УДК 621.391.01

ЦИФРОВОЙ ПРИНИМАЕМЫЙ СИГНАЛ ИМПУЛЬСНЫХ РЛС ОБЗОРА И СОПРОВОЖДЕНИЯ И ЕГО ВОЗМОЖНОСТИ ПО РАЗРЕШЕНИЮ ЦЕЛЕЙ ПО ДАЛЬНОСТИ

В. В. Акимцев,
канд. техн. наук, доцент
А. Н. Мещерин,
адъюнкт
Санкт-Петербургское высшее военное училище радиоэлектроники

Рассмотрено цифровое представление входного процесса импульсных РЛС обзора и сопровождения. Найдены условия, при которых оцифрованный входной сигнал дает возможность реализовать во временной области процедуры разрешения неизвестного числа сигналов с постоянной разрешения, превышающей рэлеевский предел.

Цифровая модель принимаемого сигнала импульсных РЛС обзора и сопровождения

Радиолокационные станции обзора излучают, как правило, импульсные зондирующие сигналы и осуществляют сканирование окружающего пространства. Если в каком-либо азимутальном направлении зоны обзора РЛС присутствует цель, то сигнал, поступающий с этого направления на вход приемника РЛС, в общем случае является аддитивной смесью отраженного от цели сигнала $s(t)$, внутреннего шума приемника $w(t)$ и внешней помехи $n(t)$.

Отраженный от цели сигнал представляет собой пачку из M отраженных импульсов, следующих с частотой повторения F зондирующих импульсов. Каждый i-й импульс пачки можно представить в виде [1]

$$s_i(t) = g_i^2 A\sqrt{E}\, z(t) s_0(t - t_d),\ i = \overline{1, M}, \qquad (1)$$

где $g_i^2\sqrt{E}$ — амплитуда i-го импульса пачки на входе приемника РЛС, которая зависит от энергии сигнала E и весового множителя g_i, обусловленного модуляцией пачки диаграммой направленности приемо-передающей антенны; $z(t)$ — скалярная случайная функция времени, определяющая закон флюктуаций отраженных от цели импульсов; M — число выбранных для обработки импульсов пачки; $As_0(t)$ — функция времени единичной энергии, описывающая форму зондирующего сигнала; A — нормирующий множитель; t_d — время запаздывания отраженного сигнала. Если РЛС излучает простые зондирующие импульсы длительностью $\tau_и$, то

$$s_i(t) = g_i^2 A\sqrt{E} z(t)\cos\left[\omega_0(t - t_d) + \varphi_i\right],\ t - t_d \in [0, \tau_и],$$

где $\omega_0 = 2\pi f_0$ — частота заполнения; φ_i — начальная фаза i-го импульса пачки. Тогда значение A определяется из условия

$$A^2 \int_0^{\tau_и} \cos^2\omega_0 t\,\mathrm{d}t = 1,$$

которое дает $A = \sqrt{2/\tau_и}$. Таким образом:

$$\begin{gathered} s_i(t) = g_i^2 A\sqrt{E} z(t)\cos\left[\omega_0(t - t_d) + \varphi_i\right] = \\ = g_i^2\sqrt{\frac{2E}{\tau_и}} z(t)\cos\left[\omega_0(t - t_d) + \varphi_i\right] = \\ = g_i^2\sqrt{2P} z(t)\cos\left[\omega_0(t - t_d) + \varphi_i\right], \\ t - t_d \in [0,\ \tau_и], \end{gathered}$$

где $P = E/\tau_и$ — мощность сигнала.

Вводя диагональные матрицы $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(g_1, g_2, ..., g_M)$ и $\mathbf{Z} = \mathrm{diag}(z_1, z_2, ..., z_M)$, описывающие влияние направленных свойств антенны и флюктуаций импульсов отраженной пачки, и учитывая (1), можно представить входной процесс приемника РЛС в M периодах зондирования векторной функцией размером $M\times1$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{s}(t)+\mathbf{w}(t)+\mathbf{n}(t)=$$
$$=\sqrt{2P}\mathbf{G}^2\mathbf{Z}\mathbf{s}_0(t-t_d)+\mathbf{w}(t)+\mathbf{n}(t), \qquad (2)$$

где $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), ..., w_M(t)]^T$; $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), ..., n_M(t)]^T$; $w_k(t)$, $w_m(t)$ и $n_k(t)$, $n_m(t)$ — реализации случайных процессов $w(t)$ и $n(t)$ соответственно, разнесенные во времени на интервал $(k - m)/F$; $\mathbf{G}^2 = \mathbf{G}\cdot\mathbf{G}$;

$$\mathbf{s}_0(t-t_d)=\{\cos[\omega_0(t-t_d)+\varphi_1],$$
$$\cos[\omega_0(t-t_d)+\varphi_2],\ldots,\cos[\omega_0(t-t_d)+\varphi_M]\}^T,$$
$$t-t_d\in[0,\ \tau_и]. \qquad (3)$$

Компоненты вектора $\mathbf{w}(t)$ — взаимно независимые белые шумы: математическое ожидание вектора $\mathbf{w}(t)$ $M[\mathbf{w}(t)] = \mathbf{o}$, где $\mathbf{o}$ — нулевой вектор размером $M\times 1$; взаимные корреляционные функции его компонент $K_{ij}(\tau) = M[w_i(t)w_j(t + \tau)] = \sigma_w^2\delta_{ij}\delta(\tau)$, $(i, j = 1, 2, ..., M)$, где σ_w^2 — дисперсия компоненты $w_i(t)$, которая для всех $i = 1, 2, ..., M$ полагается одинаковой; δ_{ij} — дельта-символ Кронекера; $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака. Для процесса $\mathbf{n}(t)$ также $M[\mathbf{n}(t)] = \mathbf{o}$. Какие-либо сведения относительно свойств процесса $\mathbf{n}(t)$ в общем случае отсутствуют.

Отметим, что в зависимости от поведения начальных фаз φ_i в (3) отраженный сигнал может быть когерентным или некогерентным. Кроме того, вид матрицы $\mathbf{G}$ различен для РЛС обзора и для РЛС сопровождения. Для РЛС обзора $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(g_1, g_2, ..., g_M)$, для РЛС сопровождения $\mathbf{G} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размером $M\times M$. Нефлюктуирующим или дружно флюктуирующим отраженным сигналам соответствует $\mathbf{Z} = \mathbf{I}$. Для независимо флюктуирующих импульсов пачки (медленные флюктуации) $\mathbf{Z} = \mathrm{diag}(z_1, z_2, ..., z_M)$, где z_i — случайные величины с некоторым законом распределения. Эксперименты показали [1–3], что ширина спектра флюктуаций сигналов, отраженных от целей типа летящего самолета, имеет порядок десятков герц. Таким образом, случай быстрых флюктуаций для простых радиолокационных сигналов малой длительности не характерен и по этой причине здесь не рассматривается.

Цифровое представление входного процесса приемника РЛС [4, 5] получается путем временной дискретизации (2) с некоторым шагом Δ_t, так что входной процесс запишется в матричном виде

$$\mathbf{Y}=[\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \ldots,\ \mathbf{y}_r]=\mathbf{S}+\mathbf{W}+\mathbf{N}, \qquad (4)$$

где

$$\mathbf{y}_k=\{y_1[t_1+(k-1)\Delta_t],$$
$$y_2[t_2+(k-1)\Delta_t],\ \ldots,\ y_M[t_M+(k-1)\Delta_t]\}, \qquad (5)$$

где t_i, $(i = 1, 2, ..., M)$ — момент первого отсчета i-го импульса отраженной пачки относительно начала периода зондирования; очевидно: $t_i \approx t_1 + (i - 1)/F$, где t_1 — момент первого отсчета первого импульса пачки относительно начала периода зондирования; $k = 1, 2, ..., r$; r — число отсчетов импульсов отраженной пачки:

$$r=\mathrm{Ent}\left[\frac{\tau_и}{\Delta_t}\right],$$

где $\mathrm{Ent}[x]$ — целая часть x; $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ..., \mathbf{w}_r]$, $\mathbf{N} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, ..., \mathbf{n}_r]$ — матрицы размером $M\times r$, i-я строка которых представляет собой r отсчетов с шагом Δ_t шума $w(t)$ и помехи $n(t)$ соответственно в i-м периоде зондирования; $\mathbf{S}$ — матрица, k-й столбец которой $\mathbf{s}_k=\sqrt{2P}\mathbf{G}^2\mathbf{Z}\mathbf{s}_{0k}$ состоит из k-х отсчетов отраженного от цели сигнала в каждом из M периодов зондирования. Вектор $\mathbf{s}_{0k}$ в соответствии с (3) определяется как

$$\mathbf{s}_{0k}=\{\cos[\omega_0(t_1+(k-1)\Delta_t-t_d)+\varphi_1],$$
$$\cos[\omega_0(t_2+(k-1)\Delta_t-t_d)+\varphi_2],\ \ldots$$
$$\ldots,\ \cos[\omega_0(t_M+(k-1)\Delta_t-t_d)+\varphi_M]\}^T,$$
$$t_i+(k-1)\Delta_t-t_d\in[0,\ \tau_и],\ i=\overline{1,M},\ k=\overline{1,r}.$$

Если проводить анализ отраженного сигнала в пределах некоторого строба размером $M\times h$ $(h > r)$, то из (4) следует

$$\mathbf{Y}=[\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \ldots,\ \mathbf{y}_r,\ \ldots,\ \mathbf{y}_h]=$$
$$=\left[\underbrace{\mathbf{o},\ldots,\mathbf{o},}_{r_{01}}\ \underbrace{\mathbf{s}_1,\ldots\mathbf{s}_r,}_{r}\ \underbrace{\mathbf{o},\ldots,\mathbf{o},}_{r_{10}}\right]+\mathbf{W}+\mathbf{N}=$$
$$=[\mathbf{0}_{01},\ \mathbf{S},\ \mathbf{0}_{10}]+\mathbf{W}+\mathbf{N}=\Xi+\mathbf{W}+\mathbf{N}, \qquad (6)$$

где $\Xi = [\mathbf{0}_{01}, \mathbf{S}, \mathbf{0}_{10}]$ — блочная матрица; $\mathbf{0}_{01}$, $\mathbf{0}_{10}$ — нулевые блоки, состоящие из r_{01} и r_{10} нулевых столбцов соответственно; $r_{01} + r + r_{10} = h$. Очевидно, матрицы $\mathbf{W}$ и $\mathbf{N}$ в (6) теперь имеют размер $M\times h$.

Если в каком-либо угловом направлении зоны обзора РЛС находятся N неразрешаемых по скорости целей, то входной процесс приемника РЛС (2) запишется в виде

$$\mathbf{y}(t)=\sum_{j=1}^{N}\mathbf{s}_j(t)+\mathbf{w}(t)+\mathbf{n}(t)=$$
$$=\mathbf{G}^2\sum_{j=1}^{N}\sqrt{2P_j}\mathbf{Z}_j\mathbf{s}_0^{(j)}(t-t_{dj})+\mathbf{w}(t)+\mathbf{n}(t), \qquad (7)$$

где $\mathbf{Z}_j = \mathrm{diag}(z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, ..., z_M^{(j)})$ — диагональная матрица, описывающая влияние флюктуаций импульсов отраженной от j-й цели пачки; P_j и t_{dj} — мощность и время запаздывания сигнала, отраженного от j-й цели;

$$\mathbf{s}_0^{(j)}\left(t-t_{dj}\right)=\left\{\cos\left[\omega_0\left(t-t_{dj}\right)+\varphi_{1j}\right],\right.$$

$$\left.\cos\left[\omega_0\left(t-t_{dj}\right)+\varphi_{2j}\right],\ \ldots,\ \cos\left[\omega_0\left(t-t_{dj}\right)+\varphi_{Mj}\right]\right\}^T,$$

$$t-t_{dj}\in\left[0,\ \tau_{\text{и}}\right].$$

При перекрытии во времени сигналов $s_j(t)$ возникает задача разрешения целей по дальности. В этом случае модель (6) сводится к

$$\mathbf{Y}=\left[\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \ldots,\ \mathbf{y}_r,\ \ldots,\ \mathbf{y}_h\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\left[\mathbf{0}_{0j},\ \mathbf{S}_j,\ \mathbf{0}_{j0}\right]+\mathbf{W}+\mathbf{N}=\sum_{j=1}^{N}\Xi_j+\mathbf{W}+\mathbf{N},\quad (8)$$

где $\mathbf{S}_j=[\mathbf{s}_1^{(j)},\ \mathbf{s}_2^{(j)},\ \ldots,\ \mathbf{s}_r^{(j)}]=\sqrt{2P_j}\ \mathbf{G}^2\mathbf{Z}_j[\mathbf{s}_{01}^{(j)},\ \mathbf{s}_{02}^{(j)},\ \ldots,\ \mathbf{s}_{0r}^{(j)}]$ — матрица, состоящая из r столбцов, являющихся отсчетами отраженного от j-й цели сигнала в каждом из M периодов зондирования;

$$\mathbf{s}_{0k}^{(j)}=\left\{\cos\left[\omega_0\left(t_1+(k-1)\Delta_t-t_{dj}\right)+\varphi_{1j}\right],\right.$$

$$\cos\left[\omega_0\left(t_2+(k-1)\Delta_t-t_{dj}\right)+\varphi_{2j}\right],\ldots$$

$$\left.\ldots,\ \cos\left[\omega_0\left(t_M+(k-1)\Delta_t-t_{dj}\right)+\varphi_{Mj}\right]\right\}^T,$$

$$t_i+(k-1)\Delta_t-t_{dj}\in\left[0,\ \tau_{\text{и}}\right],\ i=\overline{1,M},\ k=\overline{1,r};\quad (9)$$

$\mathbf{0}_{0j}$, $\mathbf{0}_{j0}$ — нулевые блоки, состоящие из r_{0j} и r_{j0} нулевых столбцов соответственно; $r_{0j}+r+r_{j0}=h$. Число отсчетов импульсов суммарной отраженной пачки (число столбцов блока $\Sigma\mathbf{S}_j$ блочной матрицы $\Sigma\Xi_j$), очевидно, равно

$$p=\mathrm{Ent}\left[\frac{\tau_{\text{и}}+\max\limits_j\left(\delta t_{1j}\right)}{\Delta_t}\right]=\mathrm{Ent}\left[\frac{\tau_{\text{и}}}{\Delta_t}+\frac{\max\limits_j\left(\delta t_{1j}\right)}{\Delta_t}\right]\geq r,$$

где δt_{1j} — временной сдвиг между перекрывающимися сигналом от j-й цели и пришедшим первым по времени сигналом от ближайшей цели ($j=1, 2, \ldots, N$).

Цифровая модель (8), (9) входного процесса приемника импульсной РЛС является исходной. Как видно, ее свойства зависят от величины выбранного шага дискретизации Δ_t. Путем анализа этой зависимости с позиций использования модели в задаче разрешения сигналов по времени можно сформулировать требования к величине Δ_t.

Эффективный ранг корреляционной матрицы входного цифрового сигнала

Матрицу $\mathbf{Y}$ (8) размером $M\times h$ можно рассматривать как результат h наблюдений над реализациями M-мерного вектора $\mathbf{y}_k$ (5), образующего h столбцов матрицы $\mathbf{Y}$. В случае нормального с нулевым математическим ожиданием распределения векторов $\mathbf{y}_k$ статистические свойства этой матрицы задаются корреляционной матрицей [6], оценкой которой является величина

$$\mathbf{K}^*=\frac{1}{M-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}=\frac{1}{M-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\Xi_i+\mathbf{W}+\mathbf{N}\right)^T\left(\sum_{j=1}^{N}\Xi_j+\mathbf{W}+\mathbf{N}\right).$$

Вследствие независимости процессов $s(t)$, $w(t)$ и $n(t)$

$$\mathbf{K}^*=\frac{1}{M-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y}=\frac{1}{M-1}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Xi_i^T\Xi_j+\mathbf{W}^T\mathbf{W}+\mathbf{N}^T\mathbf{N}\right)=\mathbf{K}_\Sigma^*+\mathbf{K}_w^*+\mathbf{K}_n^*,\quad (10)$$

где

$$\mathbf{K}_\Sigma^*=\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Xi_i^T\Xi_j$$

— составляющая матрицы $\mathbf{K}^*$, обусловленная наличием отраженных от N целей сигналов; $\mathbf{K}_w^*=1/(M-1)\mathbf{W}^T\mathbf{W}$ — оценка корреляционной матрицы шума приемника $w(t)$; $\mathbf{K}_n^*=1/(M-1)\mathbf{N}^T\mathbf{N}$ — оценка корреляционной матрицы помехи $n(t)$.

Отсчеты внутреннего шума приемника $w(t)$ некоррелированы, поэтому $\mathbf{K}_w^*=\sigma_w^{2*}\mathbf{I}^*$, где σ^{2*} — оценка дисперсии процесса $w(t)$; $\mathbf{I}^*$ — матрица размером $h\times h$, отличающаяся от единичной только вследствие конечного размера векторов $\mathbf{w}_k$, $k=1, 2, \ldots, h$ (конечного числа импульсов отраженной пачки). Элементы матрицы $\mathbf{K}_n^*$ имеют вид $(\mathbf{K}_n^*)_{ij}=\frac{1}{(M-1)}\mathbf{n}_i^T\mathbf{n}_j=\frac{1}{(M-1)}\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_j$, где $\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_j$ — скалярные произведения векторов, составленных из i-х и j-х отсчетов помехи $n(t)$ в каждом из M периодов зондирования, разнесенных на время $t_{ij}=(j-i)\Delta_t$. Следовательно, для широкого класса помех, время корреляции которых меньше величины Δ_t: $(\mathbf{K}_n^*)_{ij}=\frac{1}{(M-1)}\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_j=\sigma_n^{2*}\delta_{ij}$, где σ_n^{2*} — оценка дисперсии процесса $n(t)$. Таким образом: $\mathbf{K}_n^*=\sigma_n^{2*}\mathbf{I}^*$.

Составляющая $\mathbf{K}_\Sigma^*$ в (10) находится путем элементарных преобразований:

$$\mathbf{K}_\Sigma^*=\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Xi_i^T\Xi_j=\frac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{N}\Xi_j^T\Xi_j+$$

$$+\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\Xi_i^T\Xi_j=\sum_{j=1}^{N}\mathbf{K}_j^*+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\mathbf{K}_{ij}^*,\quad (11)$$

где $\mathbf{K}_j^*=1/(M-1)\Xi_j^T\Xi_j$; $\mathbf{K}_{ij}^*=1/(M-1)\Xi_i^T\Xi_j$. Из (8) следует, что матрицы $\mathbf{K}_j^*$ имеют блочную структуру:

$$\mathbf{K}_j^* = \frac{1}{M-1}\Xi_j^T \Xi_j = \frac{1}{M-1}\left[\mathbf{0}_{0j}, \mathbf{S}_j, \mathbf{0}_{j0}\right]^T \left[\mathbf{0}_{0j}, \mathbf{S}_j, \mathbf{0}_{j0}\right] =$$

$$= \frac{1}{M-1}\left[\mathbf{0}_{M,r_{0j}}, \mathbf{S}_j, \mathbf{0}_{M,r_{j0}}\right]^T \left[\mathbf{0}_{M,r_{0j}}, \mathbf{S}_j, \mathbf{0}_{M,r_{j0}}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r_{0j},r_{0j}} & \mathbf{0}_{r_{0j},r} & \mathbf{0}_{r_{0j},r_{j0}} \\ \mathbf{0}_{r,r_{0j}} & \mathbf{K}^{*(j)} & \mathbf{0}_{r,r_{j0}} \\ \mathbf{0}_{r_{j0},r_{0j}} & \mathbf{0}_{r_{j0},r} & \mathbf{0}_{r_{j0},r_{j0}} \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

размеры нулевых блоков которой указаны их индексами. Блок $\mathbf{K}^{*(j)}$ размером $r \times r$ составляют скалярные произведения $k_{kl}^{*(j)} = 1/(M-1)\mathbf{s}_k^{(j)}\mathbf{s}_l^{(j)}$ k-х и l-х отсчетов в M периодах зондирования сигнала, отраженного от j-й цели. Таким образом:

$$k^{*(j)}_{kl} = \frac{1}{M-1}\mathbf{s}_k^{(j)}\mathbf{s}_l^{(j)} = \frac{2P_j}{M-1}\left(\mathbf{G}^2\mathbf{Z}_j\mathbf{s}_{0k}^{(j)}\right)^T \mathbf{G}^2\mathbf{Z}_j\mathbf{s}_{0l}^{(j)}. \quad (13)$$

Подстановка в (13) значений $\mathbf{s}_{0k}^{(j)}$ и $\mathbf{s}_{0l}^{(j)}$ из (9) и использование свойств диагональных матриц дает

$$k^{*(j)}_{kl} =$$

$$= \frac{2P_j}{M-1}\sum_{i=1}^{M} g_i^4 \left(z_i^{(j)}\right)^2 \cos\left\{\omega_0\left[t_i + (k-1)\Delta_t - t_{dj}\right] + \varphi_{ij}\right\} \times$$

$$\times \cos\left\{\omega_0\left[t_i + (l-1)\Delta_t - t_{dj}\right] + \varphi_{ij}\right\},$$

где g_i — элементы диагональной матрицы $\mathbf{G}$, описывающие влияние направленных свойств антенны; $z_i^{(j)}$ — элементы диагональной матрицы $\mathbf{Z}_j$, описывающие влияние флюктуаций импульсов отраженной от j-й цели пачки. Пренебрегая быстро флюктуирующей составляющей двойной частоты, которая не имеет практического значения, окончательно получим

$$k^{*(j)}_{kl} = \frac{P_j}{M-1}\sum_{i=1}^{M} g_i^4 \left(z_i^{(j)}\right)^2 \cos\left[\omega_0 (k-l)\Delta_t\right] =$$

$$= \frac{P_j}{M-1}\cos\left[\omega_0 (k-l)\Delta_t\right]\sum_{i=1}^{M} g_i^4 \left(z_i^{(j)}\right)^2 =$$

$$= \sigma_j^2 \cos\left[\omega_0 (k-l)\Delta_t\right], \qquad (14)$$

где $\sigma_j^2 = P_j/(M-1)\Sigma g_i^4 (z_i^{(j)})^2$ $(i = 1 .. M)$. Как видно из (14), величина всех элементов $k_{kl}^{*(j)}$ определяется значением выбранного шага дискретизации Δ_t.

Методы разрешения, основывающиеся на оценке эффективного ранга выборочной корреляционной матрицы (10) входного процесса приемника, подразумевают анализ ее структуры [7]. Они требуют когерентности (коррелированности) k-х и l-х отсчетов $\mathbf{s}_k^{(j)}$ и $\mathbf{s}_l^{(j)}$ в каждом из M периодов зондирования, что определяет структуры блоков $\mathbf{K}^{*(j)}$ матриц $\mathbf{K}_j^*$, и некогерентности (некоррелированности) отсчетов $\mathbf{w}_k$ и $\mathbf{w}_l$, а также $\mathbf{n}_k$ и $\mathbf{n}_l$ в каждом из M периодов зондирования, что предполагает диагональную структуру матриц $\mathbf{K}_w^*$ и $\mathbf{K}_n^*$. Исходя из этих требований можно определить величину шага дискретизации Δ_t.

Некоррелированность k-х и l-х отсчетов $\mathbf{w}_k$ и $\mathbf{w}_l$ очевидна. Как отмечалось, для широкого класса помех, время корреляции которых меньше величины Δ_t, некоррелированность k-х и l-х отсчетов $\mathbf{n}_k$ и $\mathbf{n}_l$ в каждом из M периодов зондирования также практически обеспечена. Следствием этого является близкая к диагональной структура матриц $\mathbf{K}_w^* = \sigma_w^{2*}\mathbf{I}^*$ и $\mathbf{K}_n^* = \sigma_n^{2*}\mathbf{I}^*$.

Когерентность k-х и l-х отсчетов $\mathbf{s}_k^{(j)}$ и $\mathbf{s}_l^{(j)}$ будет обеспечена только в том случае, когда элементы (14) блоков $\mathbf{K}^{*(j)}$ матриц $\mathbf{K}_j^*$ (12) примут экстремальные значения. Очевидно, величина шага дискретизации Δ_t, при котором величины $k_{kl}^{*(j)}$ (14) достигают экстремума, определяется из условия $\mathrm{d}k_{kl}^{*(j)}/\mathrm{d}\Delta_t = 0$. Из (14)

$$\frac{\mathrm{d}k^{*(j)}_{kl}}{\mathrm{d}\Delta_t} = -\sigma_j^2\omega_0 (k-l)\sin\left[\omega_0 (k-l)\Delta_t\right] = 0,$$

и значение Δ_t находится из уравнения $\sin[\omega_0(k - l)\Delta_t] = 0$, что дает

$$(k-l)\Delta_t = \frac{n\pi}{\omega_0} = \frac{n}{2f_0},$$

где n — любое целое число; $f_0 = \omega_0/2\pi$. Следовательно, величина $(k - l)\Delta_t$ должна быть кратна половине периода частоты заполнения f_0 отраженного импульса, что возможно лишь в случае, когда величина Δ_t кратна половине периода частоты f_0. Таким образом, корреляция k-х и l-х отсчетов $\mathbf{s}_k^{(j)}$ и $\mathbf{s}_l^{(j)}$ достигает экстремума при [4]

$$\Delta_t = \frac{n}{2f_0} < \tau_{\text{и}}. \qquad (15)$$

Если Δ_t удовлетворяет (15), то

$$k^{*(j)}_{kl} = \sigma_j^2 \cos\left[\omega_0 (k-l)\Delta_t\right] =$$

$$= \sigma_j^2 \cos\left[\pi n (k-l)\right] = (-1)^{n|k-l|}\sigma_j^2.$$

В этом случае

$$\mathbf{K}^{*(j)} = \sigma_j^2 \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n & \ldots & (-1)^{n(r-1)} \\ (-1)^n & 1 & \ldots & (-1)^{n(r-2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{n(r-1)} & (-1)^{n(r-2)} & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Все строки (столбцы) блока (16) линейно зависимы (выражаются один через другой). Поэтому [8, 9] его ранг rank$\mathbf{K}^{*(j)} = 1$. Следовательно, и rank$\mathbf{K}^*_j =$ $=$ rank$\mathbf{K}^{*(j)} = 1$ для всех $j = 1, 2, \ldots, N$.

Матрицы взаимной корреляции $\mathbf{K}^*_{ij}$ в (11) также имеют блочную структуру:

$$\mathbf{K}^*_{ij} = \frac{1}{M-1}\Xi_i^T \Xi_j = \frac{1}{M-1}[\mathbf{0}_{0i}, \mathbf{S}_i, \mathbf{0}_{i0}]^T\left[\mathbf{0}_{0j}, \mathbf{S}_j, \mathbf{0}_{j0}\right] =$$

$$= \frac{1}{M-1}\left[\mathbf{0}_{M,r_{0i}}, \mathbf{S}_i, \mathbf{0}_{M,r_{i0}}\right]^T\left[\mathbf{0}_{M,r_{0j}}, \mathbf{S}_j, \mathbf{0}_{M,r_{j0}}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r_{0i},r_{0j}} & \mathbf{0}_{r_{0i},r} & \mathbf{0}_{r_{0i},r_{j0}} \\ \mathbf{0}_{r,r_{0j}} & \mathbf{K}^{*(ij)} & \mathbf{0}_{r,r_{j0}} \\ \mathbf{0}_{r_{i0},r_{0j}} & \mathbf{0}_{r_{i0},r} & \mathbf{0}_{r_{i0},r_{j0}} \end{bmatrix}.$$

Элементы $k^{*(ij)}_{kl} = 1/(M-1)\mathbf{s}^{(i)}_k \mathbf{s}^{(j)}_l$ блока $\mathbf{K}^{*(ij)}$ находятся таким же способом, что и вычисленные ранее элементы $k^{*(j)}_{kl}$ блоков $\mathbf{K}^{*(j)}$ матриц $\mathbf{K}^*_j$. С учетом (15) и формул приведения $\cos(n\pi + x) = (-1)^n \times$ $\times \cos(x)$, $n = 1, 2, \ldots$

$$k^{*(ij)}_{kl} = \frac{\sqrt{P_i P_j}}{M-1}(-1)^{n(k-l)} \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{M} g_m^4 z_m^{(i)} z_m^{(j)} \cos\left[\Phi_m + \varphi_{mi} - \varphi_{mj}\right],$$

где $\Phi_m = \omega_0[t_m^{(i)} - t_m^{(j)} + t_{di} - t_{dj}]$; $t_m^{(i)}$, $t_m^{(j)}$ — моменты первых отсчетов, отраженных от i-й и j-й целей сигналов соответственно в m-м периоде зондирования относительно его начала. Начальные фазы импульсов пачек, отраженных от различных целей, обычно представляют собой независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале $[0, 2\pi]$. По этой причине для встречающихся на практике значений M, равных нескольким десяткам, все суммы $\Sigma g_m^4 z_m^{(i)} z_m^{(j)} \cos[\Phi_m + \varphi_{mi} -$ $- \varphi_{mj}] \to 0$ ($m = 1 \,..\, M$) и все блоки $\mathbf{K}^{*(ij)} \to \mathbf{0}^{*(ij)}$. Следовательно, в (11) все матрицы $\mathbf{K}^*_{ij} \to \mathbf{0}^*$.

Таким образом, если выполняется условие (15), то матрица (11) представляется суммой

$$\mathbf{K}^*_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{K}^*_j$$

матриц $\mathbf{K}^*_j$ единичного ранга. Это значит [9], что

$$\text{rank}\mathbf{K}^*_{\Sigma} = N. \qquad (17)$$

Равенство (17) удовлетворяется только тогда, когда блоки $\mathbf{K}^{*(j)}$ размером $r \times r$ занимают различные позиции в структуре матриц $\mathbf{K}^*_j$, $j = 1, 2, \ldots, N$, что требует наличия временных сдвигов между сигналами, отраженными от различных целей: $r_{0i} \neq r_{0j}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$. Исходя из этого можно заключить, что rank$\mathbf{K}^*_{\Sigma} = N$ только в том случае, если временные сдвиги δt_{ij} между перекрывающимися сигналами, отраженными от i-й и j-й целей, удовлетворяют условию

$$\left|\delta t_{ij}\right| = \left|t_{dj} - t_{di}\right| \geq \Delta_t, \; i \neq j, \; i, j = \overline{1, N}.$$

Минимальное значение

$$\left|\delta t_{ij}\right|_{\min} = \Delta_t, \; i \neq j, \; i, j = \overline{1, N},$$

очевидно, представляет собой *предельно достижимую* (*потенциальную*) *разрешающую способность по времени* метода, основанного на оценке ранга выборочной корреляционной матрицы $\mathbf{K}^*$ (10) входного процесса приемника в отсутствие шума $w(t)$ и помехи $n(t)$.

При наличии шума $w(t)$ и помехи $n(t)$ матрица

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}^*_{\Sigma} + \mathbf{K}^*_w + \mathbf{K}^*_n = \mathbf{K}^*_{\Sigma} + \left(\sigma_w^{2*} + \sigma_n^{2*}\right)\mathbf{I}^*.$$

Поскольку обычно $M > h$, то в этом случае rank$\mathbf{K}^* = h$, а структура $\mathbf{K}^*$ такова [7], что она имеет N доминирующих собственных значений (главных компонент), обусловленных сигнальной составляющей $\mathbf{K}^*_{\Sigma} = \Sigma\mathbf{K}^*_j$ ($j = 1 \,..\, N$), и $h-N$ малых собственных значений, обусловленных составляющей $(\sigma_w^{2*} + \sigma_n^{2*})\mathbf{I}^*$ и конечным размером векторов $\mathbf{w}_k$, $\mathbf{n}_k$, $k = 1, 2, \ldots, h$ (конечным числом импульсов отраженной пачки). В работе [7] показано, что малые собственные значения λ_i^* ($i = N + 1, \ldots, h$) матрицы $\mathbf{K}^*$ имеют смысл выборочной дисперсии $\sigma_w^{2*} + \sigma_n^{2*}$. Вследствие конечного объема выборки они отличаются от генеральной дисперсии, но обладают свойством однородности. С другой стороны, все главные компоненты λ_i^* ($i = 1, 2, \ldots, N$) различаются по величине, но строго больше выборочной дисперсии $\sigma_w^{2*} + \sigma_n^{2*}$. На этом свойстве матрицы $\mathbf{K}^*$ можно построить процедуру разрешения сигналов по времени, связанную с оценкой ее эффективного ранга (числа ее главных компонент).

Таким образом, цифровая модель (8), (9) входного процесса приемника импульсной РЛС при условии, что шаг дискретизации Δ_t удовлетворяет условию (15), дает возможность реализовать во временной области алгоритмы разрешения отраженных от неизвестного числа N целей сигналов, обеспечивая потенциальную разрешающую способность по времени, равную величине шага дискретизации Δ_t.

Применение непараметрических методов для разрешения сигналов по времени

Понятие «разрешение сигналов» базируется на *статистических понятиях* различения, разделения, обнаружения и оценки параметров сигналов [10]. Исходя из этой точки зрения следует определить такие характеристики входного процесса приемника РЛС, которые при наложении отраженных от нескольких целей сигналов приобретали бы *различия*, связанные с числом целей N и рассогласованием их координат. Эти различия должны быть заметными, так чтобы их можно было *обнаружить*. В цифровой модели принимаемого сигнала (8), (9) заложена такая возможность.

Действительно, столбцы $\mathbf{s}_{0k}^{(j)}$ (9) блоков $\mathbf{S}_j = [\mathbf{s}_1^{(j)}, \mathbf{s}_2^{(j)}, \ldots, \mathbf{s}_r^{(j)}] = \sqrt{2P_j}\,\mathbf{G}^2\mathbf{Z}_j[\mathbf{s}_{01}^{(j)}, \mathbf{s}_{02}^{(j)}, \ldots, \mathbf{s}_{0r}^{(j)}]$ блочной матрицы Ξ_j представляют собой гармонические функции с периодом $2\pi/\omega_0 = 1/f_0$. Поэтому при выборе шага дискретизации Δ_t, удовлетворяющего условию [5]

$$\Delta_t = \frac{2\pi n}{\omega_0} = \frac{n}{f_0} < \tau_{\text{и}}, \qquad (18)$$

где n — любое целое число:

$$\mathbf{s}_{0k}^{(j)} = \left\{\cos\left[\omega_0\left(t_1 + 2\pi n\frac{(k-1)}{\omega_0} - t_{dj}\right) + \varphi_{1j}\right],\right.$$
$$\cos\left[\omega_0\left(t_2 + 2\pi n\frac{(k-1)}{\omega_0} - t_{dj}\right) + \varphi_{2j}\right], \ldots$$
$$\left.\ldots, \cos\left[\omega_0\left(t_M + 2\pi n\frac{(k-1)}{\omega_0} - t_{dj}\right) + \varphi_{Mj}\right]\right\}^T =$$
$$= \left\{\cos\left[\omega_0\left(t_1 - t_{dj}\right) + \varphi_{1j}\right], \cos\left[\omega_0\left(t_2 - t_{dj}\right) + \varphi_{2j}\right], \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \cos\left[\omega_0\left(t_M - t_{dj}\right) + \varphi_{Mj}\right]\right\}^T,$$
$$t_i + 2\pi n\frac{(k-1)}{\omega_0} - t_{dj} \in [0,\ \tau_{\text{и}}],$$
$$i = \overline{1, M},\quad k = \overline{1, r}. \qquad (19)$$

Как видно из (19), векторы $\mathbf{s}_{0k}^{(j)}$ блоков $\mathbf{S}_j$ блочных матриц Ξ_j не зависят от индекса k (не отличаются друг от друга). Следовательно, блоки $\mathbf{S}_j$ состоят из одинаковых столбцов $\mathbf{s}_1^{(j)} = \mathbf{s}_2^{(j)} = \ldots = \mathbf{s}_r^{(j)} = \sqrt{2P_j}\,\mathbf{G}^2\mathbf{Z}_j\mathbf{s}_{01}^{(j)}$, где

$$\mathbf{s}_{01}^{(j)} = \left\{\cos\left[\omega_0\left(t_1 - t_{dj}\right) + \varphi_{1j}\right],\right.$$
$$\left.\cos\left[\omega_0\left(t_2 - t_{dj}\right) + \varphi_{2j}\right], \ldots, \cos\left[\omega_0\left(t_M - t_{dj}\right) + \varphi_{Mj}\right]\right\}^T,$$
$$t_i - t_d \in [0,\ \tau_{\text{и}}],\ i = \overline{1, M},$$

и их можно представить в виде

$$\mathbf{S}_j = \left[\mathbf{s}_1^{(j)}, \mathbf{s}_2^{(j)}, \ldots, \mathbf{s}_r^{(j)}\right] =$$
$$= \sqrt{2P_j}\,\mathbf{G}^2\mathbf{Z}_j\left[\mathbf{s}_{01}^{(j)}, \mathbf{s}_{01}^{(j)}, \ldots, \mathbf{s}_{01}^{(j)}\right].$$

В этом случае модель (8) запишется как

$$\mathbf{Y} = \left[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_r, \ldots, \mathbf{y}_h\right] = \sum_{j=1}^{N}\Xi_j + \mathbf{W} + \mathbf{N} =$$
$$= \sum_{j=1}^{N}\left[\mathbf{0}_{0j},\ \mathbf{S}_j,\ \mathbf{0}_{j0}\right] + \mathbf{W} + \mathbf{N} =$$
$$= \mathbf{G}^2\sum_{j=1}^{N}\sqrt{2P_j}\,\mathbf{Z}_j\left[\underbrace{\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{o}}_{r_{0j}},\ \underbrace{\mathbf{s}_{01}^{(j)}, \mathbf{s}_{01}^{(j)}, \ldots, \mathbf{s}_{01}^{(j)}}_{r},\ \underbrace{\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{o}}_{r_{j0}}\right] +$$
$$+ \mathbf{W} + \mathbf{N}. \qquad (20)$$

Модель (20) имеет важное свойство [5]: столбцы $\mathbf{y}_k$ матрицы $\mathbf{Y}$ чувствительны к распределению отраженных от различных целей сигналов по времени запаздывания δt_{1j}. Как видно, первые $r_{0N} = \min r_{0j}$ и последние $r_{N0} = \min r_{j0}$ столбцов матрицы $\mathbf{Y}$ являются отсчетами только смеси внутреннего шума приемника $w(t)$ и внешней помехи $n(t)$. Таким образом, $r_{0N} + r_{N0}$ столбцов матрицы $\mathbf{Y}$ *статистически однородны* (имеют одно и то же распределение). В остальных p столбцах матрицы $\mathbf{Y}$, в которых располагается блок $\Sigma\mathbf{S}_j$, наряду с отсчетами шума $w(t)$ и помехи $n(t)$ присутствуют дополнительно отсчеты одного или нескольких отраженных от разных целей сигналов. Наличие отсчетов сигналов в этих столбцах изменяет параметры их распределения или само их распределение, т. е. ведет к появлению *статистической неоднородности* некоторого числа столбцов матрицы $\mathbf{Y}$. Неоднородности некоторого числа выборок $\mathbf{y}_k$ можно *обнаружить* при помощи подходящих непараметрических тестов. Это обстоятельство дает возможность использовать непараметрические методы в задаче разрешения целей по дальности. Наличие обнаруженных неоднородностей некоторых из p столбцов $\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_l, \mathbf{y}_m, \ldots \in \Sigma\mathbf{S}_j$ матрицы $\mathbf{Y}$, вызванных наличием одновременных отсчетов разного числа перекрывающихся сигналов, отраженных от различных целей, может служить основой для разрешения по дальности неизвестного числа N целей. Очевидно, потенциальная разрешающая способность по времени, достигаемая при таком подходе, равна величине шага дискретизации Δ_t (18).

Отметим, что величина шага дискретизации Δ_t (15) может принимать значения в два раза меньшие, чем величина шага дискретизации Δ_t (18). Это значит, что процедуры разрешения сигналов по времени, основанные на оценке эффективного ранга выборочной корреляционной матрицы (10) входного процесса приемника, теоретически могут обеспечить в два раза лучшую разрешающую способность по дальности, чем процедуры разрешения, основанные на использовании непараметрических тестов. Однако с этим обстоятельством можно не считаться, так как речь идет о значении Δ_t, определяемом несколькими периодами промежуточной частоты приемника f_0. При значениях f_0 порядка десятков мегагерц величины Δ_t (15) и (18) имеют порядок 10^{-7}с, что соответствует разрешающей способности по дальности, равной нескольким десяткам метров. Очевидно, надлежащим выбором промежуточной частоты приемника f_0 всегда можно достичь требуемого из практических соображений значения потенциальной разрешающей способности по времени $|\delta t_{ij}|_{\min} = \Delta_t$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., N$ как для Δ_t, определяемого в соответствии с (15), так и для Δ_t, определяемого в соответствии с (18).

Литература

1. Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Г. П. Тартаковского. Т. 1. М.: Сов. радио, 1963. 424 с.
2. **Marcum J. I.** A statistical theory of target detection by pulsed radar // IEEE Trans. Apr. 1960. Vol. IT-6. N 2. P. 59–144.
3. **Swerling D.** Probability of detection for fluctuating targets // IEEE Trans. Apr. 1960. Vol. IT-6. N 2. P. 269–308.
4. **Акимцев В. В., Гниденко И. Ю.** Алгоритм разрешения-обнаружения целей по дальности в обзорных РЛС // Радиотехника. 2002. № 1. С. 61–66.
5. **Акимцев В. В.** Разрешающая способность по дальности при цифровой обработке сигналов // Радиотехника. 2004. № 1. С. 3–11.
6. **Налимов В. В.** Теория эксперимента. М.: Наука, 1971. 208 с.
7. **Benvenu G., Kopp L.** Optimality of high resolution array processing using eigensystem approach // IEEE Trans. Oct. 1983. Vol. ASSP-31. N 5. P. 1235–1247.
8. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Наука, 1970. 720 с.
9. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
10. **Царьков Н. М.** Многоканальные радиолокационные измерители. М.: Сов. радио, 1980. 192 с.