УДК 519.2

ГЕНЕРИРОВАНИЕ ГАУССОВЫХ МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Л. А. Осипов,
доктор техн. наук, профессор
Ю. Г. Воробьева,
аспирант
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Анализируются матрицы точности гауссовых марковских последовательностей. Устанавливается свойство 2n–1-диагональности матрицы точности последовательности n-го порядка. Немарковские процессы аппроксимируются марковскими последовательностями методом удержания главных диагоналей матрицы точности. Разрабатываются процедуры генерирования марковских последовательностей n-го порядка.

Correlation matrices and precision matrices of Markov Gauss sequences are analyzed. We prove that the precision matrix of an order n Markov sequence has the 2n–1-diagonals property. Non-Markov processes are approximated by Markov sequences via retaining the principal diagonals of the precision matrix. Also, we develop some procedures to generate order n Markov sequences.

Введение

В науке и технике марковская модель широко применяется для описания случайных процессов [1]. Как правило, марковским называют марковский процесс первого порядка. Увеличение порядка марковской модели может улучшить точность аппроксимации реальных процессов. В работе анализируются корреляционные матрицы дискретных во времени гауссовых марковских процессов (последовательностей) n-го порядка, на основе полученных соотношений аппроксимируются исходные немарковские последовательности и рассчитываются MATLAB-генераторы марковских траекторий.

Пусть $\mathbf{X} \in \mathrm{N}(\mathbf{M}_X, \mathbf{B}_X)$ – $(p \times 1)$ – вектор отсчетов стационарного гауссова процесса. Разбиение вектора математических ожиданий $\mathbf{M}_X$ и корреляционной матрицы $\mathbf{B}_X$ на блоки [2, 3]

$$\mathbf{M}_X^T = \left[\mathbf{M}_k^T \,|\, \mathbf{M}_{p-k}^T\right] = \left[m_{x_1}, \ldots, m_{x_k} \,|\, m_{x_{k+1}}, \ldots, m_{x_p}\right];$$

$$\mathbf{B}_X = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right], \qquad (1)$$

где $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{22}$ – корреляционные матрицы первых k и последних $p–k$ отсчетов, позволяет рассчитать вектор математических ожиданий $\mathbf{M}$ и корреляционную матрицу $\mathbf{B}$ условной плотности распределения $f\left(\mathbf{X}_{p-k} \,|\, \mathbf{X}_k\right)$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{p-k} + \mathbf{C}\left(\mathbf{X}_k - \mathbf{M}_k\right); \qquad (2)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{22} - \mathbf{C}\mathbf{B}_{12}; \qquad (3)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}. \qquad (4)$$

Гауссовы марковские последовательности первого порядка

Корреляционная матрица $\mathbf{B}_X$ гауссовой последовательности $\mathbf{X}$, полученной дискретизацией с интервалом Δt стационарного марковского процесса первого порядка, имеет вид

$$\mathbf{B}_X = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & \ldots & b^{p-1} \\ b & 1 & b & \ldots & b^{p-2} \\ b^2 & b & 1 & \ldots & b^{p-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b^{p-1} & \ldots & b^2 & b & 1 \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

где $b=k(\Delta t)$ – корреляционный момент соседних отсчетов. Действительно, если матрица (5) подвергается такому разбиению (1), что $\mathbf{B}_{22} = b_{22} = \sigma^2$, то матрица, обратная блоку $\mathbf{B}_{11}$:

$$\mathbf{B}_{11}^{-1}=\frac{\sigma^{-2}}{1-b^2}\begin{bmatrix}1 & -b & 0 & 0 & \dots & 0\\ -b & 1+b^2 & -b & 0 & \dots & 0\\ 0 & -b & 1+b^2 & -b & \dots & 0\\ 0 & 0 & -b & 1+b^2 & -b & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b & 1\end{bmatrix} \qquad (6)$$

трехдиагональна. Вектор

$$\mathbf{B}_{21}=\sigma^2\begin{bmatrix}b^{p-1} & b^{p-2} & \dots & b\end{bmatrix},$$

так что вектор (4), определяющий условное математическое ожидание (2):

$$\mathbf{C}=\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & b\end{bmatrix}$$

имеет один последний ненулевой элемент, равный b, предыдущие $p-2$ элементы равны нулю. Зависимость условного математического ожидания от одного предыдущего значения есть одно из определений марковского процесса первого порядка [1].

Для двух последних значений x_{p-1}, x_p при фиксированных $x_1, \dots, x_{p-2}$ блоки

$$\mathbf{B}_{21}=\sigma^2\begin{bmatrix}b^{p-2} & b^{p-3} & \dots & b\\ b^{p-1} & b^{p-2} & \dots & b^2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{12}=\mathbf{B}_{21}^T,\ \ \mathbf{B}_{22}=\sigma^2\begin{bmatrix}1 & b\\ b & 1\end{bmatrix};$$

матрица (4)

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & b\\ 0 & 0 & \dots & 0 & b^2\end{bmatrix}$$

также определяет зависимость вектора условных математических ожиданий (2) от одного последнего фиксированного x_{p-1}. При фиксированных первых k отсчетах $(p-k)\times k$ матрица $\mathbf{C}$ для последующих $p-k$ значений процесса равна

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & b\\ 0 & 0 & \dots & 0 & b^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & b^{p-k}\end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Матрица (7), по сути, является матрицей связи наблюдаемого значения x_p с предыдущими.

В монографии [1] сформулировано фундаментальное свойство марковских последовательностей (первого порядка): любая подпоследовательность является марковской. Этот результат можно получить с помощью матрицы связи (4). Пусть корреляционная матрица процесса имеет вид (5): $\sigma^2=1$. Корреляционная матрица вектора $\mathbf{X}_{p-k}\,|\,\mathbf{X}_k$ ($\mathbf{X}_{p-k}$ – подпоследовательность $\mathbf{X}_p$)

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1-b^2 & b-b^3 & \dots & b^{p-k-1}-b^{p-k+1}\\ b-b^3 & 1-b^4 & \dots & b^{p-k-2}-b^{p-k+2}\\ b^2-b^4 & b-b^5 & \dots & b^{p-k-3}-b^{p-k+3}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b^{p-k-1}-b^{p-k+1} & b^{p-k-2}-b^{p-k+2} & \dots & 1-b^{2(p-k)}\end{bmatrix}, \qquad (8)$$

как и матрица исходной последовательности $\mathbf{B}_X$, описывает марковский процесс первого порядка. Действительно, блоки матрицы $\mathbf{B}_X$

$$\mathbf{B}_{11}=\begin{bmatrix}1 & b & \dots & b^{k-1}\\ b & 1 & \dots & b^{k-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b^{k-1} & b^{k-2} & \dots & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{21}=\begin{bmatrix}b^k & b^{k-1} & \dots & b\\ b^{k+1} & b^k & \dots & b^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b^{p-1} & b^{p-2} & \dots & b^{p-k}\end{bmatrix}$$

порождают матрицу связи (7) и произведение

$$\mathbf{CB}_{12}=\begin{bmatrix}b^2 & b^3 & \dots & b^{p-k+1}\\ b^3 & b^4 & \dots & b^{p-k+2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b^{p-k+1} & b^{p-k+2} & \dots & b^{2(p-k)}\end{bmatrix},$$

которое в соответствии с (3) дает условную корреляционную матрицу (8). Разбиение матрицы (8), например с блоком

$$\mathbf{B}_{11}=\begin{bmatrix}1-b^2 & b-b^3\\ b-b^3 & 1-b^4\end{bmatrix},$$

дает матрицу связи (4)

$$\mathbf{C}^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ b & b^2 & b^3 & \dots & b^{n-k-2}\end{bmatrix}$$

вида (7). Аналогичные результаты могут быть получены при любой размерности $m<p-k$ блока $\mathbf{B}_{11}$, т. е. матрица (8) – корреляционная матрица марковского процесса первого порядка.

Упрощение расчета условной дисперсии (3) достигается использованием матрицы точности (матрицы, обратной корреляционной [2, 3]). Матрица точности марковской последовательности первого порядка $\mathbf{D}=\mathbf{B}_X^{-1}$ – симметричная трехдиагональная матрица вида (6). При разбиении матриц

$$\mathbf{B}_X=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \sigma^2\end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12}\\ \mathbf{D}_{21} & d_{22}\end{bmatrix}$$

их произведение (единичная матрица)

$$\mathbf{B}_X\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11}+\mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{12}+\mathbf{B}_{12}d_{22}\\ \mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{11}+\sigma^2\mathbf{D}_{21} & \mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12}+\sigma^2 d_{22}\end{bmatrix}=$$

$$=\mathbf{I}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{11} & \mathbf{I}_{12}\\ \mathbf{I}_{21} & 1\end{bmatrix},$$

где $\mathbf{I}_{11}$ – единичная $(p-1)\times(p-1)$-матрица; $\mathbf{I}_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{bmatrix}$ – строка нулей; $\mathbf{I}_{12}=\mathbf{I}_{21}^T$. Из равенства

$$\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12}+\sigma_m^2 d_{22}=1$$

следует

$$\sigma^2=\frac{1-\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12}}{d_{22}},$$

условная дисперсия (3) наблюдаемого значения x_p равна

$$\sigma_p^2=\sigma^2\,|\,x_1,\ \dots,\ x_{p-1}=\sigma^2-\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}=$$

$$=\frac{1}{d_{22}}-\frac{\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{12}+d_{22}\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}}{d_{22}}. \qquad (9)$$

Из равенства

$$\mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{12}+d_{22}\mathbf{B}_{12}=\mathbf{I}_{12}=0$$

следует

$$\mathbf{D}_{12}=-d_{22}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}. \qquad (10)$$

Подстановка (10) в (9) дает соотношение для условной дисперсии

$$\sigma_p^2=\frac{1}{d_{22}}-\frac{-d_{22}\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}+d_{22}\mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}}{d_{22}}=\frac{1}{d_{22}}, \qquad (11)$$

она обратна последнему элементу матрицы точности.

Гауссовы марковские последовательности n-го порядка

Марковский процесс n-го порядка определяется как процесс с условной плотностью распределения [1]

$$f\left(x_{k+1},\ \dots,\ x_p\,|\,x_1,\ \dots,\ x_k\right)=$$

$$=f\left(x_{k+1},\ \dots,\ x_p\,|\,x_{k-n},\ \dots,\ x_k\right), \qquad (12)$$

в котором наблюдаемые значения зависят от n предыдущих. Такая зависимость задает общий вид матрицы связи (4): в ней отличен от нуля хотя бы один элемент каждого из n последних столбцов:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & c_{1(k-n+1)} & \dots & c_{1k}\\ 0 & \dots & 0 & c_{2(k-n+1)} & \dots & c_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & c_{(p-k)(k-n+1)} & \dots & c_{(p-k)k}\end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Например, при наблюдении семи значений процесса третьего порядка с нулевыми средними условное среднее (2) седьмого значения равно

$$\mathrm{M}\left[x_7\,|\,x_1,\ \dots,\ x_6\right]=\mathbf{CX}=c_4x_4+c_5x_5+c_6x_6,$$

так как матрица связи (13) имеет вид

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & c_4 & c_5 & c_6\end{bmatrix},\ c_4\neq 0,\ c_5\neq 0,\ c_6\neq 0.$$

Теорема. Матрица точности марковской последовательности n-го порядка имеет $2n+1$ главных (ненулевых) диагоналей, остальные элементы равны нулю.

Смысл утверждения в том, что матрица связи марковской последовательности n-го порядка имеет вид (13) в том и только том случае, если матрица точности имеет $2n+1$ ненулевых диагонали:

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1(n+1)} & 0 & \dots & 0\\ d_{21} & d_{22} & \dots & \dots & d_{2(n+2)} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ d_{(n+1)1} & d_{(n+1)2} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & d_{(n+2)2} & \dots & \dots & \dots & \dots & d_{(p-n)p}\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & d_{p(p-n)} & \dots & d_{p(p-1)} & d_{pp}\end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Необходимость. Можно показать, что при наблюдении p значений марковского процесса n-го порядка, из которых первые k фиксированы, матрицы (4) и (3) следующих $p-k$ значений равны

$$\mathbf{C}=-\mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{D}_{21}=\mathbf{BD}_{21}, \qquad (15)$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{D}_{22}^{-1}, \qquad (16)$$

где $\mathbf{D}_{21}$, $\mathbf{D}_{22}$ – $(p-k)\times k$ и $(p-k)\times(p-k)$ – блоки матрицы $\mathbf{D}$. Действительно, при умножении блочных матриц $\mathbf{DB}=\mathbf{I}$ одно их четырех произведений

$$\mathbf{D}_{21}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{D}_{22}\mathbf{B}_{22}=\mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ – $(p-k)\times(p-k)$ – единичная матрица. Отсюда

$$\mathbf{B}_{22} = \mathbf{D}_{22}^{-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{21}\mathbf{B}_{12}\right);$$

$$\mathbf{D}_{22}^{-1} = \mathbf{B}_{22} + \mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{D}_{21}\mathbf{B}_{12}. \qquad (17)$$

Условная корреляционная матрица (16) равна матрице (3) при выполнении равенств (15) и (17):

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{22} + \mathbf{D}_{22}^{-1}\mathbf{D}_{21}\mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{22} - \mathbf{C}\mathbf{B}_{12}.$$

Матрица связи (15) имеет вид (14), если в симметричной матрице точности (14) отличны от нуля элементы $2n+1$ главных диагоналей. В этом случае при любом блоке $\mathbf{D}_{22}^{-1}$ возможно такое разбиение матрицы (14), что в блоке $\mathbf{D}_{21}$ первые элементы всех строк будут равны нулю. Например, условно изображенную матрицу точности (звездочками обозначены ненулевые элементы) с семью диагоналями можно разбить на блоки следующим образом:

$$\mathbf{D} = \left[\begin{array}{ccccc|cc} * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{array}\right],$$

$$\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Произведение (15)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

– матрица связи двух значений с пятью предыдущими марковской последовательности третьего порядка.

Достаточность. Для того чтобы в матрице связи (15) элементы первого столбца были равны нулю, должны выполняться равенства

$$b_{11}d_{11} + b_{12}d_{21} + \ldots + b_{1(p-k)}d_{(p-k)1} = 0;$$

$$b_{21}d_{11} + b_{22}d_{21} + \ldots + b_{2(p-k)}d_{(p-k)1} = 0; \qquad (18)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{(p-k)1}d_{11} + b_{(p-k)2}d_{21} + \ldots + b_{(p-k)(p-k)}d_{(p-k)1} = 0,$$

являющиеся системой однородных линейных уравнений относительно d_{i1}. Она имеет ненулевое решение в том и только том случае, если определитель условной корреляционной матрицы $\mathbf{B}$ равен нулю, что невозможно по определению. Система уравнений вида (18) существует для второго, третьего и т. д. столбца матрицы связи, если он равен нулю. Таким образом, столбец матрицы (13) равен нулю только в том случае, если равен нулю соответствующий столбец матрицы $\mathbf{D}_{21}$. Последнее условие равносильно $2n+1$-диагональности симметричной матрицы связи.

Матрица связи марковской последовательности n-го порядка определяет необходимое и достаточное число k фиксированных значений в плотности распределения (12): $k = n$. Задание $k<n$ выделяет подпоследовательность k-го порядка. Увеличению $k = 1, 2, \ldots, n$ соответствует удержание в матрице (14) трех, пяти, ..., $2n+1$ ненулевых диагоналей – представление исходной последовательности марковскими последовательностями первого, второго, и т. д. порядка.

Матрица связи последнего наблюдаемого значения x_p при фиксированных предыдущих равна

$$\mathbf{C} = -\frac{\mathbf{D}_{21}}{d_{pp}} = -\frac{1}{d_{pp}}\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & d_n & \ldots & d_1 \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

где $d_i = d_{1(i+1)}$, $i = \overline{1,\ n}$. Отношение (19) следует из произведения

$$\mathbf{D}_{21}\mathbf{B}_{11} + d_{22}\mathbf{B}_{21} = \mathbf{0},\ \ d_{22} = d_{pp};$$

матрицы

$$\mathbf{D}_{21} = -d_{pp}\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{21} = -d_{pp}\mathbf{C};\ \ \mathbf{C} = -\mathbf{D}_{21}/d_{pp}.$$

Блоки матриц $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ связаны также соотношениями

$$\mathbf{C} = -\mathbf{B}_{22}\mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{11}^{-1} = -\mathbf{B}_{22}\mathbf{D}_{21}\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21}\right)^{-1}; \qquad (20)$$

из равенств

$$\mathbf{B}_{21}\mathbf{D}_{11} + \mathbf{B}_{22}\mathbf{D}_{21} = \mathbf{I}_{21} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11} + \mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21} = \mathbf{I}_{11} = \mathbf{I}$$

следуют произведения

$$\mathbf{B}_{21} = -\mathbf{B}_{22}\mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{11}^{-1},\ \ \mathbf{D}_{11} = \mathbf{B}_{11}^{-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21}\right),$$

$$\mathbf{B}_{11}^{-1} = \mathbf{D}_{11}\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21}\right)^{-1},\ \ \mathbf{B}_{12}\mathbf{D}_{21} = \mathbf{I} - \mathbf{B}_{11}\mathbf{D}_{11},$$

приводящие формы (20) к (4).

Алгоритмы генерирования марковских последовательностей

Алгоритмы генерирования гауссовых векторов с плотностью распределения

$$f\left(\mathbf{X}_i \mid \mathbf{X}_{i-1}^{(n)}\right) = (2\pi)^{-n/2}\left(\det \mathbf{B}_i\right)^{-1/2} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\mathbf{X}_i - \mathrm{M}_i\right)^T \mathbf{B}_i^{-1}\left(\mathbf{X}_i - \mathrm{M}_i\right)\right\}$$

в системе MATLAB [4] описаны в статье [5]. Генерирование марковской траектории (последовательности n-го порядка) состоит в циклическом формировании векторов $\mathbf{X}_i$ размерностью m=1, 2, ..., $p \le n$ чисел, зависящих от $\mathbf{X}_{i-1}^{(n)}$ – векторов предыдущих n значений. Зависимость задается матрицей $\mathbf{B}_i$ – условной корреляционной матрицей (3) и вектором (2) условных средних $\mathbf{M}_i$. Траектория может формироваться точка за точкой при m=1 или группами точек (парами, триадами и т. д.) при $m = 2, 3, \ldots$. Матрица $\mathbf{B}_i$ и вектор $\mathbf{M}_i$ могут рассчитываться с использованием корреляционных матриц и матриц точности по формулам (2), (3), (11), (16), (17) и формулам (15), (19), (20) – для матриц связи.

Генератор значений траектории – линейная система, окрашивающая дискретный белый шум $\mathbf{Z}$ с единичной дисперсией в заданную последовательность $\mathbf{X} \in \mathrm{N}(\mathrm{M}_i, \mathbf{B}_i)$. Так как датчики типа RANDN [4] не обеспечивают независимость формируемых чисел $\mathbf{Y}$, массив $\mathbf{Y}$ декоррелируется:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}_d \mathbf{Y}, \ \ \mathbf{A}_d = \mathbf{U}_Y \Lambda_Y^{-1/2} \mathbf{U}_Y,$$

где $\mathbf{U}_Y$ – собственные векторы; Λ_Y – собственные значения корреляционной матрицы $\widehat{\mathbf{B}}_Y$, вычисляемой функцией COV [4]. Размерность $I \times J$ массивов $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ задается такой, чтобы J обеспечивало нужную длину траектории, I – порядок n. Например, при I=10 можно точка за точкой формировать траекторию девятого порядка длиной J. Окрашивание – линейное преобразование

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Z}, \ \ \mathbf{A} = \mathbf{U}_X \Lambda_X^{1/2} \mathbf{U}_X^T, \qquad (21)$$

где $\mathbf{U}_X$ – собственные векторы; Λ_X – собственные значения матрицы $\mathbf{B}_i$ – условной корреляционной матрицы (16) формируемой группы из m чисел. Окончательно m значений траектории вычисляются с учетом n предыдущих и средних значений по формуле (2), матрица связи – по формулам (4), (15), (19) или (20). Следующие m значений формируются так же со сдвигом уже полученных на m позиций.

Генерируемые марковские траектории аппроксимируют стационарные немарковские процессы с типовыми функциями корреляции [6]. В соответствии с теоремой марковское приближение немарковского гауссова процесса $\mathbf{X}$ с корреляционной матрицей $\mathbf{B}_X$ реализовано приведением его матрицы точности $\mathbf{D}_X$ к многодиагональному виду $\mathbf{D}$ заменой нулями всех элементов, за исключением элементов $2n$+1 главных диагоналей. Матрица $\mathbf{D}$ при условии положительной определенности матрицы $\mathbf{B}_n = \mathbf{D}^{-1}$ есть матрица точности марковского процесса n-го порядка (в общем случае нестационарного). Если обнуляются элементы $d_{ij} \approx 0$, можно ожидать, что погрешность такого представления невелика, то есть

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{D}^{-1} \approx \mathbf{B}_X.$$

Пример 1. Отсчеты гауссова процесса с функцией корреляции $R(\tau) = \exp(-\tau/2)\cos\pi\tau$, взятые с интервалом дискретизации $\Delta\tau = 0{,}45$, имеют корреляционную матрицу

$$\mathbf{B}_X = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0{,}1249 & -0{,}6064 & -0{,}2312 & 0{,}3289 \\ 0{,}1249 & 1{,}0000 & 0{,}1249 & -0{,}6064 & -0{,}2312 \\ -0{,}6064 & 0{,}1249 & 1{,}0000 & 0{,}1249 & -0{,}6064 \\ -0{,}2312 & -0{,}6064 & 0{,}1249 & 1{,}0000 & 0{,}1249 \\ 0{,}3289 & -0{,}2312 & -0{,}6064 & 0{,}1249 & 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

и матрицу точности

$$\mathbf{D}_X = \begin{bmatrix} 1{,}6950 & -0{,}2934 & 1{,}0583 & 0{,}0809 & 0{,}0063 \\ -0{,}2934 & 1{,}7458 & -0{,}4769 & 1{,}0403 & 0{,}0809 \\ 1{,}0583 & -0{,}4769 & 2{,}4027 & -0{,}4769 & 1{,}0583 \\ 0{,}0809 & 1{,}0403 & -0{,}4769 & 1{,}7458 & -0{,}2934 \\ 0{,}0063 & 0{,}0809 & 1{,}0583 & -0{,}2934 & 1{,}6950 \end{bmatrix}.$$

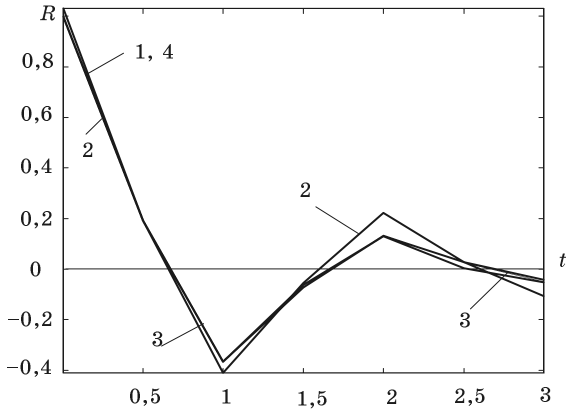
Если элементы $d_{14} = d_{25} = d_{41} = d_{52} = 0{,}0809$, $d_{15} = d_{51} = 0{,}0063$ заменить нулями, матрица $\mathbf{D}$ с тремя главными диагоналями будет описывать марковскую последовательность второго порядка с корреляционной матрицей

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9788 & 0{,}0999 & -0{,}5950 & -0{,}1644 & 0{,}3430 \\ 0{,}0999 & 0{,}9578 & 0{,}1055 & -0{,}5696 & -0{,}1644 \\ -0{,}5950 & 0{,}1055 & 0{,}9822 & 0{,}1055 & -0{,}5950 \\ -0{,}1644 & -0{,}5696 & 0{,}1055 & 0{,}9578 & 0{,}0999 \\ 0{,}3430 & -0{,}1644 & -0{,}5950 & 0{,}0999 & 0{,}9788 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Вектор $\mathbf{X}$ – последовательность из семи отсчетов гауссова процесса с функцией корреляции $R(\tau) = \exp(-\tau)\left(\cos\pi\tau + \dfrac{1}{\pi}\sin\pi\tau\right)$, взятых с интервалом дискретизации $\Delta\tau = 1/2$. Попытка аппроксимации $\mathbf{X}$ марковской последовательностью второго порядка оказывается некорректной, так как матрице точности

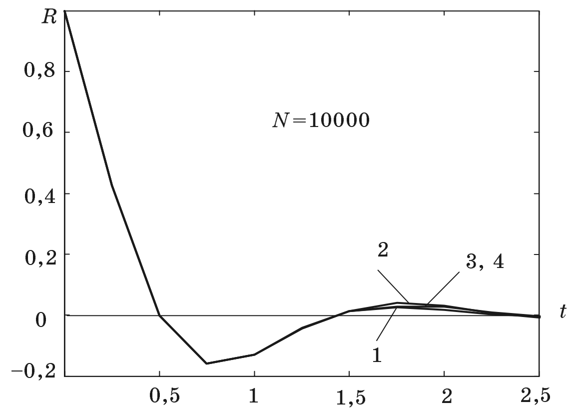
$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 4{,}3 & -6{,}0 & 4{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6{,}0 & 12{,}8 & -12{,}2 & 6{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 4{,}4 & -12{,}2 & 17{,}2 & -13{,}4 & 6{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 6{,}1 & -13{,}4 & 17{,}5 & -13{,}4 & 6{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}4 & -13{,}4 & 17{,}2 & 12{,}8 & 4{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 6{,}1 & -12{,}2 & 12{,}8 & -6{,}0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}4 & -6{,}0 & 4{,}3 \end{bmatrix}$$

соответствует отрицательно определенная матрица $\mathbf{B}_2 = \mathbf{D}_2^{-1}$; два собственных значения матрицы $\mathbf{B}_2$ отрицательны: $\lambda_4 = -0{,}8761$, $\lambda_5 = -0{,}7047$.



■ *Рис. 1. Аппроксимация марковскими последовательностями:*

1 – значения заданной функции корреляции; 2–4 – оценки функций корреляции марковских последовательностей третьего, четвертого и пятого порядков, полученные по 10000 реализаций



■ *Рис. 2. Генерирование парами и триадами:*

1 – заданная, 2 – оценка при генерировании число за числом, 3 и 4 – оценки при генерировании парами и триадами

Пример 3. Результаты аппроксимации вектора **X** из предыдущего примера марковскими последовательностями порядка выше второго показаны на рис. 1.

Моделировалось последнее, седьмое, значение вектора при фиксированных шести предыдущих.

Значения вектора (19) приведены в таблице.

n	**C**					
3	0	0	0	0.2860	−1,0024	1,3868
4	0	0	−0,0813	0.2860	−1,0024	1,3868
5	0	0,0219	−0,0813	0.2860	−1,0024	1,3868

В данном случае последовательности четвертого и пятого порядков по корреляционным свойствам оказываются близкими к заданной немарковской.

Пример 4. Семь отсчетов гауссова процесса с функцией корреляции $R(\tau)=\exp(-2\tau)\cos\pi\tau$, взятые с интервалом дискретизации $\Delta\tau=1/2$, аппроксимируются марковской последовательностью **X** четвертого порядка. Значения вектора **X** генерируются одиночными числами, парами и триадами (массивы 7×10 000 чисел). Матрица (15) при генерировании парами чисел

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & -0{,}0188 & -0{,}0666 & -0{,}1897 & 0{,}5053 \\ 0 & -0{,}0095 & -0{,}0572 & -0{,}1627 & 0{,}0656 \end{bmatrix}.$$

На рис. 2 показаны функции корреляции.

Заключение

Матрицы точности задают гауссовы марковские последовательности. Свойство $2n+1$-диагональности матриц точности последовательностей n-го порядка позволяет аппроксимировать немарковские процессы марковскими последовательностями методом удержания главных диагоналей. Блок матрицы точности задает условную корреляционную матрицу, определяющую процедуру генерирования последовательности группами чисел. Соотношения между блоками матрицы точности и корреляционной матрицы являются расчетными при разработке алгоритмов генерирования.

Литература

1. **Тихонов В. И., Миронов М. А.** Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
2. **Де Гроот М.** Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 491 с.
3. **Королюк В. С.** и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
4. **Потемкин В. Г.** Система MATLAB: Справ. пособие. М.: Диалог – МИФИ, 1997. 350 с.
5. **Воробьева Ю. Г.** Перечисление слабокоррелируемой гауссовской марковской последовательности с постоянным уровнем: Сб. докл. // Науч. сессия ГУАП. Ч. II. Техн. науки / СПбГУАП. СПб., 2006. С. 257–260.
6. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. 679 с.