УДК 681.3

МАТРИЦЫ АДАМАРА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА *

Н. А. Балонин,
канд. техн. наук, доцент
Л. А. Мироновский,
доктор техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

*Рассматриваются классические матрицы Адамара и близкие к ним **C**-матрицы. Вводятся так называемые **M**-матрицы как возможное обобщение матриц Адамара на случай нечетных порядков n. Описан компьютерный алгоритм, облегчающий отыскание таких матриц. Приведены конкретные примеры **M**-матриц, найденных сочетанием аналитических и численных методов, и перечисляются их свойства.*

*Classical Hadamard matrices as well as a related class of **C**-matrices are considered. We introduce **M**-matrices as a possible generalization of Hadamard matrices in the case of odd order n. A computer algorithm for finding such matrices is described. Finally, we give concrete examples of **M**-matrices found by a combined analytic-numeric method, and list some of their properties.*

Введение

Матрицы Адамара находят широкое применение в теории кодирования (коды, исправляющие ошибки), теории планирования многофакторных экспериментов (ортогональные блок-схемы) и прочих областях. Они обладают рядом замечательных свойств, отличающих их от других ортогональных матриц. К ним относятся, в частности, минимальность первой (столбцовой) и чебышевской (строчной) норм, минимальность максимального по модулю элемента, а также максимальная близость элементов между собой.

К сожалению, матрицы Адамара существуют далеко не при всех четных порядках n, а при нечетных n вообще не существуют. Поэтому возникает задача отыскания ортогональных матриц, наиболее близких по своим свойствам к матрицам Адамара. В настоящей работе исследуется задача поиска ортогональных матриц, максимальный по модулю элемент которых минимален. Примером таких матриц для четных n, не кратных четырем, служат так называемые **C**-матрицы – симметричные ортогональные матрицы с нулевой диагональю и остальными элементами ± 1. При нечетных n структура искомых ортогональных матриц (далее они называются **M**-матрицами) становится более сложной. Отыскание их для каждого нечетного n сопряжено со значительными трудностями.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 04-01-00464, 04-07-90354.

Прежде чем приступить к решению этой задачи, приведем известные результаты для четных n, в первую очередь, для n, кратных четырем.

Известные результаты

Матрицы Адамара. Напомним, что матрицей Адамара порядка n называется такая $n \times n$-матрица $\mathbf{A}$ с элементами ± 1, что $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = n\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица [1].

Простейшая матрица Адамара имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

она ортогональна: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = 2\mathbf{E}$ и симметрична.

Легко убедиться, что если $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ – матрицы Адамара порядков m и n соответственно, то их кронекерово произведение, т. е. матрица $\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}$, является матрицей Адамара порядка mn. Например, если $\mathbf{A}$ – матрица Адамара 2-го порядка, то в результате кронекерова произведения $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}$ получим матрицу Адамара 4-го порядка

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для существования матриц Адамара порядка $n > 2$ необходимо, чтобы n делилось на 4. Гипотеза о том, что это условие является и достаточным, пока не доказана. Для практического получения матриц Адамара можно использовать команду hadamard пакета MATLAB, она позволяет строить матрицы Адамара для случаев, если n, $n/12$ или $n/20$ являются степенями двойки. К сожалению, сюда не входят такие n, кратные четырем, как 28, 36, 44, 52, 56, 60 и другие, хотя для них уже давно найдены матрицы Адамара.

С-матрицы. **С**-матрицей (Conference-Matrix) называется любая матрица **С** порядка n с нулями на главной диагонали и $+1$ и -1 на остальных местах, удовлетворяющая условию $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = (n-1)\mathbf{E}$.

Простейшие С-матрицы имеют вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Первая и третья из них симметричны, вторая и четвертая – кососимметричны.

Симметричные **С**-матрицы порядка n могут существовать лишь в том случае, если $n-2$ делится на 4, а $n-1$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел. Например, при $n = 2, 6, 10, 14, 18$ они существуют, а при $n = 22$ – нет, так как число 21 не представляется суммой двух квадратов.

Нормированные **С**-матрицы, порядок которых отличается от адамаровых на два, обладают тем же экстремальным качеством, что и матрицы Адамара: максимальный по модулю элемент их минимален (на классе ортогональных матриц). Будем далее обозначать максимальный по модулю элемент ортогональной матрицы через α. Величина этого элемента для **С**-матриц равна $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$, т. е. лишь немного уступает матрицам Адамара, у которых $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Например, при $n = 6$ отличие составляет менее 10% .

Вместе обе эти формулы описывают точную нижнюю границу максимального по модулю элемента ортогональных матриц четного порядка: первая – для n, не кратных четырем, в частности, для 6, 10, 14, 18, 26; вторая – для n, кратных четырем, в частности, для 4, 8, 12, 16, 20.

В совокупности матрицы Адамара и **С**-матрицы дают решение задачи о поиске ортогональных матриц с минимальным по модулю элементом почти для всех четных n. Исключение составляют отдельные значения, такие как $n = 22$ и $n = 34$, решение для которых авторам неизвестно.

Значительно хуже обстоит дело для нечетных n, где известно лишь несколько оптимальных (ортогональных, с минимальным по модулю максимальным элементом) матриц для небольших значений n. Информация о них приводится ниже.

Оптимальные матрицы нечетного порядка (М-матрицы)

Назовем матрицы, доставляющие решение задачи о поиске ортогональных матриц с минимальным по модулю элементом для нечетных n, минимаксными или просто **М**-матрицами. Их главное свойство – минимальность величины α, т. е. значения максимального по модулю элемента на классе всех ортогональных матриц данного размера. Здесь можно выделить три задачи.

Задача 1. Поиск конкретных **М**-матриц для различных значений n.

Задача 2. Определение точной нижней границы α^* для величины максимальных по модулю элементов **М**-матриц α в зависимости от n: $\alpha \ge \alpha^* = f(n)$.

Задача 3. Определение числа L уровней элементов в **М**-матрице при разных n.

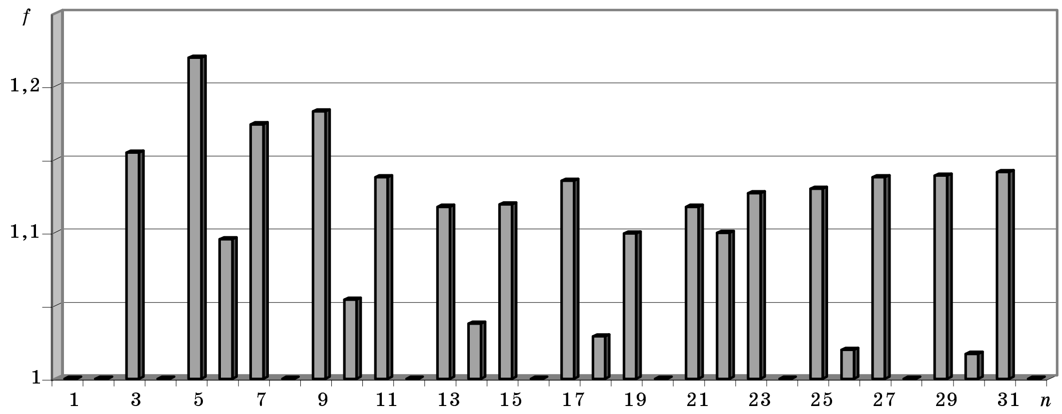
Так, матрицы Адамара могут быть названы одноуровневыми, поскольку все их элементы равны по абсолютной величине. **С**-матрицы – двухуровневые, модули их элементов равны 0 и 1. В общем случае **М**-матрицы оказываются L-уровневыми, причем L зависит от n.

Следует ожидать, что решение всех трех поставленных задач будет зависеть от того, какой остаток при делении на 4 дает нечетное число n (1 или 3). Соответственно, множество **М**-матриц распадается на два подмножества, отличающихся нижними границами, числом уровней L и типом матриц.

Алгоритм поиска оптимальных матриц

Чисто аналитическое решение рассматриваемой задачи найти затруднительно, поэтому воспользуемся помощью персональных компьютеров и математических пакетов для того, чтобы провести исследование комбинированным способом – сочетанием вычислительных (для определения структуры матриц) и аналитических (для установления точных значений элементов) методов.

Опишем вычислительный алгоритм, который использовался для нахождения **М**-матриц. Он строился на основе итераций, в которых на каждом шаге максимальный по модулю элемент α матрицы уменьшают по правилу $\alpha_{k+1} = \alpha_k k/(k+p)$ для ее элементов, где k – номер итерации, $p > 0$ –



■ ***Рис. 1.*** *Зависимость величины максимального элемента* $f = \alpha\sqrt{n}$

некоторое число. Так как после этого матрица перестает быть ортогональной, ее снова ортогонализируют путем вычисления полярного разложения. Напомним, что полярное разложение представляет данную матрицу в виде произведения ортогональной и симметричной матриц. Именно первая из них используется в дальнейшем. При оптимизации максимальный элемент несколько возрастает, но, как правило, не настолько, чтобы достичь прежнего значения.

Итерационный процесс сходится к некоторой ортогональной матрице, после чего его многократно повторяют, изменяя начальную матрицу и запоминая лучшее из найденных ранее решений.

Указанный процесс может быть записан в виде следующего алгоритма:

1) в качестве начального приближения берется квадратная невырожденная матрица;

2) матрица заменяется ортогональным сомножителем ее полярного разложения;

3) уменьшается максимальный по модулю элемент матрицы;

4) производится возврат к п. 2 до тех пор, пока процесс не сойдется к определенной матрице.

Этот алгоритм был реализован в виде MATLAB-функции procrust (название функции связано со сходством рассматриваемой задачи с известной в теории матриц проблемой Прокруста [2]):

```
Function [alpha,Q]= procrust(n);
% program finds Procrust matrix with minmax(abs(a(:)))
alpha=1; gam=2; p=10;
for j=1:10
   A=rand(n);
      if rank(A)<n, A=A+eye(n)/10;  end,
      for i=k:5000
      [U,S,V] = svd(A); Q=U*V'; M=max(abs(Q(:))); m=Q/M*(1+p/k); A=satlins(m);
      end
      a=Q; alpha=max(abs(a(:))); gamma=alpha*sqrt(n);
      if gamma<gam, X=a; y = alpha; gam=gamma; end
end
Q=X; alpha = y;
end
```

В качестве входного аргумента функции берется порядок n, а выходными являются искомая ортогональная матрица $\mathbf{Q}$ и ее максимальный элемент alpha.

Функция satlins из тулбокса NNet (Neural Network Toolbox) ограничивает амплитудное значение элементов не выше 1.

Компьютерные эксперименты показали, что указанный численный алгоритм дает хорошие результаты для $n < 20$. С его помощью были найдены **M**-матрицы для всех нечетных $n \le 11$.

Задача поиска **M**-матриц для $n > 11$ остается открытой, так же как и вопрос о числе уровней этих матриц при разных n.

Некоторые представления о нижней границе для показателя α (величине максимального элемента оптимальных матриц) можно получить из рис. 1. На нем показана зависимость величины максимального по модулю элемента α оптимальной матрицы, умноженной на $\sqrt{n}$, от размера матрицы n для $1 \le n \le 32$. Точки, лежащие на уровне единицы, относятся к матрицам Адамара, несколько выше лежат точки для **C**-матриц.

Выше всего находятся точки для нечетных значений n. Очевидно, что с ростом n все точки окажутся ниже некоторого уровня, и одна из задач состоит в том, чтобы оценить его величину.

Как видно, величина максимального элемента **M**-матриц соответствует оценке $c / \sqrt{n}$, где константа c больше единицы приблизительно на 10%. Первая же матрица 22-го порядка, которая выпадает из последовательности чередующихся через 4 (по порядку 6, 10, 14, 18, 26, 30) двухуровневых **C**-матриц, отвечает как раз этой оценке. При $n > 25$ график стабилизируется со значением $c = 1{,}14$ (у матриц Адамара $c = 1$, а у **C**-матриц этот показатель стремится к 1 с ростом n, в этом принципиальное различие рассматриваемого случая). Поскольку и прочие матрицы следуют определенной тенденции, вряд ли оценка изменится существенно.

Структура оптимальных матриц

Перейдем к описанию конкретных **M**-матриц для $n = 3, 5, 7, 9, 11$. Поиск этих матриц производился путем сочетания численного и символьного моделирования в пакетах MATLAB и MAPLE с помощью описанной выше и прочих специально разработанных программ [3].

Для случая $n = 3$ оптимальная матрица имеет вид

$$\mathbf{M}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Она ортогональна и симметрична, величина ее максимального элемента $\alpha = 2/3$. Матрица содержит два типа элементов, т. е. является двухуровневой. Она связана с геометрической задачей о вписывании данного правильного октаэдра в куб минимального размера [4].

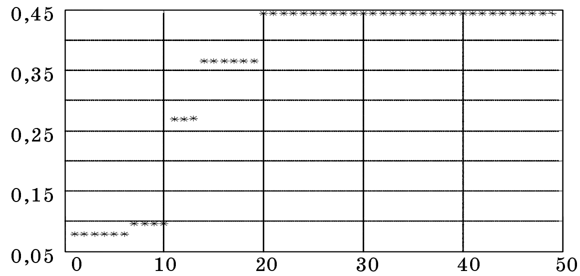
Для случая $n = 5$ оптимальная матрица оказалась трехуровневой:

$$\mathbf{M}_5 = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & -6 & 6 & -2 \\ 6 & -6 & -3 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & -6 & 3 \\ 6 & -2 & 6 & 3 & -6 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Она также ортогональна и симметрична, величина ее максимального элемента $\alpha = 6/11$. Из 25 ее элементов 15 равны 6/11, т. е. находятся на верхнем уровне, и по пять элементов на двух других. Таким образом, элементы верхнего уровня составляют 60% от общего числа (у матрицы $\mathbf{M}_3$ – 67%, а у матриц Адамара – 100%).

При исследовании случая $n = 7$ были найдены две матрицы: пятиуровневая матрица $\mathbf{M}_7$ со значением $\alpha = \frac{5+7\sqrt{7}}{53} \approx 0{,}444$ и двухуровневая матрица $\mathbf{N}_7$ со значением $\alpha = \frac{2+3\sqrt{2}}{14} \approx 0{,}446$. Структура этих матриц такова:

$$\mathbf{M}_7 = \begin{bmatrix} a & -d & c & a & -a & -a & -a \\ -d & c & a & a & a & a & -a \\ c & a & -d & a & -a & a & a \\ a & a & a & -c & b & -b & b \\ -a & a & -a & b & e & -a & -d \\ -a & a & a & -b & -a & -d & -e \\ -a & -a & a & b & -d & -e & a \end{bmatrix},$$



■ ***Рис. 2.*** *Распределение абсолютных величин элементов матрицы* $\boldsymbol{M}_7$

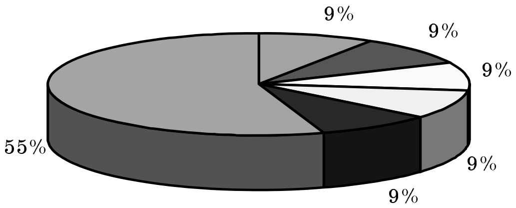
$$\mathbf{N}_7 = \begin{bmatrix} a & a & a & a & b & b & -b \\ a & -b & -b & a & -a & b & a \\ a & -b & a & -b & b & -a & a \\ a & a & -b & -b & -a & -a & -b \\ b & -a & b & -a & -b & a & -a \\ b & b & -a & -a & a & a & b \\ -b & a & a & -b & -a & b & a \end{bmatrix}.$$

В отличие от предыдущих случаев, элементы этих матриц иррациональны. Для $\mathbf{M}_7$ они содержат $\sqrt{7}$: $a = 3+3\sqrt{7}$, $b = 9$, $c = 5-\sqrt{7}$, $d = -6+3\sqrt{7}$, $e = 4+\sqrt{7}$, при нормировке все их надо разделить на $22+\sqrt{7}$. Элементы матрицы $\mathbf{N}_7$ содержат $\sqrt{2}$: $a = 2+\sqrt{2}$, $b = 2$. При нормировке их надо разделить на $2+4\sqrt{2}$.

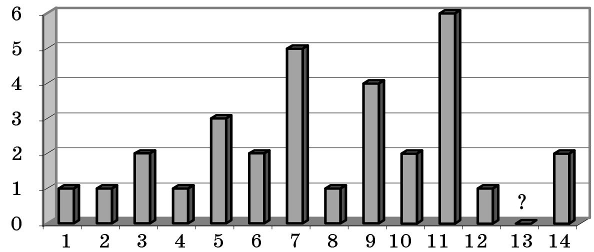
Распределение модулей элементов нормированной матрицы $\mathbf{M}_7$ по уровням, полученное в MATLAB с помощью команды plot(sort(abs(M7(:))),'*'), показано на рис. 2. На нем видно, что нижний уровень содержит 6 элементов, три следующих – 4, 3 и 6 элементов соответственно, наиболее многочисленный верхний уровень – 30 элементов, что составляет около 61% (примерно столько же, сколько и у матрицы $\mathbf{M}_5$).

В случае $n = 9$ лучшая из найденных матриц имеет 4 уровня и показатель $\alpha = \frac{3+\sqrt{3}}{12} = 0{,}3943$. Ее структура и элементы таковы:

$$\mathbf{M}_9 = \begin{bmatrix} d & b & b & b & b & b & b & b & b \\ b & a & a & a & -a & -a & -c & -c & -c \\ b & a & -c & -a & -c & a & a & -c & -a \\ b & a & -a & -c & a & -c & -a & -c & a \\ b & -a & -c & a & a & -c & a & -a & -c \\ b & -a & a & -c & -c & a & -c & -a & a \\ b & -c & a & -a & a & -c & -c & a & -a \\ b & -c & -c & -c & -a & -a & a & a & a \\ b & -c & a & a & -c & a & -a & a & -c \end{bmatrix},$$



■ *Рис. 3. Распределение числа элементов матрицы* $\mathbf{M}_{11}$ *по уровням*



■ *Рис. 4. Распределение количества уровней*

$12a = 3+\sqrt{3}$, $a = 0,3943$, $6b = \sqrt{6\sqrt{3}-6}$, $b = 0,3493$, $4c = \sqrt{3}-1$, $c = 0,1830$, $3d = 2\sqrt{3}-3$, $d = 0,1547$. Максимальный элемент $\frac{3+\sqrt{3}}{12} =$ $= 0,3943375$.

Здесь уже встречается иррациональность типа «корень из корня», возникающая при решении биквадратного уравнения.

Распределение модулей элементов матрицы $\mathbf{M}_9$ по уровням весьма неравномерно. Так, на нижнем уровне находится один элемент, на двух следующих – 24 и 16 элементов соответственно. На верхнем уровне находится 40 элементов, что составляет около 49% от общего числа.

Для $n = 11$ лучшая ортогональная матрица, найденная в MATLAB, имеет шестиуровневую структуру:

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} -b & a & f & a & a & d & c & e & a & -a & -a \\ -d & f & a & -a & e & -a & b & c & -a & -a & a \\ -a & -e & -c & a & d & -a & a & -a & f & a & b \\ a & -d & a & b & a & a & -f & -a & -e & -c & a \\ a & a & e & a & -b & -a & a & -d & -a & -f & -c \\ a & -a & a & -d & a & -e & a & f & c & b & -a \\ -f & b & d & -c & -a & a & a & -a & a & e & a \\ e & a & a & a & f & -c & -a & a & b & d & a \\ a & a & -a & -f & c & a & d & b & -a & a & e \\ a & -c & -b & e & -a & -f & a & a & a & -a & d \\ -c & -a & a & a & -a & b & e & a & -d & a & -f \end{bmatrix}.$$

Численные значения ее элементов следующие: $a = 0,34295283$, $b = 0,33572291$, $c = 0,30893818$, $d = 0,2439851$, $e = 0,15671878$, $f = 0,045364966$. Показатель $\alpha = 0,3429$ равен значению элемента a.

Распределение абсолютных величин элементов матрицы $\mathbf{M}_{11}$ по уровням показано на рис. 3. Верхний уровень содержит 66 элементов, остальные – по 11 элементов, всего $66 + 55 = 121$ элемент.

Распределение количества уровней в матрице в зависимости от их порядка показано на рис. 4.

Как видно, с ростом размерности матрицы происходит нерегулярное расслоение элементов, при том, что более половины от их количества совпадает по модулю с максимальным элементом – у матриц Адамара 100%. Количество уровней матрицы $\mathbf{M}_{13}$ находится под вопросом, поскольку численно-аналитические методы перестают быть действенными и пока не позволяют однозначно ответить на этот вопрос. Вместе с тем иногда кроме оптимальных вариантов наблюдаются субоптимальные с меньшим количеством уровней – отсюда возникает предположение, что и такие задачи, связанные с оптимизацией не только норм элементов, но и структуры – можно решать.

Заключение

Необходимость вычислять матрицы Адамара возникает при решении многих математических и технических задач. Однако классические матрицы Адамара и близкие к ним по свойствам **C**-матрицы не существуют при нечетных n. В статье выделен класс так называемых **M**-матриц, которые могут рассматриваться как обобщение матриц Адамара на случай нечетных n. Они представляют собой подмножество ортогональных матриц, у которых максимальный по абсолютной величине элемент минимален. Описан компьютерный алгоритм, облегчающий отыскание таких матриц, и приведены конкретные матрицы для $n \leq 11$.

Литература

1. **Hadamard J.** Resolution d'une question relative aux determinants// Bull. sci. math. 1893. Vol. 2. P. 240–248.
2. **Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 549 с.
3. **Шинтяков Д. В.** Алгоритм поиска матриц Адамара нечетного порядка: Сб. докл. // Девятая научная сессия ГУАП / ГУАП. СПб., 2006 (в печати).
4. **Медяник А. И.** Вписанный в куб правильный симплекс и матрицы Адамара полуциркулянтного типа // Матем. Физика, анализ, геометрия, 1997. Т. 4. № 4. С. 458–471.