УДК 621.39

# ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ ДВОИЧНОЙ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ ПРИ НЕИДЕАЛЬНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ (Часть 2)[1]

***Н. В. Савищенко,***
*доктор техн. наук, профессор*
*Военная академия связи*

*Предлагается методика оценки потерь в мощности и помехоустойчивости когерентного приема сигналов при наличии ошибки в определении фазы несущей. Приведены основные соотношения для расчета помехоустойчивости когерентного приема двоичных сигналов амплитудно-фазовой модуляции с произвольным расположением сигнальных точек на плоскости, неравными энергиями и неравновероятной априорной вероятностью передачи сигналов при наличии ошибки сопровождения фазы.*

***Ключевые слова*** *— помехоустойчивость, когерентный прием, неидеальная синхронизация, сигналы амплитудно-фазовой модуляции.*

## Анализ вероятности ошибки когерентного приема сигналов двоичной фазовой модуляции ФМ-2 (BPSK)

Символьная и битовая вероятности ошибок при фиксированной фазовой ошибке определяются выражением [1, 2]

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2,\varphi\right)=Q\left(\cos\varphi\sqrt{2h_{bc}^2}\right),\ \varphi\in[-\pi,\pi]. \qquad (5)$$

Сложность получения аналитических соотношений при усреднении вероятности ошибки по фазовой ошибке связана как с тем, что функция Гаусса не выражается через элементарные функции, так и с тем, что знаки аргумента функции Гаусса на интервале $[-\pi, \pi]$ могут изменяться на противоположные. Так, $\cos\varphi \ge 0$ при $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $\cos\varphi \le 0$ при $\varphi \in [-\pi, -\pi/2]\cup[\pi/2, \pi]$. Для решения данной проблемы можно использовать три следующих подхода:

1) применяются численные методы вычисления интеграла, например с использованием встроенных в MathCad средств интегрирования;

2) интервал интегрирования разбивается на подынтервалы, на которых аргумент функции имеет постоянный знак, и каждый интервал рассматривается отдельно;

3) аргумент функции полагается положительным, т. е. берется модуль аргумента. Этот подход требует соответствующей численной проверки и в данной статье применялся только для сигналов ФМ-2.

*Канал связи без замираний и с фазовой ошибкой*. Рассмотрим канал связи без замираний, тогда

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2,\rho\right)=\int_{-\pi}^{\pi}Q\left(\cos\varphi\sqrt{2h_{bc}^2}\right)\omega(\varphi)d\varphi, \qquad (6)$$

где $\omega(\varphi)$ — распределение Тихонова.

Учитывая четность подынтегральной функции, это выражение можно переписать в виде

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2,\rho\right)=G_{BPSK}(\rho)+2\int_0^{\pi/2}\left[-\omega\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)Q\left(\sin\varphi\sqrt{2h_{bc}^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\,\omega(\varphi)Q\left(\cos\varphi\sqrt{2h_{bc}^2}\right)\right]d\varphi, \qquad (7а)$$

где

$$G_{BPSK}(\rho)=1-2\int_0^{\pi/2}\omega(\varphi)d\varphi,$$

$$G_{BPSK}(\rho)=2\int_0^{\pi/2}\omega\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi I_0(\rho)}\int_0^{\pi/2}\exp(-\rho\sin\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{I_{2k+1}(\rho)}{I_0(\rho)}.$$

---

[1] Окончание. Начало в № 3.

При $\rho >> 1$ можно использовать приближенную формулу

$$G_{BPSK}(\rho) \cong \frac{1}{\pi\rho I_0(\rho)}\left(1-\exp\left(-\frac{1}{2}\pi\rho\right)\right).$$

Относительная, вместо точной, погрешность при использовании этой формулы составляет $\delta = 10^{-2}$ при $\rho = 10$ дБ и $\delta = 10^{-4}$ при $\rho = 20$ дБ, при больших значениях $\rho$ величина $\delta$ уменьшается дальше.

Таким образом, для распределения Тихонова формула вероятности ошибки при когерентном приеме ФМ-2 может быть представлена в виде

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \rho\right) = G_{BPSK}(\rho) + \frac{1}{\pi I_0(\rho)}\int_0^{\pi/2}\left[Q\left(\cos\varphi\sqrt{2h_{bc}^2}\right)\exp(\rho\cos\varphi) - Q\left(\sin\varphi\sqrt{2h_{bc}^2}\right)\exp(-\rho\sin\varphi)\right]d\varphi. \quad (7б)$$

Рассмотрим предельный случай, используя (7а). При $\rho \to \infty$ $\omega(\varphi - \varphi_0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$, поэтому $\lim\limits_{\rho\to\infty} G_{BPSK}(\rho) = 0$, так как $\varphi_{0,1} = 0$, $\varphi_{0,2} = -\pi/2$ и

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 0, & x_0 < a \vee x_0 > b, \\ 1/2 f(x_0), & x_0 = a \vee x_0 = b, \\ f(x_0), & a < x_0 < b. \end{cases}$$

Следовательно, в канале связи без фазовой ошибки получаем известную формулу для вероятности ошибки когерентного приема ФМ-2 [1, 2]

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2\right) = \lim_{\rho\to\infty} P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \rho\right) = Q\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right).$$

Если $\rho = 0$, то при любом отношении сигнал/шум $h_{bc}^2$ справедливо $P_{b/e}\left(h_{bc}^2, 0\right) = G_{BPSK}(0) = 0{,}5.$

При $h_{bc}^2 \to 0$ и произвольных значениях $\rho$

$$P_{b/e}(0, \rho) = \int_0^{\pi/2}\left(\omega(\varphi) + \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Если использовать третий подход, то вероятность ошибки будет определяться выражением

$$P_{b/e}^*\left(h_{bc}^2, \rho\right) = \frac{1}{\pi I_0(\rho)}\int_0^{\pi} Q\left(\left|\cos\varphi\right|\sqrt{2h_{bc}^2}\right)\exp(\rho\cos\varphi)d\varphi. \quad (8)$$

Абсолютная погрешность от этого приближения может быть определена как

$$\varepsilon\left(h_{bc}^2, \rho\right) = P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \rho\right) - P_{b/e}^*\left(h_{bc}^2, \rho\right) = 2\int_0^{\pi/2}\operatorname{erf}\left(\sin\varphi\sqrt{h_{bc}^2}\right)\frac{\exp(-\rho\sin\varphi)}{2\pi I_0(\rho)}d\varphi,$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)dt$ — интеграл вероятностей: $\operatorname{erf}(x) = 1 - Q\left(\sqrt{2}x\right)$. Относительная погрешность определяется выражением

$$\delta\left(h_{bc}^2, \rho\right) = \frac{P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \rho\right) - P_{b/e}^*\left(h_{bc}^2, \rho\right)}{P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \rho\right)}.$$

Несложно видеть, что, так как $\left|\operatorname{erf}(x)\right| \le 1$, то

$$\varepsilon\left(h_{bc}^2, \rho\right) \le \lim_{h_{bc}^2\to\infty}\varepsilon\left(h_{bc}^2, \rho\right) = \varepsilon^*(\rho),$$

где

$$\varepsilon^*(\rho) = G_{BPSK}(\rho) = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\exp(-\rho\sin\varphi)}{2\pi I_0(\rho)}d\varphi.$$

Следует заметить, что принципиальное отличие между (6) и (8) заключается в том, что при использовании первой формулы существует предел вероятности ошибки, который не может быть улучшен. А именно, так как $G_{BPSK}(\rho) = \lim\limits_{h_{bc}^2\to\infty} P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \rho\right)$, то $P_{b/e}\left(h_{bc}^2, \rho\right) \ge G_{BPSK}(\rho)$ для любых отношений сигнал/шум $h_{bc}^2$. В частности, $G_{BPSK}(0) = 0{,}5$, $G_{BPSK}(10) = 1{,}14321 \cdot 10^{-5}$, $G_{BPSK}(16) = 2{,}235743 \cdot 10^{-8}$, $G_{BPSK}(32) = 1{,}780924 \times 10^{-15}$ и в общем случае $\lim\limits_{\rho\to\infty} G_{BPSK}(\rho) = 0$. В то же время, применяя (8), получаем $\lim\limits_{h_{bc}^2\to\infty} P_{b/e}^*\left(h_{bc}^2, \rho\right) = 0$ для любых $\rho$.

В результате громоздких, но несложных преобразований, используя представление функции Лапласа через функцию Оуэна [6] и интегральное представление функции Бесселя [7, 8], формулу (8) можно представить в виде ряда

$$P_{b/e}^*\left(h_{bc}^2, \rho\right) = Q\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4\pi^2 I_0(\rho)}\exp\left(-h_{bc}^2\right) \times \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{I_m(\rho)}{\rho^m}\left(2h_{bc}^2\right)^m \times \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k\left(\frac{1}{h_{bc}^2}\right)^{k+\frac{1}{2}}\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad (9а)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция:

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^k}(2k-1)!!,\quad C_{m-1}^k=\frac{(m-1)!}{k!(m-k-1)!},$$

$$(2k-1)!!=1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1).$$

Следовательно, выражение (9а) можно переписать в виде

$$P_{b/e}^*\left(h_{bc}^2,\rho\right)=Q\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{4\pi^2 I_0(\rho)}\exp\left(-h_{bc}^2\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{m!}\frac{I_m(\rho)}{\rho^m}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(h_{bc}^2\right)^{m-k-\frac{1}{2}}. \qquad (9б)$$

Если в формулах (9) ограничиться только первым членом ряда, то при малых значениях $h_{bc}^2$

$$P_{b/e}^*\left(h_{bc}^2,\rho\right)\cong Q\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{I_1(\rho)}{\rho I_0(\rho)}\sqrt{h_{bc}^2}\exp\left(-h_{bc}^2\right).$$

Если $\rho >> 1$ (фактически при $\rho \geq 10$), то $I_1(\rho)\cong I_0(\rho)$, и тогда приближенная формула не будет содержать специальных функций:

$$P_{b/e}^*\left(h_{bc}^2,\rho\right)\cong Q\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right)+\frac{1}{4\rho\sqrt{\pi}}\sqrt{h_{bc}^2}\exp\left(-h_{bc}^2\right).$$

Для вычисления по (6) можно использовать соотношения (9), учитывая погрешность $\varepsilon\left(h_{bc}^2,\rho\right)$. В частности, последняя формула может быть представлена в виде

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2,\rho\right)\cong Q\left(\sqrt{2h_{bc}^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{4\rho\sqrt{\pi}}\sqrt{h_{bc}^2}\exp\left(-h_{bc}^2\right)+\varepsilon\left(h_{bc}^2,\rho\right).$$

■ ***Таблица 1.*** *Относительная погрешность* $\delta\left(h_{bc}^2,\rho\right)$

| ρ | $h_{bc}^2$, дБ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 3 | 6 | 10 | 12 |
| 10 | 1,422E-5 | 5,898E-5 | 5,24E-4 | 0,022 | 0,075 |
| 16 | 1,836E-8 | 2,214E-9 | 9,148E-7 | 2,251E-4 | 4,042E-3 |
| 32 | 7,651E-16 | 3,6E-15 | 4,559E-14 | 3,091E-11 | 9,772E-9 |
| 100 | 4,197E-46 | 2,029E-45 | 2,73E-44 | 2,427E-41 | 1,42E-38 |

Относительная погрешность $\delta\left(h_{bc}^2,\rho\right)$ от использования вместо (6) формулы (8) представлена в табл. 1.

Отношение сигнал/шум $h_{bc}^2$ в канале связи (табл. 2) необходимо для расчетов энергетического проигрыша, результаты которых показывают, например, что если ошибки находятся в интервале от $10^{-3}$ до $10^{-9}$, то при $\rho$ = 20 дБ (СКО $\sigma_\varphi$ = = 0,106 рад или 6,056°) энергетический проигрыш составляет величину всего лишь порядка 0,05 дБ, при $\rho \cong$ 15 дБ (СКО $\sigma_\varphi$ = 0,178 рад или 10,21°) — порядка 0,2–0,5 дБ, в то же время при $\rho$ = 10 дБ (СКО $\sigma_\varphi$ = 0,325 рад или 18,624°) энергетический проигрыш изменяется приблизительно от 1 дБ (при $P_b^*=10^{-3}$) до 2 дБ (при $P_b^*=10^{-4}$). При малых значениях вероятности ошибки $P_b^*\leq 10^{-5}$ и $\rho$ = 10 дБ ни при каких значениях отношения сигнал/шум эти величины не достигаются. Таким образом, при $\rho \leq$ 12 дБ (СКО $\sigma_\varphi$ = = 0,254 рад или 14,563°) происходит существенное ухудшение помехоустойчивости приема, особенно заметное при малых значениях вероятности ошибки.

*Канал связи с замираниями и с фазовой ошибкой.* Для канала связи с общими замираниями в соотношении (6) могут быть использованы либо (7), либо бесконечный ряд (9). Усреднение функции Гаусса можно осуществить, используя $\mathscr{H}$-функцию или $\mathscr{G}$-функцию, но в случае применения бесконечного ряда (9) появляются еще

■ ***Таблица 2.*** *Необходимое отношение сигнал/шум* $h_{bc}^2$ *в канале связи*

| ρ | $P_b^*$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $10^{-3}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ | $10^{-8}$ | $10^{-9}$ |
| $\rho\to\infty$ ($\Delta\varphi = 0$) | 6,789523 | 8,398262 | 9,587858 | 10,529832 | 11,308660 | 11,972055 | 12,54955 |
| $\rho = 100^*$ (20 дБ) | 6,835405 | 8,445249 | 9,636046 | 10,579320 | 11,359560 | 12,024487 | 12,603653 |
| $\rho = 32^{**}$ (≈ 15 дБ) | 6,953410 | 8,578710 | 9,790483 | 10,763611 | 11,589227 | 12,329207 | 13,045206 |
| $\rho = 16^{**}$ (≈ 12 дБ) | 7,210879 | 8,966462 | 10,489217 | 12,402847 | 16,341827 | – | – |
| $\rho$ = 10 (10 дБ) | 7,812869 | 10,802819 | – | – | – | – | – |

*Примечания*: Знаком «–» отмечены те поля, в которых не существует значений $h_{bc}^2$, при которых могут быть достигнуты требуемые вероятности ошибок.

* Расчеты проведены по формуле (5) при $\varphi = 0$ (без фазовой ошибки).

** Расчеты проведены по формулам (6), (7) с фазовой ошибкой, распределенной по закону Тихонова.

и гипергеометрические функции, поэтому такой подход не рационален. Его преимущество состоит лишь в том, что можно проанализировать формулу для вероятности ошибки, сравнив ее с формулой, полученной для идеального когерентного приема, и оценить полученную погрешность аналитически.

Для усреднения соотношения (6) перепишем его в виде

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2,\rho\right)=$$
$$=\int_0^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi}Q\left(\cos\varphi\sqrt{\alpha^2\mu^2}\right)\omega(\varphi)\mathrm{d}\varphi\right]\omega(\mu)\mathrm{d}\mu, \quad (10а)$$

где $\alpha^2=\dfrac{2h_{bc}^2}{m_2}$; $\omega(\varphi)$ — плотность распределения Тихонова, $\omega(\varphi)=\omega(-\varphi)$. Используя (7а) и $\mathscr{H}$-функцию для замираний Райса—Накагами, получаем, что в канале с замираниями и фазовой ошибкой вероятность ошибки

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2,\rho\right)=G_{BPSK}(\rho)+$$
$$+4\int_0^{\pi/2}\left[\omega(\varphi)\mathscr{H}_p\left(z_c\left[h_{bc}^2,\varphi\right],\ b_c\left[h_{bc}^2,\varphi\right],\ +\infty\right)-\right.$$
$$\left.-\omega\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\mathscr{H}_p\left(z_s\left[h_{bc}^2,\varphi\right],\ b_s\left[h_{bc}^2,\varphi\right],\ +\infty\right)\right]\mathrm{d}\varphi, \quad (10б)$$

где

$$z_{s,c}\left[h_{bc}^2,\varphi\right]=\frac{\gamma}{\sqrt{\beta}}b_{s,c}\left[h_{bc}^2,\varphi\right];$$

$$b_c\left[h_{bc}^2,\varphi\right]=\sqrt{\frac{2h_{bc}^2\cos^2\varphi}{2h_{bc}^2\cos^2\varphi+m_2\beta}};$$

$$b_s\left[h_{bc}^2,\varphi\right]=\sqrt{\frac{2h_{bc}^2\sin^2\varphi}{2h_{bc}^2\sin^2\varphi+m_2\beta}}.$$

В частности, для релеевских замираний ($p=1$)

$$z_{s,c}\left[h_{bc}^2,\varphi\right]=0;$$

$$b_s\left[h_{bc}^2,\varphi\right]=\sqrt{\frac{h_{bc}^2\sin^2\varphi}{1+h_{bc}^2\sin^2\varphi}};$$

$$b_c\left[h_{bc}^2,\varphi\right]=\sqrt{\frac{h_{bc}^2\cos^2\varphi}{1+h_{bc}^2\cos^2\varphi}},$$

для райсовских замираний ($p=1$)

$$z_{s,c}\left[h_{bc}^2,\varphi\right]=\sqrt{2\gamma_0^2}\,b_{s,c}\left[h_{bc}^2,\varphi\right];$$

$$b_s\left[h_{bc}^2,\varphi\right]=\sqrt{\frac{h_{bc}^2\sin^2\varphi}{1+\gamma_0^2+h_{bc}^2\sin^2\varphi}};$$

$$b_c\left[h_{bc}^2,\varphi\right]=\sqrt{\frac{h_{bc}^2\cos^2\varphi}{1+\gamma_0^2+h_{bc}^2\cos^2\varphi}},$$

где $\gamma_0^2=\mu_0^2/2\sigma^2$ — глубина замираний. Рассмотрим предельный случай и получим формулу для вероятности ошибки при отсутствии фазовой ошибки ($\rho\to\infty$) и замираниях Райса—Накагами. Очевидно, что $\omega(\varphi-\varphi_0)=\delta(\varphi-\varphi_0)$, $\lim\limits_{\rho\to\infty}G_{BPSK}(\rho)=0$, и так как $\varphi_{0,\,1}=0$, $\varphi_{0,\,2}=-\pi/2$, то

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2\right)=\lim_{\rho\to\infty}P_{b/e}\left(h_{bc}^2,\rho\right)=$$
$$=2\mathscr{H}_p\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\beta}}\sqrt{\frac{2h_{bc}^2}{2h_{bc}^2+m_2\beta}},\ \sqrt{\frac{2h_{bc}^2}{2h_{bc}^2+m_2\beta}},\ +\infty\right).$$

В частности, для релеевских замираний $\mathscr{H}(0,b,+\infty)=\dfrac{1-b}{4}$ [6], следовательно, после простейших преобразований получаем, что

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2,\rho\right)=\frac{1}{2}+\int_0^{\pi/2}\times$$
$$\times\left\{\omega\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{h_{bc}^2\sin^2\varphi}{1+h_{bc}^2\sin^2\varphi}}-\omega(\varphi)\sqrt{\frac{h_{bc}^2\cos^2\varphi}{1+h_{bc}^2\cos^2\varphi}}\right\}\mathrm{d}\varphi.$$

При отсутствии фазовой ошибки ($\rho\to\infty$, $\omega(\varphi)=\delta(\varphi)$) получаем известную формулу вероятности ошибки в канале с релеевскими замираниями [1, 2]

$$P_{b/e}\left(h_{bc}^2\right)=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{h_{bc}^2}{1+h_{bc}^2}}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+h_{bc}^2+\sqrt{h_{bc}^2+h_{bc}^4}}.$$

Соответствующее выражение для вероятности ошибки может быть легко получено и для четырехпараметрических замираний, если воспользоваться определением $\mathscr{S}$-функции.

## Анализ вероятности ошибки когерентного приема сигналов АФМ-2

Обобщим предыдущий материал по нескольким пунктам: энергии сигналов, угол между ними произвольный (т. е. рассматриваем произвольное расположение двух с разной энергией сигналов в двумерном пространстве) и вероятности их передачи также произвольны.

Пусть для передачи информации используются два сигнала в общем случае с различной энергией: $s_0(t)=\sqrt{E_0}\psi_0(t)$, $s_1(t)=\sqrt{E_1}\psi_1(t)$, где $\psi_0(t)$,

$\psi_1(t)$ — нормированные функции, $\|\psi_0(t)\| = \|\psi_1(t)\| = 1$, с произвольным углом между ними, т. е. коэффициент неортогональности $\gamma = \cos\varphi_{01} = (\psi_0(t), \psi_1(t))$. Предположим, что сигнал $s_0(t)$ передается с вероятностью $p$, а сигнал $s_1(t)$ — с вероятностью $(1 - p)$. Без ограничения общности можно считать, что $p \in [0, 1/2]$. Расстояние между двумя сигналами может быть определено по формуле

$$d = \sqrt{E_{01}} = \sqrt{E_0 + E_1 - 2\gamma E_0 E_1}.$$

В этой системе сигналов максимальная энергия $E_m = \max(E_0, E_1)$, средняя энергия $E_c = pE_0 + (1 - p)E_1$, а квадрат пик-фактора сигнала

$$\Pi^2 = \frac{\max(E_0, E_1)}{p(E_0 - E_1) + E_1}.$$

Пусть $E_0 \neq 0$, и введем коэффициент пропорциональности энергий $\chi^2 = E_1/E_0$, тогда $E_1 = \chi^2 E_0$. Следовательно:

$$h_{bm}^2 = \max(1, \chi^2) h_0^2, \quad h_{bc}^2 = (p + (1-p)\chi^2) h_0^2,$$

где $h_0^2 = E_0/N_0$. Соответственно, квадрат пик-фактора

$$\Pi^2(\chi) = \frac{\max(1, \chi^2)}{p + (1-p)\chi^2}.$$

Если $E_0 = 0$, то $E_m = E_1$, $E_c = (1 - p)E_1$ и, следовательно, $h_{bc}^2 = (1-p)h_{bm}^2$ и квадрат пик-фактора $\Pi^2 = 1/(1 - p) \in [1, 2]$.

При использовании критерия $\min P_e$ вероятность ошибки на символ при отсутствии фазовой ошибки определяется как [9, 10]

$$P_e = pQ\left(\frac{d - 2\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right) + (1-p)Q\left(\frac{d + 2\Delta}{\sqrt{2N_0}}\right),$$

где $\Delta = \dfrac{N_0}{2d}\ln\dfrac{1-p}{p}$. Введем величину $h_{01}^2 = \dfrac{E_{01}}{2N_0}$, тогда вероятность ошибки может быть представлена в виде

$$P_e\left(h_{01}^2, p\right) = pQ\left(\sqrt{h_{01}^2} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\sqrt{h_{01}^2}}\right) + (1-p)Q\left(\sqrt{h_{01}^2} + \frac{\widetilde{\Delta}}{\sqrt{h_{01}^2}}\right),$$

где $\widetilde{\Delta} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-p}{p} \geq 0$. Если в канале связи обрыв, т. е. $h_{01}^2 \to 0$, тогда $\lim\limits_{h_{01}^2 \to 0} P_e\left(h_{01}^2, p\right) = p \in [0, 1/2]$.

Пусть $h_1^2 = E_1/N_0$, тогда

$$h_{01}^2 = \frac{E_{01}}{2N_0} = \frac{1}{2}\left(h_0^2 + h_1^2\right) - \gamma h_0 h_1.$$

В работе [10] приведено решение задачи минимизации $P_e\left(h_{01}^2, p\right)$ как функции от величин $E_0$, $E_1$ при фиксированной средней энергии $E_c = pE_0 + (1 - p)E_1$. Очевидно, что ограничение на переменные представляет собой эллипс: $ph_0^2 + (1-p)h_1^2 = E_c/N_0$. Приведем другой вариант решения данной задачи, основанный на методе множителей Лагранжа. Функция Лагранжа представляет собой выражение

$$L(h_0, h_1, \lambda) = pQ\left(\sqrt{h_{01}^2(h_0, h_1)} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\sqrt{h_{01}^2(h_0, h_1)}}\right) + (1-p)Q\left(\sqrt{h_{01}^2(h_0, h_1)} + \frac{\widetilde{\Delta}}{\sqrt{h_{01}^2(h_0, h_1)}}\right) + \lambda\left(ph_0^2 + (1-p)h_1^2 - E_c/N_0\right).$$

Дифференцируя функцию Лагранжа по переменным $h_0$, $h_1$ и приравнивая производные нулю, получаем, что должно выполняться условие

$$ph_0(h_1 - \gamma h_0) = (1-p)h_1(h_0 - \gamma h_1).$$

Если $h_0 = 0$, то при $h_1 \neq 0$ должно выполняться условие $h_0 - \gamma h_1 = 0$ или $\gamma = 0$ (сигналы ортогональны). Тогда $E_0 = 0$, $E_1 = E_c/(1 - p)$ и $E_{01} = E_c/(1 - p)$. Если $p = 0{,}5$, то этому условию удовлетворяют и ортогональные сигналы ($\gamma = 0$) с равной энергией: $E_0 = E_1$, но при этом $E_{01} = E_c$. Аналогично при $h_1 = 0$ и $h_0 \neq 0$ должно выполняться условие $h_1 - \gamma h_0 = 0$ или $\gamma = 0$ (сигналы ортогональны). Соответственно, тогда $E_1 = 0$, $E_0 = E_c/p$ и $E_{01} = E_c/p$.

Если $h_0 \neq 0$ и $h_1 \neq 0$, то данное условие можно представить в виде квадратного уравнения

$$(1-p)\gamma\chi^2 - (1-2p)\chi - \gamma p = 0,$$

где $\chi^2 = E_1/E_0$. Решая квадратное уравнение, получаем, что дискриминант уравнения равен $(2p - 1)^2 + 4p\gamma^2(1 - p) = 1 - 4p(1 - p)(1 - \gamma^2)$ и положительные решения уравнения имеют вид

$$\chi_1 = -\frac{1}{2\gamma(1-p)}\left[(2p-1) + \sqrt{1 - 4p(1-p)(1-\gamma^2)}\right],$$

$$\gamma < 0$$

и

$$\chi_2 = \frac{1}{2\gamma(1-p)}\left[-(2p-1) + \sqrt{1 - 4p(1-p)(1-\gamma^2)}\right],$$

$$\gamma > 0.$$

Только при $\gamma < 0$ вероятность ошибки достигает минимума, т. е. $\chi_{\text{opt}} = \chi_1$. Следовательно, $E_{1,\text{opt}} = \chi_{\text{opt}}^2 E_{0,\text{opt}}$, где $E_{0,\text{opt}} = \dfrac{E_c}{p + (1-p)\chi_{\text{opt}}^2}$.

В статье [10] приведены другие выражения для оптимальных значений энергий при $\gamma < 0$, что соответствует $\varphi_{01} \in [\pi/2, \pi]$:

$$E_{0,\mathrm{opt}} = \frac{E_c}{2p}\left[1 + \frac{1-2p}{\sqrt{1-4p(1-p)(1-\gamma^2)}}\right];$$

$$E_{1,\mathrm{opt}} = \frac{E_c}{2(1-p)}\left[1 - \frac{1-2p}{\sqrt{1-4p(1-p)(1-\gamma^2)}}\right].$$

Определим вероятность символьной (битовой) ошибки при наличии фазовой ошибки. Предположим, что $E_0$, $E_1 \neq 0$, тогда при сдвиге сигналов на угол $\varphi$ «расстояния» (эти величины могут быть и отрицательными) до границы областей принятия решения будут определяться как

$$d_0 = \frac{d}{2} - \Delta + b_0;\ \ d_1 = \frac{d}{2} + \Delta - b_1,$$

где

$$b_0 = 2\sin\frac{\varphi}{2}\frac{E_0}{\sqrt{E_{01}}}\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_0}}\sin\left(\varphi_{01} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\frac{\varphi}{2}\right);$$

$$b_1 = 2\sin\frac{\varphi}{2}\frac{E_1}{\sqrt{E_{01}}}\left(\sqrt{\frac{E_0}{E_1}}\sin\left(\varphi_{01} - \frac{\varphi}{2}\right) + \sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Тогда

$$P_e = pQ\left(\frac{d - 2\Delta + 2b_0}{\sqrt{2N_0}}\right) + (1-p)Q\left(\frac{d + 2\Delta - 2b_1}{\sqrt{2N_0}}\right).$$

После несложных преобразований формула для вероятности ошибки при неравновероятной передаче сигналов с различной энергией и фиксированной фазовой ошибкой может быть представлена в виде

$$P_e\left(h_{bc}^2, p, \varphi\right) = pQ\Big[(1 + u(\chi, \gamma, \varphi))\sqrt{2g(\chi, p, \gamma)h_{bc}^2} - \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2g(\chi, p, \gamma)h_{bc}^2}}\Big] + (1-p)Q\Big[(1 - v(\chi, \gamma, \varphi)) \times \sqrt{2g(\chi, p, \gamma)h_{bc}^2} + \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2g(\chi, p, \gamma)h_{bc}^2}}\Big],$$

где $h_{01}^2 = 2g(\chi, p, \gamma)h_{bc}^2$ и

$$u(\chi, \gamma, \varphi) = 4\sin\frac{\varphi}{2}\left(\chi\sin\left(\varphi_{01} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\frac{1}{1 - 2\gamma\chi + \chi^2};$$

$$v(\chi, \gamma, \varphi) = 4\chi\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\left(\varphi_{01} - \frac{\varphi}{2}\right) + \chi\sin\frac{\varphi}{2}\right)\frac{1}{1 - 2\gamma\chi + \chi^2};$$

$$g(\chi, p, \gamma) = \frac{1}{4}\frac{1 - 2\gamma\chi + \chi^2}{p + (1-p)\chi^2}.$$

При обрыве канала связи $(h_{bc}^2 \to 0)$ и идеальном когерентном приеме получаем $\lim\limits_{h_{bc}^2 \to 0} P_e \times (h_{bc}^2, p, \varphi) = p$. Для усреднения вероятности ошибки при случайном характере фазовой ошибки вероятность ошибки определяется по (2). Аналитическое выражение получается в этом случае громоздким, поэтому ограничимся рассмотрением частных случаев.

**А.** *Сигнал АМ-2 (ASK, OOK).* Пусть $E_0 = 0$, $E_1 \neq 0$, тогда $b_0 = 0$ и $b_1 = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{E_1}$. Максимальная энергия $E_m = E_1$, средняя энергия $E_c = (1-p) \times E_1$, следовательно, $h_{bc}^2 = (1-p)h_{bm}^2$ и квадрат пик-фактора $\Pi^2 = 1/(1-p) \in [1, 2]$.

Тогда при фиксированной фазовой ошибке вероятность ошибочного приема

$$P_e\left(h_{bc}^2, p, \varphi\right) = pQ\left(\left(\frac{h_{bc}^2}{2(1-p)}\right)^{1/2} - \tilde{\Delta}\left(\frac{h_{bc}^2}{2(1-p)}\right)^{-1/2}\right) + (1-p)Q\left((2\cos\varphi - 1)\left(\frac{h_{bc}^2}{2(1-p)}\right)^{1/2} + \tilde{\Delta}\left(\frac{h_{bc}^2}{2(1-p)}\right)^{-1/2}\right).$$

Эта формула может быть формально получена из общей формулы, если учесть, что в этом случае $\chi^2 \to \infty$ и, соответственно:

$$\lim_{\chi \to \infty} u(\chi, \rho, \varphi) = 0;$$

$$\lim_{\chi \to \infty} v(\chi, \rho, \varphi) = 4\sin^2(\varphi/2);$$

$$\lim_{\chi \to \infty} g(\chi, p, \rho) \triangleq g = \frac{1}{4(1-p)}.$$

Средняя вероятность ошибки принимает значения

$$P_e\left(h_{bc}^2, p, \rho\right) = pQ\left(\sqrt{2gh_{bc}^2} - \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2gh_{bc}^2}}\right) + (1-p)\int_{-\pi}^{\pi} Q\left((2\cos\varphi - 1)\sqrt{2gh_{bc}^2} + \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2gh_{bc}^2}}\right)\omega(\varphi)d\varphi.$$

В результате, используя соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q(a\cos\varphi + b)\omega(\varphi)d\varphi = 2\left[\int_0^{\pi/2}\omega\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)d\varphi + \int_0^{\pi/2} Q(a\sin\varphi - b)\omega \times \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)d\varphi + \int_0^{\pi/2} Q(a\sin\varphi + b)\omega\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)d\varphi\right],$$

после несложных преобразований получаем

$$P_e\left(h_{bc}^2, p, \rho\right) = G_{OOK}(p,\rho) + pQ\left(\sqrt{2gh_{bc}^2} - \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2gh_{bc}^2}}\right) +$$

$$+2(1-p)\left[\int_0^{\pi/2} Q\left((2\sin\varphi+1)\sqrt{2gh_{bc}^2} - \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2gh_{bc}^2}}\right)\omega\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi + \right.$$

$$+\int_{\pi/6}^{\pi/2} Q\left((2\sin\varphi-1)\sqrt{2gh_{bc}^2} + \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2gh_{bc}^2}}\right)\omega\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)d\varphi -$$

$$\left. -\int_0^{\pi/6} Q\left((1-2\sin\varphi)\sqrt{2gh_{bc}^2} - \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2gh_{bc}^2}}\right)\omega\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)d\varphi\right],$$

где

$$G_{OOK}(p,\rho) = 2(1-p)\left[\int_0^{\pi/2} \omega\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi + \int_0^{\pi/6} \omega\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)d\varphi\right],$$

$$G_{OOK}(p,0) = \frac{4}{3}(1-p).$$

Рассмотрим предельные случаи. Если $h_{bc}^2 \to \infty$, то $\lim\limits_{h_{bc}^2\to\infty} P_e\left(h_{bc}^2, p, \rho\right) = G_{OOK}(p,\rho)$. При $\rho \to \infty$ $\omega \times (\varphi - \varphi_0) = \delta(\varphi - \varphi_0)$, поэтому

$$\lim_{\rho\to\infty} G_{OOK}(p,\rho) =$$

$$= 2(1-p)\left[\int_0^{\pi/2} \delta\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi + \int_0^{\pi/6} \delta\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)d\varphi\right] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\rho\to\infty} P_e\left(h_{bc}^2, p, \rho\right) =$$

$$= pQ\left(\sqrt{2gh_{bc}^2} - \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2gh_{bc}^2}}\right) + (1-p)Q\left(\sqrt{2gh_{bc}^2} + \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2gh_{bc}^2}}\right).$$

Это выражение совпадает с формулой, полученной для вероятности ошибки при идеальном когерентном приеме сигналов АФМ-2. При обрыве канала связи $(h_{bc}^2 \to 0)$ и идеальном когерентном приеме $\lim\limits_{\rho\to\infty} P_e(0, p, \rho) = p$.

Симметричный вариант получаем, если $E_0 \neq 0$, $E_1 = 0$, тогда максимальная энергия $E_m = E_2$, средняя энергия $E_c = pE_0$, следовательно, $h_{bc}^2 = ph_{bm}^2$ и квадрат пик-фактора $\Pi^2 = 1/p \in [2, \infty)$.

Поскольку $\chi^2 = 0$, то

$$\lim_{\chi\to\infty} u(\chi,\gamma,\varphi) = -4\sin^2(\varphi/2);$$

$$\lim_{\chi\to\infty} \upsilon(\chi,\gamma,\varphi) = 0;$$

$$\lim_{\chi\to\infty} g(\chi, p, \rho) \triangleq g = \frac{1}{4p}$$

и

$$P_e\left(h_{bc}^2, p, \varphi\right) = pQ\left[(2\cos\varphi - 1)\sqrt{2gh_{bc}^2} - \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2gh_{bc}^2}}\right] +$$

$$+ (1-p)Q\left[\sqrt{2gh_{bc}^2} + \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2gh_{bc}^2}}\right].$$

Если $p = 0{,}5$, то $\tilde{\Delta} = 0$, при $E_0 = 0$, $E_1 \neq 0$ вероятность ошибки при приеме сигналов АМ-2

$$P_e\left(h_{bc}^2, \rho\right) = G_{OOK}(\rho) + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{2gh_{bc}^2}\right) +$$

$$+\left[\int_0^{\pi/2} Q\left((2\sin\varphi+1)\sqrt{2gh_{bc}^2}\right)\omega\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi + \right.$$

$$+\int_{\pi/6}^{\pi/2} Q\left((2\sin\varphi-1)\sqrt{2gh_{bc}^2}\right)\omega\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)d\varphi -$$

$$\left. -\int_0^{\pi/6} Q\left((1-2\sin\varphi)\sqrt{2gh_{bc}^2}\right)\omega\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)d\varphi\right],$$

где $G_{OOK}(\rho) = \int\limits_0^{\pi/2} \omega\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)d\varphi + \int\limits_0^{\pi/6} \omega\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)d\varphi.$

**Б.** *Сигнал ФМ-2 (BPSK) с неравновероятной передачей*. В этом случае $\chi^2 = 1$ и $\gamma = -1$, так как угол между сигналами $\varphi_{01} = \pi$. Тогда

$$u(\chi,\gamma,\varphi) = -2\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

$$\upsilon(\chi,\gamma,\varphi) = 2\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

$$g(\chi, p, \gamma) \triangleq g = 1.$$

Следовательно, при фиксированной фазовой ошибке вероятность ошибки

$$P_e\left(h_{bc}^2, p, \varphi\right) = pQ\left[\cos\varphi\sqrt{2h_{bc}^2} - \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2h_{bc}^2}}\right] +$$

$$+ (1-p)Q\left[\cos\varphi\sqrt{2h_{bc}^2} + \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{2h_{bc}^2}}\right].$$

Средняя вероятность ошибки может быть получена усреднением по $\varphi$. В результате несложных преобразований получаем

$$P_e\left(h_{bc}^2,\, p, \rho\right) = G_{BPSK}(\rho) + 2\int_0^{\pi/2} \times$$

$$\times\left\{U(\varphi, p, \rho)Q\left[\sin\varphi\sqrt{2h_{bc}^2} + \frac{\widetilde{\Delta}}{\sqrt{2h_{bc}^2}}\right] +\right.$$

$$\left. + V(\varphi, p, \rho)Q\left[\sin\varphi\sqrt{2h_{bc}^2} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\sqrt{2h_{bc}^2}}\right]\right\}d\varphi,$$

где $G_{BPSK}(\rho)$ не зависит от априорной вероятности $p$ и совпадает с величиной, полученной для ФМ-2 при $p = 0{,}5$, т. е.

$$G_{BPSK}(\rho) = 2\int_0^{\pi/2} \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)d\varphi = 1 - 2\int_0^{\pi/2} \omega(\varphi)d\varphi$$

и

$$U(\varphi, p, \rho) = (1-p)\omega\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - p\omega\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$V(\varphi, p, \rho) = p\omega\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - (1-p)\omega\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

При этом

$$U(\varphi, p, \rho) + V(\varphi, p, \rho) = \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$U(\varphi, p, \rho) - V(\varphi, p, \rho) = (2p-1)\left[\omega\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Если $p = 0{,}5$, то

$$U\left(\varphi, \frac{1}{2}, \rho\right) = V\left(\varphi, \frac{1}{2}, \rho\right) = \frac{1}{2}\left[\omega\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$\widetilde{\Delta} = 0$ и

$$P_e\left(h_{bc}^2, \frac{1}{2}, \rho\right) = G_{BPSK}(\rho) +$$

$$+ 2\int_0^{\pi/2}\left[\omega\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]Q\left(\sin\varphi\sqrt{2h_{bc}^2}\right)d\varphi.$$

Это выражение отличается от (7), и на его основе можно получить другие соотношения, например в канале с общими замираниями. Если учесть, что

$$\omega\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi I_0(\rho)}\mathrm{sh}(\rho\sin\varphi),$$

то можно формулу для вероятности ошибки представить в виде

$$P_e\left(h_{bc}^2, \frac{1}{2}, \rho\right) = G_{BPSK}(\rho) +$$

$$+ \frac{2}{\pi I_0(\rho)}\int_0^{\pi/2}\mathrm{sh}(\rho\sin\varphi)Q\left(\sin\varphi\sqrt{2h_{bc}^2}\right)d\varphi.$$

**B.** *Сигнал ЧМ-2 (FSK) с неравновероятной передачей*. В этом случае $\chi^2 = 1$ и $\gamma = 0$, так как сигналы перпендикулярны ($\varphi_{01} = \pi/2$). Тогда

$$u(\chi, \gamma, \varphi) = 2\sin(\varphi/2)\left[\cos(\varphi/2) - \sin(\varphi/2)\right] = \\ = \sin\varphi + \cos\varphi - 1;$$

$$v(\chi, \gamma, \varphi) = 2\sin(\varphi/2)\left[\cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)\right] = \\ = \sin\varphi - \cos\varphi + 1;$$

$$g(\chi, p, \rho) \triangleq g = 0{,}5.$$

Следовательно, при фиксированной фазовой ошибке вероятность ошибки

$$P_e\left(h_{bc}^2, p, \varphi\right) = pQ\left[\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2h_{bc}^2} - \frac{\widetilde{\Delta}}{\sqrt{h_{bc}^2}}\right] +$$

$$+ (1-p)Q\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2h_{bc}^2} + \frac{\widetilde{\Delta}}{\sqrt{h_{bc}^2}}\right].$$

Средняя вероятность ошибки, а также частные случаи из этой формулы могут быть получены аналогично предыдущим выкладкам.

Если $p = 0{,}5$, то

$$P_e\left(h_{bc}^2, \frac{1}{2}, \varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[Q\left[\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2h_{bc}^2}\right] + Q\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2h_{bc}^2}\right]\right].$$

В результате несложных преобразований получаем, что средняя вероятность ошибки

$$P_e\left(h_{bc}^2, \rho\right) = G_{FSK}^b(\rho) +$$

$$+ \int_0^{\pi/4}\left[U(\varphi, \rho)Q\left(\sin\varphi\sqrt{2h_{bc}^2}\right) + V(\varphi, \rho)Q\left(\cos\varphi\sqrt{2h_{bc}^2}\right)\right]d\varphi,$$

где

$$G_{FSK}(\rho) = \int_0^{\pi/4}\left\{\omega\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + 2\omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right)\right\}d\varphi;$$

$$U(\varphi, \rho) = \omega\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$V(\varphi, \rho) = -\omega\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + \omega\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \omega\left(\varphi + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Таким образом, в данной статье показано, что зависимость вероятности ошибки от фазовой ошибки носит существенно нелинейный характер и, начиная с некоторого порогового значения, дальнейшее увеличение отношения сигнал/шум не приводит к повышению помехоустойчивости. Следовательно, имеется своеобразный эффект энергетического насыщения, после которого уже нецелесообразно дальнейшее повышение энергетики и необходимы другие методы борьбы с этим эффектом.

**Приложение. Матрица преобразования координат.** Определим условия ортогональности преобразования, заданного матрицей

$$\mathbf{\Psi}(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \hat{\delta}_{21}\sin\varphi & \dots & \hat{\delta}_{N1}\sin\varphi\\ -\hat{\delta}_{21}\sin\varphi & \cos\varphi & \dots & \hat{\delta}_{N2}\sin\varphi\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\hat{\delta}_{N1}\sin\varphi & -\hat{\delta}_{N2}\sin\varphi & \dots & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при $\varphi = 0$ матрица преобразования совпадает с единичной матрицей: $\mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{E}$. В дальнейшем предполагаем, что $\varphi \neq 0$. В общем случае матрица $\mathbf{\Psi}(\varphi)$ представляет собой сумму диагональной матрицы $\mathbf{D} = \cos\varphi\mathbf{E}$ и кососимметрической матрицы $\mathbf{\Phi}(\varphi) = \sin\varphi\mathbf{\Psi}(\pi/2)$: $\mathbf{\Psi}(\varphi) = \mathbf{D} + \mathbf{\Phi}(\varphi)$. Условие ортогональности преобразования означает, что должно выполняться тождество $\mathbf{\Psi}(\varphi)\mathbf{\Psi}^T(\varphi) = \mathbf{\Psi}^T(\varphi)\mathbf{\Psi}(\varphi) = \mathbf{E}$ или

$$\left[\mathbf{D}+\mathbf{\Phi}(\varphi)\right]^T\left[\mathbf{D}+\mathbf{\Phi}(\varphi)\right]=\cos^2\varphi\mathbf{E}+\mathbf{\Phi}^T(\varphi)\mathbf{\Phi}(\varphi)=\mathbf{E},$$

так как по определению $\mathbf{\Phi}(\varphi) + \mathbf{\Phi}^T(\varphi) = 0$. Следовательно, условие ортогональности можно преобразовать к виду $\mathbf{\Phi}^T(\varphi)\mathbf{\Phi}(\varphi) = \sin^2\varphi\mathbf{E}$. Это условие можно переписать в виде $\mathbf{\Psi}^T(\pi/2)\mathbf{\Psi}(\pi/2) = \mathbf{E}$. В частности, отсюда следует, что должно быть справедливо соотношение $\det\mathbf{\Psi}(\pi/2) = \pm1$, т. е. модуль определителя кососимметрической матрицы должен быть равен единице (следовательно, условие ортогональности $\det\mathbf{\Psi}(\varphi) = \pm1$ свели к условию $\det\mathbf{\Psi}(\pi/2) = \pm1$, где элементы матрицы не зависят от $\varphi$). Формализуем это условие. Известно, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю (матрица является особой), а четного порядка может быть представлен в виде квадрата некоторого многочлена от элементов матрицы. Этот многочлен называется *пфаффиан*. Термин был введен Артуром Кэли, а свое название данный многочлен получил в честь немецкого математика Йохана Фридриха Пфаффа. Следовательно, условие ортогональности может быть преобразовано к виду $\det\mathbf{\Psi}(\pi/2) = \mathrm{Pf}^2[\mathbf{\Psi}(\pi/2)] = 1$ или $\mathrm{Pf}[\mathbf{\Psi}(\pi/2)] = \pm1$. В матричном виде это условие выглядит следующим образом:

$$\mathrm{Pf}^2\left[\Psi(\pi/2)\right]=\det\begin{pmatrix}0 & \hat{\delta}_{21} & \dots & \hat{\delta}_{N1}\\ -\hat{\delta}_{21} & 0 & \dots & \hat{\delta}_{N2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\hat{\delta}_{N1} & -\hat{\delta}_{N2} & \dots & 0\end{pmatrix}=1.$$

В частности, при $N = 2$ получаем, что должно выполняться условие $\mathrm{Pf}\left[\Psi(\pi/2)\right]=\hat{\delta}_{21}=\pm1$, а при $N \geq 4$ $\mathrm{Pf}\left[\Psi(\pi/2)\right]=\hat{\delta}_{21}\hat{\delta}_{43}-\hat{\delta}_{31}\hat{\delta}_{42}+\hat{\delta}_{32}\hat{\delta}_{41}=\pm1$. Это тождество будет выполняться, например, если выполнены условия $\hat{\delta}_{21}\hat{\delta}_{43}=\pm1$, $\hat{\delta}_{31}\hat{\delta}_{42}=0$, $\hat{\delta}_{32}\hat{\delta}_{41}=0$. Все предыдущие выкладки были сделаны в предположении, что на элементы матрицы не накладывались ограничения. Итак, получили условия ортогональности в виде равенства пфаффиана $\mathrm{Pf}[\Psi(\pi/2)] = \pm1$ и равносильного ему равенства $\det\Psi(\pi/2) = 1$.

Таким образом, чтобы проверить ортогональность преобразований необходимо:

а) для фиксированной базисной системы $\{\psi_\nu(t)\}$, $\nu=\overline{1,N}$ вычислить преобразования Гильберта: $\{\widehat{\psi}_\nu(t)\}$, $\nu=\overline{1,N}$;

б) вычислить элементы матрицы — скалярные произведения $\hat{\delta}_{\mu\nu}$, $\nu,\mu=\overline{1,N}$:

$$\hat{\delta}_{\mu\nu}=(\psi_\mu,\widehat{\psi}_\nu)=\int_0^T\psi_\mu(t)\widehat{\psi}_\nu(t)\mathrm{d}t,$$

$$\nu,\mu=\overline{1,N};$$

в) проверить выполнение тождества $\mathrm{Pf}[\Psi(\pi/2)] = \pm1$. Если это условие выполняется, то преобразования координат — ортогональные, в противном случае — нет.

Нетрудно убедиться, что если заданы базисные функции $\{\psi_\nu(t)\}$, $\nu=\overline{1,N}$ и для них, в частности, выполняется условие

$$\hat{\delta}_{\mu\nu}=\delta_{\left[\frac{\mu+1}{2}\right],\left[\frac{\nu+1}{2}\right]},\quad \nu,\mu=\overline{1,N},$$

где

$$\delta_{\mu\nu}=\begin{cases}1, \nu=\mu,\\ 0, \nu\neq\mu\end{cases}$$

— символ Кронекера и $[x] = \mathrm{ent}(x)$ — целая часть числа $x$, то матрица преобразования будет ортогональной. Эти условия означают, что преобразования Гильберта от базисных функций должны удовлетворять условию $\widehat{\psi}_\nu=\psi_{\nu+1}$, $\widehat{\psi}_{\nu+1}=-\psi_\nu$, где $\nu$ — нечетно. Эти условия будут выполняться, если в качестве базисных функций выбрать, например, ортонормированную систему $\left\{\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\omega_\nu t,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\omega_\nu t\right\}$, $\nu=\overline{1,N/2}$. Другие примеры ортонормированного базиса, удовлетворяющего данным условиям, можно найти в работе [11].

## Литература


1. **Прокис Дж.** Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д. Д. Кловского. — М.: Радио и связь. 2000. — 800 с.
2. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. — М.: Вильямс, 2003. — 1104 с.
3. **Коржик В. И.** Расширенное преобразование Гильберта и его применение в теории сигналов // Проблемы передачи информации. 1969. Т. 5. Вып. 4. С. 3–18.
4. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
5. **Савищенко Н. В.** Помехоустойчивость модемов с двумерными сигнальными конструкциями по точным формулам вероятности ошибки в канале без замираний и с общими четырехпараметрическими замираниями // Информационно-управляющие системы. 2007. № 4. С. 44–54.
6. **Савищенко Н. В.** Многомерные сигнальные конструкции: их частотная эффективность и помехоустойчивость приема: Монография / Под ред. Д. Л. Бураченко. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. — 420 с.
7. **Справочник по специальным функциям** / Под ред. А. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
8. **Попов Б. А., Теслер Г. С.** Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. — Киев: Наук. думка, 1984. — 600 с.
9. **Возенкрафт Дж., Джекобс И.** Теоретические основы техники связи: Пер. с англ. / Под ред. Р. Л. Добрушина. — М.: Мир, 1969. — 640 с.
10. **Israel Korn, John P. Fonseka, Shaohui Xing.** Optimal binary communication with nonequal probabilities // IEEE Transactions on communications. Sep. 2003. Vol. 51. N 9. P. 1435–1438.
11. **Витерби А. Д., Омура Д. К.** Принципы цифровой связи и кодирования: Пер. с англ. / Под ред. Зигангирова. — М.: Радио и связь, 1982. — 536 с.