY$ . Выражение для  $D'(\omega, Y)$  может быть найдено исходя из выражения (24) в следующем замкнутом виде:

$$\begin{aligned} D'(\omega, Y) &= \mathbf{P}'_1(\omega, Y) (\mathbf{I} - \mathbf{P}(\omega, Y))^{-1} \mathbf{P}_2(\omega, Y) + \\ &+ \mathbf{P}_1(\omega, Y) (\mathbf{I} - \mathbf{P}(\omega, Y))^{-1} \mathbf{P}'_2(\omega, Y) + \\ &+ \mathbf{P}_1(\omega, Y) (\mathbf{I} - \mathbf{P}(\omega, Y))^{-1} \mathbf{P}'(\omega, Y) \times \\ &\times (\mathbf{I} - \mathbf{P}(\omega, Y))^{-1} \mathbf{P}_2(\omega, Y), \end{aligned} \quad (26)$$

где штрих обозначает производную каждого элемента матрицы по переменной  $Y$ . Однако следует отметить, что вычисление значения  $D'(\omega, Y)|_{Y=1/2}$

для каждого значения аргумента  $\omega = \alpha - j\beta$  хотя и дает точный ответ для использования в дальнейшем численном интегрировании по переменной  $\alpha$  (25), но может быть признано не очень практичным. Более приемлемым с точки зрения удобства численных вычислений может оказаться приближенная формула

$$\begin{aligned} \frac{dF(Y)}{dY} \Big|_{Y=1/2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(1/2 + \varepsilon) - F(1/2)}{\varepsilon} \approx \\ &\approx \frac{F(1/2 + \varepsilon) - F(1/2)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1. \end{aligned}$$

Применение этого приближения в выражении (23) обеспечивает при подходящем выборе значения  $\varepsilon$  приемлемую точность вычисления границы для вероятности ошибки на бит  $P_b$ . Вычисления при этом выполняются значительно быстрее, чем при получении точных значений  $D'(\omega, Y)|_{Y=1/2}$  по формуле (26).

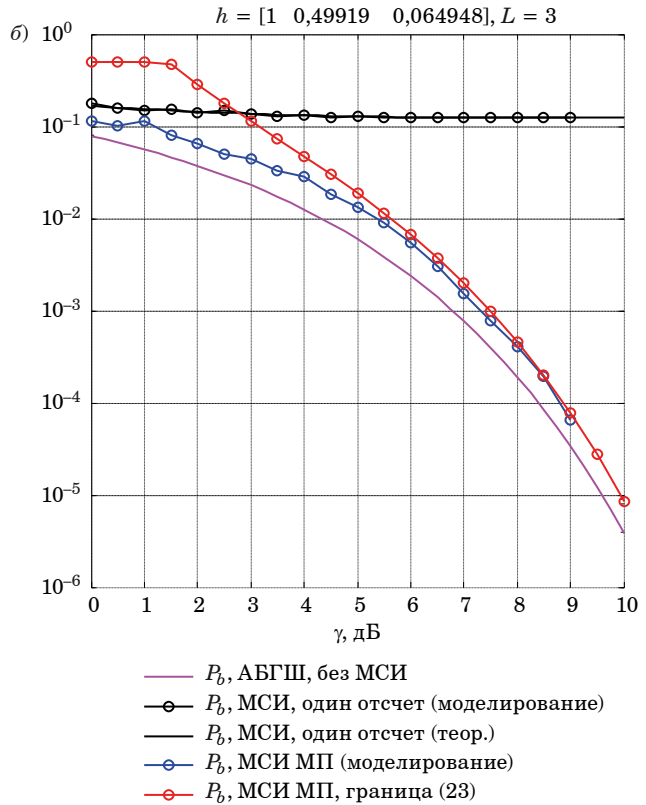
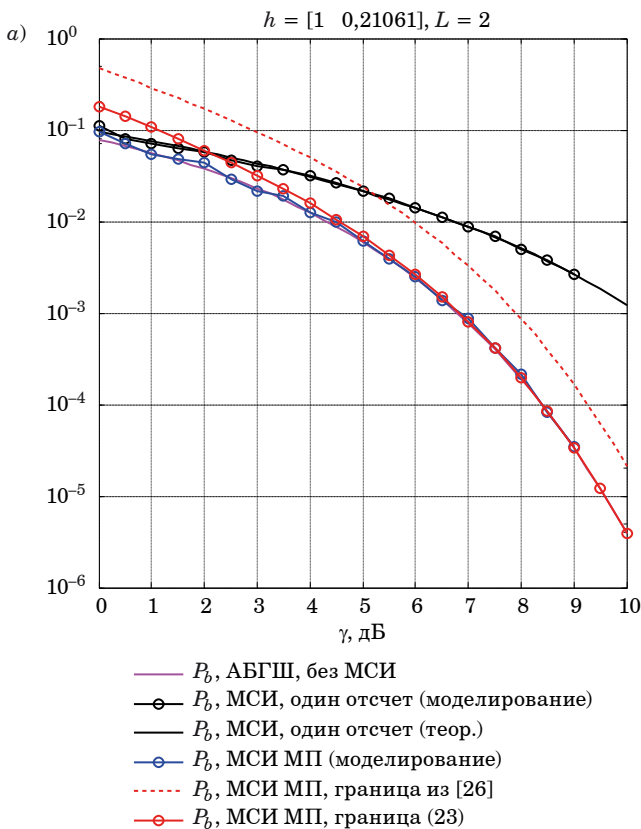
### Примеры

Для иллюстрации возможностей представленного подхода к оценке вероятности ошибки рассмотрим простые численные примеры. Предположим, что сигнальная функция  $s(t) = 1$  при  $0 < t < T$  и равна нулю при других значениях аргумента  $t$ . Пусть импульсная переходная характеристика фильтра канала задается равенством  $g(t) = Kte^{-at^2}$ ,  $t \geq 0$ , где параметр  $a$  определяет глубину межсимвольной интерференции,  $a > 0$ . Нормирующий коэффициент  $K$  выбирается так, чтобы выполнялось условие  $\|h(t)\|^2 = 1$ , где  $h(t) = s(t) * g(t)$  – отклик фильтра канала на сигнальную функцию  $s(t)$ . Отношение сигнал/шум на входе оптимального приемника  $\gamma = \bar{E} / N_0$ , где  $\bar{E}$  – средняя энергия выходной последовательности фильтра канала  $v(t; \mathbf{x})$ , заданной равенством (2):

$$\bar{E} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \overline{\|v(t; \mathbf{x})\|^2},$$

где черта сверху означает усреднение по всем последовательностям  $\mathbf{x}$ . Полагая элементы последовательности  $\mathbf{x}$  независимыми случайными величинами, равновероятно принимающими значения  $\pm 1$ , и учитывая принятую нормировку, нетрудно показать, что  $\bar{E} = \|h(t)\|^2 = h_0 = 1$ .

Результаты вычислений и моделирования для значений  $T = 1$ ,  $a = 3$ , при которых  $L = 2$ ,  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = 0,210$ , представлены на рисунке, а. Наблюдается очень хорошее соответствие верхней границы для вероятности  $P_b$  (красная линия) и результатов моделирования (синяя линия). Для



- Результаты вычислений и моделирования для примера 1 (а) и примера 2 (б)
- Calculation and simulation results for the example 1 (а) and example 2 (б)

сравнения приведена зависимость классической границы вероятности  $P_b$  [26] для примера с  $L = 2$  (красная пунктирная линия). Из данных на рисунке следует, что эта граница дает значения, завышенные примерно на порядок по сравнению с границей, предложенной в настоящей работе. Кроме того, показаны зависимости вероятности ошибки на бит при передаче противоположных сигналов по каналу с АБГШ без интерференции (фиолетовая линия), а также результаты, достигаемые при неоптимальном приеме сигналов в канале с МСИ, когда решение строится по одному отсчету на выходе согласованного фильтра (черные линии).

Аналогичные результаты для примера с  $T = 1$ ,  $a = 0,75$ , при которых  $L = 3$ ,  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = 0,499$ ,  $h_2 = 0,065$ , показаны на рисунке, б. Здесь так же, как и на рисунке, а, наблюдается хорошее соответствие результатов моделирования и представленной в настоящей работе границы. Кроме того, стоит отметить, что оптимальный прием почти полностью компенсирует негативное влияние МСИ (энергетический проигрыш при  $P_b$  порядка  $10^{-5}$  и менее составляет доли децибел), в то время как простой прием по одному отсчету делает передачу невозможной (черные линии).

### Заключение

В настоящей работе представлена улучшенная граница вероятности ошибки, возникающей при передаче по каналу с линейной МСИ. МСИ является одним из основных факторов, определяющих помехоустойчивость и сложность реализации современных и перспективных систем хранения данных, а также высокоскоростных систем передачи. Известные верхние границы вероятности ошибки для оптимального приемника в канале с МСИ базируются на использовании границы Чернова и (или) ее модификаций, точность которых во многих ситуациях оказывается неприемлемой. Представленная улучшенная граница получена на основе подхода, ранее предложенного авторами для анализа схем помехоустойчивого кодирования в ряде каналов [27, 28]. Как показывают численные примеры, представленная верхняя граница является существенно более точной по сравнению с известными границами: выигрыш по точности может достигать одного порядка. Косвенным свидетельством исключительно высокой точности предложенной верхней границы может служить практически полное совпадение результатов моделирования и улучшенной

верхней границы в широком диапазоне значений отношения сигнал/шум, включая область очень малых значений, для которой известные границы оказываются очень грубыми. В прикладном плане полученная в работе уточненная верхняя граница вероятности ошибки позволяет заметно улучшить обменные соотношения между отношением сигнал/шум и помехоустойчивостью для каналов с МСИ и тем самым повысить надежность и адекватность технических решений, направленных на рациональный выбор между повышением скорости передачи (или плотности записи) и степенью влияния межсимвольной интерференции.

Заметим также, что представленный подход может быть распространен и на более общие модели канала, чем рассмотренная в данной работе модель канала с линейной МСИ. В качестве одного естественного обобщения следует отметить кодированную передачу в канале с МСИ, улучшенный анализ помехоустойчивости которой может быть выполнен комбинированием результатов, полученных в данной работе и работе [28]. Другой важный сценарий обобщения — каналы с неортогональным множественным доступом, широко используемые в системах связи пятого поколения 5G.

## Литература

1. **Molisch A. F.** *Wireless Communications: From Fundamentals to Beyond 5G*. 3rd ed. Wiley-IEEE Press, 2022. 1008 p.
2. **Rappaport T., Remley K., Gentile C., Molisch A., Zajić A.** (Eds.) *Radio Propagation Measurements and Channel Modeling: Best Practices for Millimeter-Wave and Sub-Terahertz Frequencies*. Cambridge University Press, 2022. 288 p. doi:10.1017/9781009122740
3. **Zhang H. S., Wang Y., Zhang J., Ren J., Zhang J., Zhuang Y., Shen X.** A survey of millimeter-wave communication: Physical-layer technology specifications and enabling transmission technologies. *Proc. of the IEEE*, 2021, no. 109, pp. 1666–1705. doi:10.1109/JPROC.2021.3107494
4. **Huang J., Liu Y., Wang C., Sun J., Xiao H.** 5G millimeter-wave channel sounders, measurements, and models: Recent developments and future challenges. *IEEE Communications Magazine*, 2019, vol. 57, no. 1, pp. 138–145. doi:10.1109/MCOM.2018.1701263
5. **Hemadneh I. A., Satyanarayana K., El-Hajjar M., Hanzo L. H.** Millimeter-wave communications: Physical channel models, design considerations, antenna constructions, and link-budget. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2018, no. 20, pp. 870–913. doi:10.1109/COMST.2017.2783541
6. **Rappaport T. S., Xing Y., Kanhere O., Ju S., Madanayake A., Mandal S., Alkhateeb A., Trichopoulos G. S.** Wireless communications and applications above 100 GHz: Opportunities and challenges for 6G and beyond. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 78729–78757. doi:10.1109/ACCESS.2019.2921522
7. **Al-Ahmadi S., Maraqa O., Uysal M., Sait S. M.** Multi-user visible light communications: State-of-the-art and future directions. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 70555–70571. doi:10.1109/ACCESS.2018.2879885
8. **Vijayalakshmi A., Gandhimathi P., Nesusudha M.** VLC channel characteristics and data transmission model in indoor environment for future communication: An overview. *Journal of Optics*, 2023. https://doi.org/10.1007/s12596-023-01316-5
9. **Loureiro P., Guiomar F., Monteiro P.** Visible light communications: A survey on recent high-capacity demonstrations and digital modulation techniques. *Photonics*, 2023, vol. 10, iss. 9, p. 993. https://doi.org/10.3390/photonics10090993
10. **Golani O., Elson D., Lavery D., Galdino L., Killey R., Bayvel P., Shtaif M.** Experimental characterization of nonlinear interference noise as a process of inter-symbol interference. *Opt. Lett.*, 2018, vol. 43, no. 5, pp. 1123–1126. doi:10.1364/OL.43.001123
11. **Stewart J.** Performance evaluation of various modulation formats in a 40 Gbps hybrid optical CDMA/DWDM system against ISI and FWM. *J Mod. Appl. Phys.*, 2022, vol. 5, no. 4, pp. 01-02.
12. **Alsowaidi N., Eltaif T., Mokhtar M. R.** Performance comparison of different modulation formats for a 40 Gbps hybrid optical CDMA/DWDM system against ISI and FWM. *Photonics*, 2022, vol. 9, no. 8, p. 555. https://doi.org/10.3390/photonics9080555
13. **Alsowaidi N., Eltaif T., Mokhtar M.R.** Performance analysis of a hybrid optical CDMA/DWDM system against inter-symbol interference and four wave mixing. *Digital Communications and Networks*, 2021, vol. 7, no. 1, pp. 151–156. https://doi.org/10.1016/j.dcan.2020.05.002
14. **IEEE Standard for Ethernet. IEEE Std 802.3-2018 (Revision of IEEE Std 802.3-2015)**, 2018, pp. 1–5600. doi:10.1109/IEEESTD.2018.8457469
15. **Kim K., Kwon P., Alon E.** Accurate statistical BER analysis of DFE error propagation in the presence of residual ISI. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, vol. 69, no. 2, pp. 619–623. doi:10.1109/TCSII.2021.3099767
16. **Wu B.** High density on-package direct cable attachment for hundred-Gbps chip-to-chip interconnects. *19th Intern. Conf. on Electronic Packaging Technology (ICEPT)*, 2018, pp. 777–779.
17. **Ganguly A., Ahmed M., Singh Narde R., Vashist A., Shamim M., Mansoor N., Shinde T., Subramaniam S., Saxena S., Venkataraman J.** The advances, challenges and future possibilities of millimeter-wave chip-to-chip interconnections for multi-chip systems.



- Journal of Low Power Electronics and Applications*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 1–5. <https://doi.org/10.3390/jlpea8010005>
18. Albrecht T. R., Arora H., Ayanoor-Vitikkate V., Beaujour J.-M., Bedau D., Berman D., Bogdanov A. L., Chapuis Y.-A., Cushen J., Dobisz E. E. Bit-patterned magnetic recording: Theory, media fabrication, and recording performance. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 1–42. doi:10.1109/TMAG.2015.2397880
  19. Jeong S., Kim J., Lee J. Performance of bit-patterned media recording according to island patterns. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2018, vol. 54, no. 11, pp. 1–4. doi:10.1109/TMAG.2018.2833099
  20. Garani S., Dolecek L., Barry J., Sala F., Vasić B. Signal processing and coding techniques for 2-D magnetic recording: An overview. *Proc. of the IEEE*, Feb. 2018, vol. 106, no. 2, pp. 286–318. doi:10.1109/JPROC.2018.2795961
  21. Wood R. Shingled magnetic recording (SMR) and two-dimensional magnetic recording (TDMR). *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2022, vol. 561, pp. 169–670. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2022.169670>
  22. Jeong S., Lee J. Signal detection under multipath intersymbol interference in staggered bit-patterned media recording systems. *IEEE Magnetics Letters*, 2019, vol. 10, pp. 1–5. doi:10.1109/LMAG.2019.2891446
  23. Proakis J. G., Salehi M. *Fundamentals of Communication Systems*. 2nd ed. Prentice-Hall, 2013. 928 p.
  24. Proakis J. G., Salehi M. *Digital Communications*. 5th ed. McGraw Hill, 2008. 1150 p.
  25. Stark W. *Introduction to Digital Communications*. Cambridge, Cambridge University Press, 2023. 600 p. doi:10.1017/9781009220859
  26. Viterbi A. J., Omura J. K. *Principles of Digital Communication and Coding*. New York, McGraw-Hill, 1979. 560 p.
  27. Таубин Ф. А., Трофимов А. Н. Каскадное кодирование на основе многомерных решеток и кодов Рида — Соломона для многоуровневой флэш-памяти. *Тр. СПИИРАН*, 2018, вып. 2(57), с. 75–103. doi:10.15622/sp.57.4
  28. Трофимов А. Н., Таубин Ф. А. Вычисление аддитивной границы вероятности ошибки декодирования с использованием характеристических функций. *Информационно-управляющие системы*, 2021, № 4, с. 71–85. doi:10.31799/1684-8853-2021-4-71-85

UDC 621.391

doi:10.31799/1684-8853-2023-5-33-42

EDN: MDHOXU

### Improved bound on optimal reception error probability for an intersymbol interference channel

A. N. Trofimov<sup>a</sup>, PhD, Tech., Associate Professor, [orcid.org/0000-0003-1233-5222](https://orcid.org/0000-0003-1233-5222), [andrei.trofimov@k36.org](mailto:andrei.trofimov@k36.org)F. A. Taubin<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, [orcid.org/0000-0002-8781-9531](https://orcid.org/0000-0002-8781-9531)<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaja St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** Since the exact value of error probability for the optimal reception in an intersymbol interference channel cannot be usually calculated an upper bounding technique is used. The standard approach for obtaining the upper bound on the error probability of the maximum likelihood reception is based on the use of the union bound and the Chernoff bound, as well as its modifications. This approach is still not accurate enough for many cases of the transmission over an intersymbol interference channel. **Purpose:** To develop a method for exact calculation of the union bound on the error probability of the maximum likelihood reception in the intersymbol interference channel. **Results:** The resulting exact union bound on the reception error probability combines the use of the characteristic functions and an error-state diagram which make it possible to obtain the final expression in an integral form convenient for numerical integration. An important feature of the proposed procedure is that it allows one to accurately calculate the union bound using an approach based on the use of transfer (generating) functions. With this approach, the edge labels in the error-state diagram are replaced by their corresponding characteristic functions. The final expression and standard methods of numerical integration allow one to calculate the values of the union bound on the reception error probability with the required accuracy. **Practical relevance:** The results presented in this paper make it possible to significantly improve the accuracy of the bound of the reception error probability, and thereby increase the efficiency of decisions made when designing transmission and/or data storage systems using intersymbol interference channels.

**Keywords** – maximum likelihood reception, union bound on the error probability, pairwise error probability, characteristic function, intersymbol interference channel.

**For citation:** Trofimov A. N., Taubin F. A. Improved bound on optimal reception error probability for an intersymbol interference channel. *Информационно-управляющие системы* [Information and Control Systems], 2023, no. 5, pp. 33–42 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-5-33-42, EDN: MDHOXU

### References

1. Molisch A. F. *Wireless Communications: From Fundamentals to Beyond 5G*. 3rd ed. Wiley-IEEE Press, 2022. 1008 p.
2. Rappaport T., Remley K., Gentile C., Molisch A., Zajić A. (Eds.) *Radio Propagation Measurements and Channel Modeling: Best Practices for Millimeter-Wave and Sub-Terahertz Frequencies*. Cambridge University Press, 2022. 288 p. doi:10.1017/9781009122740
3. Zhang H. S., Wang Y., Zhang J., Ren J., Zhang J., Zhuang Y., Shen X. A survey of millimeter-wave communication: Physical-layer technology specifications and enabling transmis-

- sion technologies. *Proc. of the IEEE*, 2021, no. 109, pp. 1666–1705. doi:10.1109/JPROC.2021.3107494
4. Huang J., Liu Y., Wang C., Sun J., Xiao H. 5G millimeter-wave channel sounders, measurements, and models: Recent developments and future challenges. *IEEE Communications Magazine*, 2019, vol. 57, no. 1, pp. 138–145. doi:10.1109/MCOM.2018.1701263
  5. Hemadeh I. A., Satyanarayana K., El-Hajjar M., Hanzo L. H. Millimeter-wave communications: Physical channel models, design considerations, antenna constructions, and link-budget. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2018, no. 20, pp. 870–913. doi:10.1109/COMST.2017.2783541
  6. Rappaport T. S., Xing Y., Kanhere O., Ju S., Madanayake A., Mandal S., Alkhatieb A., Trichopoulos G. S. Wireless communications and applications above 100 GHz: Opportunities and challenges for 6G and beyond. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 78729–78757. doi:10.1109/ACCESS.2019.2921522
  7. Al-Ahmadi S., Maraqa O., Uysal M., Sait S. M. Multi-user visible light communications: State-of-the-art and future directions. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 70555–70571. doi:10.1109/ACCESS.2018.2879885
  8. Vijayalakshmi A., Gandhimathi P., Nesasudha M. VLC channel characteristics and data transmission model in indoor environment for future communication: An overview. *Journal of Optics*, 2023. <https://doi.org/10.1007/s12596-023-01316-5>
  9. Loureiro P., Guiomar F., Monteiro P. Visible light communications: A survey on recent high-capacity demonstrations and digital modulation techniques. *Photonics*, 2023, vol. 10, iss. 9, p. 993. <https://doi.org/10.3390/photonics10090993>
  10. Golani O., Elson D., Lavery D., Galdino L., Killey R., Bayvel P., Shtaf M. Experimental characterization of nonlinear interference noise as a process of intersymbol interference. *Opt. Lett.*, 2018, vol. 43, no. 5, pp. 1123–1126. doi:10.1364/OL.43.001123
  11. Stewart J. Performance evaluation of various modulation formats in a 40 Gbps hybrid optical CDMA/DWDM system against ISI and FWM. *J Mod. Appl. Phys.*, 2022, vol. 5, no. 4, pp. 01-02.
  12. Alsowaidi N., Eltaif T., Mokhtar M. R. Performance comparison of different modulation formats for a 40 Gbps hybrid optical CDMA/DWDM system against ISI and FWM. *Photonics*, 2022, vol. 9, no. 8, p. 555. <https://doi.org/10.3390/photonics9080555>
  13. Alsowaidi N., Eltaif T., Mokhtar M. R. Performance analysis of a hybrid optical CDMA/DWDM system against intersymbol interference and four wave mixing. *Digital Communications and Networks*, 2021, vol. 7, no. 1, pp. 151–156. <https://doi.org/10.1016/j.dcan.2020.05.002>
  14. IEEE Standard for Ethernet. *IEEE Std 802.3-2018 (Revision of IEEE Std 802.3-2015)*, 2018, pp. 1–5600. doi:10.1109/IEEESTD.2018.8457469
  15. Kim K., Kwon P., Alon E. Accurate statistical BER analysis of DFE error propagation in the presence of residual ISI. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, vol. 69, no. 2, pp. 619–623. doi:10.1109/TC-SII.2021.3099767
  16. Wu B. High density on-package direct cable attachment for hundred-Gbps chip-to-chip interconnects. *19th Intern. Conf. on Electronic Packaging Technology (ICEPT)*, 2018, pp. 777–779.
  17. Ganguly A., Ahmed M., Singh Narde R., Vashist A., Shamim M., Mansoor N., Shinde T., Subramaniam S., Saxena S., Venkataraman J. The advances, challenges and future possibilities of millimeter-wave chip-to-chip interconnections for multi-chip systems. *Journal of Low Power Electronics and Applications*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 1–5. <https://doi.org/10.3390/jlpea8010005>
  18. Albrecht T. R., Arora H., Ayanoor-Vitikkate V., Beaujour J.-M., Bedau D., Berman D., Bogdanov A. L., Chapuis Y.-A., Cushen J., Bobisz E. E. Bit-patterned magnetic recording: Theory, media fabrication, and recording performance. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 1–42. doi:10.1109/TMAG.2015.2397880
  19. Jeong S., Kim J., Lee J. Performance of bit-patterned media recording according to island patterns. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2018, vol. 54, no. 11, pp. 1–4. doi:10.1109/TMAG.2018.2833099
  20. Garani S., Dolecek L., Barry J., Sala F., Vasić B. Signal processing and coding techniques for 2-D magnetic recording: An overview. *Proc. of the IEEE*, Feb. 2018, vol. 106, no. 2, pp. 286–318. doi:10.1109/JPROC.2018.2795961
  21. Wood R. Shingled magnetic recording (SMR) and two-dimensional magnetic recording (TDMR). *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2022, vol. 561, pp. 169–670. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2022.169670>
  22. Jeong S., Lee J. Signal detection under multipath intersymbol interference in staggered bit-patterned media recording systems. *IEEE Magnetics Letters*, 2019, vol. 10, pp. 1–5. doi:10.1109/LMAG.2019.2891446
  23. Proakis J. G., Salehi M. *Fundamentals of Communication Systems*. 2nd ed. Prentice-Hall, 2013. 928 p.
  24. Proakis J. G., Salehi M. *Digital Communications*. 5th ed. McGraw Hill, 2008. 1150 p.
  25. Stark W. *Introduction to Digital Communications*. Cambridge, Cambridge University Press, 2023. 600 p. doi:10.1017/9781009220859
  26. Viterbi A. J., Omura J. K. *Principles of Digital Communication and Coding*. New York, McGraw-Hill, 1979. 560 p.
  27. Taubin F. A., Trofimov A. N. Concatenated Reed – Solomon/lattice coding for multilevel flash memory. *SPIIRAS Proceedings*, 2018, vol. 57, no. 2, pp. 75–103 (In Russian). doi:10.15622/sp.57.4
  28. Trofimov A. N., Taubin F. A. Evaluation of the union bound for the decoding error probability using characteristic functions. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy [Information and Control Systems]*, 2021, no. 4, pp. 71–85 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2021-4-71-85