

УДК 519.2

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВА ПРОЦЕССА С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ УРОВНЕМ

С. Н. Воробьев,

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Модель пересечения гауссова марковского процесса с детерминированным уровнем распространяется на стационарные процессы с типовыми функциями корреляции. Практическое применение марковской модели иллюстрируется примером оценивания времени прихода прямоугольного сигнала, прошедшего фильтр нижних частот. Марковская модель сопоставляется с моделью сигнала с линейным фронтом.

The model of intersection of Markov Gaussian process with a determined level is extended to stationary processes with the standard correlative functions. Practical application of the Markov model is illustrated by the example of estimation of the time of arrival of a rectpulse after low – pass filtering. The Markov model is compared with the line front signal model.

Введение

Задачи о пересечениях случайного процесса $x(t)$ с уровнем $u(t)$ имеют множество приложений [1, 2]. Оценивание времени первого достижения случайной траекторией некоторого значения актуально в задачах причаливания или измерения времени прихода импульсного сигнала и может иметь другие интерпретации [3–8]. Общие решения этих задач получены специальными математическими приемами, базирующимися на уравнении Фоккера – Планка – Колмогорова [5] или теории рядов Райса [8]. Аппарат стохастических дифференциальных уравнений [5] или обвертывающих знаменующихся рядов [8] сложен для инженера, тем более, что зачастую результаты исследований представляются в форме, которую трудно использовать на практике.

Имея современные средства моделирования, например, MATLAB [9], нетрудно исследовать конкретную задачу. Однако экспериментальные результаты нуждаются в математическом оформлении. В данной работе рассматривается простая марковская модель для описания времени первого пересечения стационарного гауссова процесса с детерминированным уровнем.

Общее решение

Задачу пересечения можно считать решенной, если найден закон распределения времени t пер-

вого пересечения. Для непрерывных дифференцируемых процессов предложены некоторые оценки $\gamma(t)$ плотности распределения $f(t)$ [1, 2, 4, 10]. Пересечения дискретных во времени стационарных гауссовых процессов могут быть описаны с использованием другого подхода – методом приведения к недифференцируемому марковскому процессу.

Пусть гауссов процесс $x(t)$ пересекается с уровнем $u(t)$ так, что в момент t_c его среднее $m(t_c) = u(t_c)$; пусть марковский процесс $x_m(t)$ пересекается с уровнем $u_m(t)$, $m_m(t_{cm}) = u_m(t_{cm})$. Если моменты первого пересечения

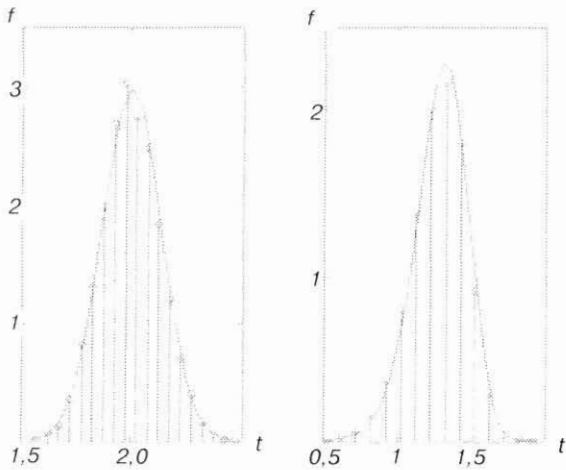
$$t \approx t_m, \quad (1)$$

то процессы $x(t)$ и $x_m(t)$ можно считать эквивалентными в смысле (1), и плотность распределения $f(t) \approx f_m(t)$. Реальный смысл приближенной эквивалентности, очевидно, определяется практическими соображениями.

В работе [11] получена плотность распределения времени t первого пересечения марковского процесса $x_m(t)$:

$$f_m(t) = \sqrt{\frac{m'_m(t)}{2\pi\sigma_m}} \exp\left(-\frac{(u_m(t) - m_m(t))^2}{2\sigma_m^2}\right), \quad (2)$$

где $m_m(t)$ – среднее значение процесса $x_m(t)$; $u_m(t)$ – пересекаемый уровень; σ_m^2 – дисперсия;



■ Рис. 1. Плотности распределения

v – коэффициент, нормирующий функцию распределения.

Время t , τ , а также интервал дискретизации Δ – безразмерные величины, принимающие значения секунды или ее доли в конкретных задачах [11]. Примеры плотности распределения времени t первого пересечения гауссовым марковским процессом с функцией корреляции $R(\tau) = \exp(-\tau)$ и средним $m(t)=0$ приведены на рис. 1: с помощью операторов `stem` и `plot` [9] представлены результаты моделирования и расчета по формуле (2), уровни $u_1 = 20 - 8t$ (а), $u_2 = 1 + 2t^2$ (б).

Существенны не сами функции $u(t)$, $m(t)$, а их разность $\Delta m(t) = u(t) - m(t)$. Без потери общности можно положить $m(t) = 0$, тогда плотность (2) в виде

$$f_m(t) = v \frac{|u'_m(t)|}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} \exp\left(-\frac{u_m^2(t)}{2\sigma_m^2}\right) \quad (3)$$

описывает время первого пересечения с уровнем $u = 0$.

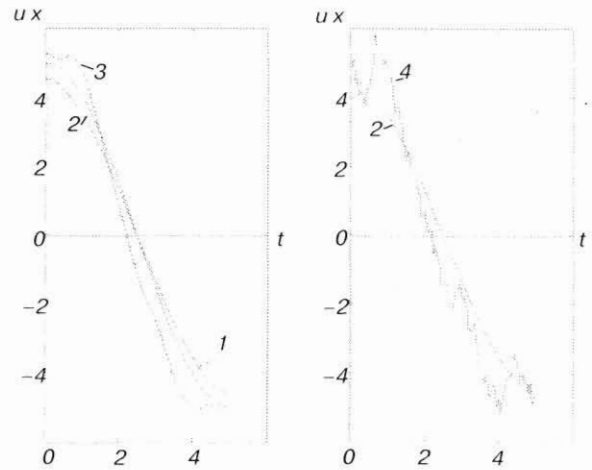
Если процессы $x(t)$ и $x_m(t)$ дискретизированы с интервалом Δ , то марковский вектор $\mathbf{X}_m = \mathbf{A}\mathbf{X}$ рассчитывается «перекрашивающим» оператором [12]

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_{x_m} \Lambda_{x_m}^{1/2} \mathbf{U}_{x_m}^T \mathbf{U}_x \Lambda_x^{-1/2} \mathbf{U}_x^T, \quad (4)$$

в котором $\mathbf{U}_x, \mathbf{U}_{x_m}$ – собственные векторы корреляционных матриц исходного и марковского процессов; Λ_x, Λ_{x_m} – собственные значения. Расчет плотности (2) предполагает преобразования исходных дисперсии σ^2 и среднего $m(t)$ к σ_m^2 и $m_m(t)$, а также уровня $u(t)$ к $u_m(t)$. Преобразования задаются оператором (4), эквивалентный марковский процесс пересекается с уровнем

$$u_m = \mathbf{A}u. \quad (5)$$

Пусть стационарный гауссов процесс с типовой функцией корреляции $R(\tau) = (1 + \tau)\exp(-\tau)$ [13] и нулевым средним пересекает уровень $u(t) = 5 \cos \frac{\pi}{5} t$ на промежутке $0 \leq t \leq T$, $T = 5$ (рис. 2, 1).



■ Рис. 2. Уровни и траектория

Этому равносильно пересечение нулевого уровня процессом со средним $u(t)$. Оператор (4), рассчитанный для марковского процесса с функцией корреляции $R_m(\tau) = \exp(-\tau)$, интервал $\Delta = 0,05$, дает уровень (5) (рис. 2, 2). Исходная траектория (рис. 2, 3) преобразуется в марковскую (рис. 2, 4). Уровень u_m как функцию времени можно аппроксимировать полиномом (операторы `polyfit`, `polyval`):

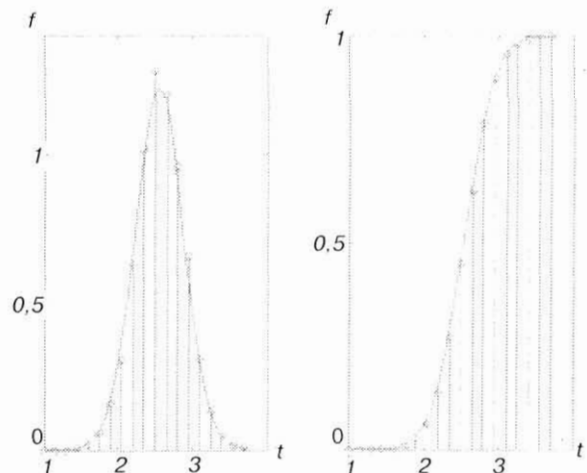
$$u_m(t) = 4,5684 - 0,1653t - 0,9958t^2 + 0,1323t^3,$$

$$u'_m = -0,1653 - 1,9916t + 0,3969t^2.$$

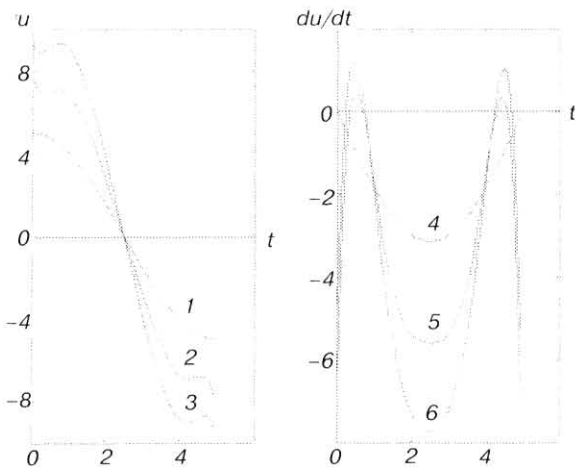
Среднее аппроксимирующего марковского процесса $u_m(t) \neq u(t)$, поэтому в расчетах по формуле (3) задается эмпирическое среднее квадратичное отклонение, равное отношению площадей

$$\sigma_m = \frac{\int_0^T |u_m(t)| dt}{\int_0^T |u(t)| dt}. \quad (6)$$

Результаты расчета и моделирования времени первого пересечения приведены на рис. 3 для удобства их сравнения со сдвигом на $\Delta/2$.



■ Рис. 3. Плотность и функция распределения



■ Рис. 4. Уровни и производные

Оценки первых моментов равны $\hat{m}_\gamma = 2,52$, $\hat{\sigma}_\gamma^2 = 0,11$ (моделирование); $\hat{m}_M = 2,50$, $\hat{\sigma}_M^2 = 0,11$ (усреднение расчетных значений), среднеквадратичное отклонение (6) равно $\sigma_M = 0,8815$; смещение $\delta = \hat{m}_\gamma - \hat{m}_M \approx \Delta/2$.

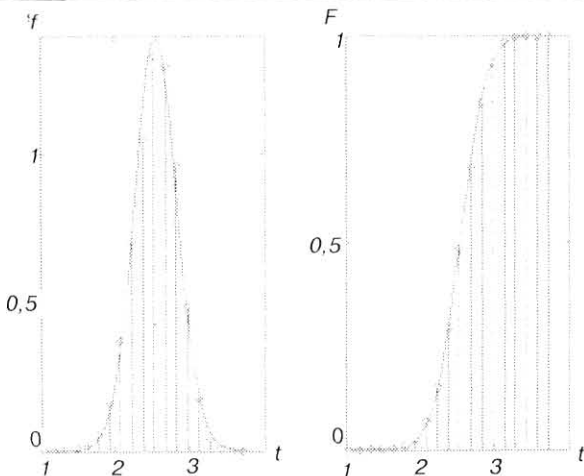
Для процессов с функциями корреляции [13]

$$R(\tau) = \exp(-\tau) \left(\cos \pi\tau + \frac{1}{\pi} \sin \pi\tau \right), \quad (7)$$

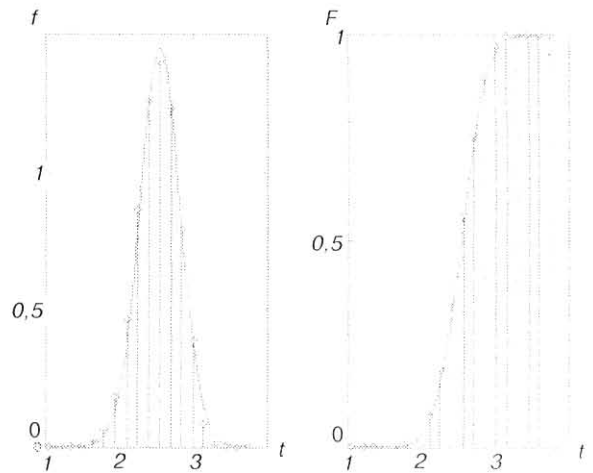
$$R(\tau) = \exp(-\tau) \cos \pi\tau, \quad (8)$$

пересекающими уровень $u(t) = 5 \cos \frac{\pi}{5} t$ (рис. 4, 1), результаты марковского приближения аналогичны.

На рис. 4 показаны преобразования (5) уровня для процессов с функциями (7) и (8), кривые 2, 3 и производные $u'_M(t)$ (кривые 4, 5, 6, соответственно). Плотности и функции распределения для случаев (7) и (8) показаны на рис. 5, 6. Оценки моментов в случае (7) равны $\hat{m}_\gamma = 2,50$, $\hat{\sigma}_\gamma^2 = 0,09$; $\sigma_M = 1,6168$, $\hat{m}_M = 2,48$, $\hat{\sigma}_M^2 = 0,09$; смещение не наблюдается. В случае (8) $\hat{m}_\gamma = 2,42$, $\hat{\sigma}_\gamma^2 = 0,08$; $\sigma_M = 2,1270$; $\hat{m}_M = 2,50$, $\hat{\sigma}_M^2 = 0,09$; смещение $\delta = \hat{m}_\gamma - \hat{m}_M \approx -3\Delta/2$.



■ Рис. 5. Плотность и функция распределения



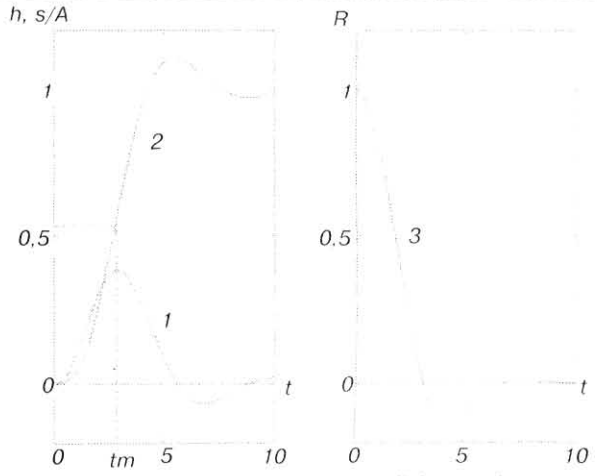
■ Рис. 6. Плотность и функция распределения

В приведенных примерах использовались прецизионные генераторы реализаций стационарных гауссовых процессов, воспроизводящие заданные корреляционные матрицы размером 100×100 с машинной точностью $\approx 10^{-14}$ [12]. Время первого пересечения t моделировалось по выборкам размером $N = 10\,000$ реализаций с интервалом $\Delta = 0,05$ на $m = 100$ узлах.

Симметричная с $\bar{t} = 2,5$ плотность распределения $f, (t)$ представляется естественным описанием пересечения стационарным процессом симметричного уровня. Близость оценок эмпирического марковского приближения к экспериментальным результатам позволяет плотностью (3) аппроксимировать плотность распределения времени прихода импульсного сигнала с симметричным фронтом или симметричной дискриминационной характеристикой, например, сигналов треугольной или трапециевидной формы [4].

Оценивание времени прихода сигнала

Передний фронт реальных сигналов несимметричен. Пусть прямоугольный сигнал $As_0(t)$ в белом шуме преобразуется фильтром нижних ча-



■ Рис. 7. Весовая функция, передний фронт, функция корреляции

стот Баттерворта четвертого порядка с весовой функцией (рис. 7, 1):

$$h(t) = 0,9239 \{ \exp(-0,9239t) \times (\cos 0,3827t + 2,4141 \sin 0,3827t) - \exp(-0,3827t) \times (\cos 0,9239t + 0,4141 \sin 0,9239t) \}.$$

Передний фронт сигнала $s(t)$ на выходе фильтра (рис. 7, 2) имеет максимальную крутизну $k_{r_{\max}} = 0,385A$ в точке $tm = 2,8937$, соответствующей максимуму весовой функции; $s(tm) = 0,5281A$. Функция корреляции стационарного шума на выходе фильтра (рис. 7, 3)

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} h(t)h(t+\tau)dt$$

рассчитана численным интегрированием на интервале $T = 10$.

Временем прихода сигнала можно считать точку пересечения переднего фронта с уровнем $u=A/2$ [10], близким к точке максимальной крутизны. Если положить сигнал равным

$$s_1(t) = s(t) - A/2, \quad (9)$$

то момент $t_c = 2,825$ пересечения $s_1(t)$ с уровнем $u = 0$ становится временем прихода сигнала $s(t)$. Функция $u_m(t)$ в плотности (3) рассматривается преобразованием (5), в котором вектор \mathbf{u} – отсчеты функции $s_1(t)$, взятые с интервалом $\Delta = 0,2$ (51 отсчет). На рис. 8 показан фронт сигнала (9) с амплитудой $A = 3$ (кривая 1), функции $u_m(t)$ и $|u'_m(t)|$ (кривые 2, 3), реализация фронта сигнала $s(t)$ в шуме (кривая 4), приведение реализации $u_m(t)$ к марковскому шуму (кривая 5).

На интервале $t < 2$ (см. рис. 8, 2) наблюдается выброс функции $u_m(t)$, объясняющийся несимметричностью сигнала (9) относительно нуля. Оператор марковского преобразования (4), записанный для симметричных корреляционных матриц, адекватен для симметричного фронта сигнала. Искажение функции $|u'_m(t)|$ (см. рис. 8, 3) приводит к характерным погрешностям расчета плот-

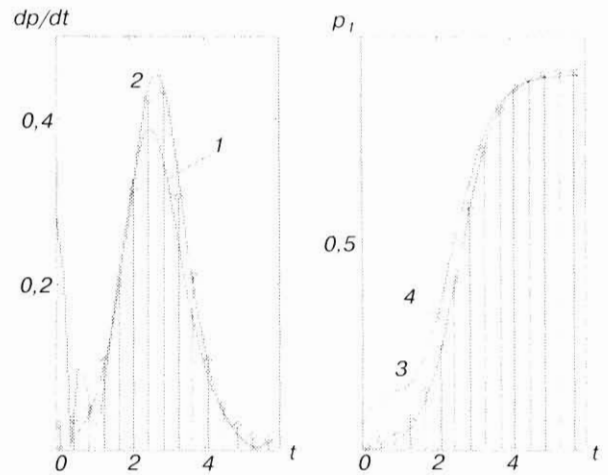


Рис. 9. Характеристики времени прихода

ности и функции распределения на начальном отрезке (рис. 9, кривые 1, 3).

С вероятностью $p \approx 0,06$ сигнал с амплитудой $A = 3$ при $t = 0$ превосходит уровень пересечения (в данном примере количество таких реализаций $k = 668$ из $N = 10\,000$). Время прихода фиксировалось как пересечение снизу вверх, поэтому вероятность пересечения на интервале $T = 10$ не достигает единицы.

Если в марковской модели вместо фронта $u_m(t)$ задать исходный фронт $u(t) = s_1(t)$ (см. рис. 8, 1) с производной $|u'(t)|$ (см. рис. 8, 6), искажения исчезают (рис. 9, кривые 2, 4). Плотность распределения (3) при этом принимает вид

$$f_m(t) \approx \frac{|u'(t)|}{\sqrt{2\pi\sigma_m}} \exp\left(-\frac{u^2(t)}{2\sigma_m^2}\right), \quad (10)$$

коэффициент ν оказывается равным единице. Погрешность марковской модели сводится к некоторому смещению оценки среднего времени прихода и завышению оценки дисперсии: $\hat{t}_m = 2,92$, $\hat{t}_s = 2,84$, $t_c = 2,825$; $\hat{\sigma}_s^2 = 1,089$; $\hat{\sigma}_m^2 = 1,717$.

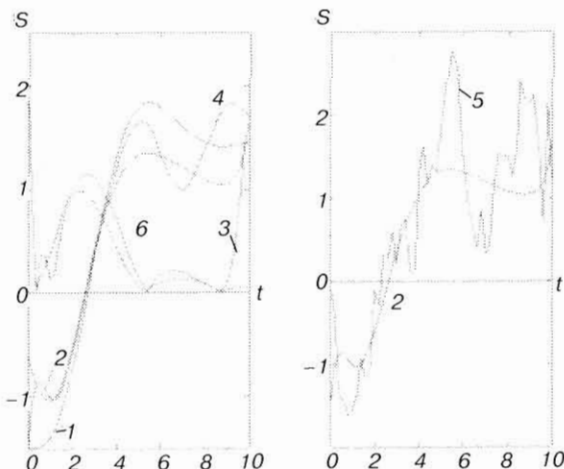


Рис. 8. Фронты сигнала

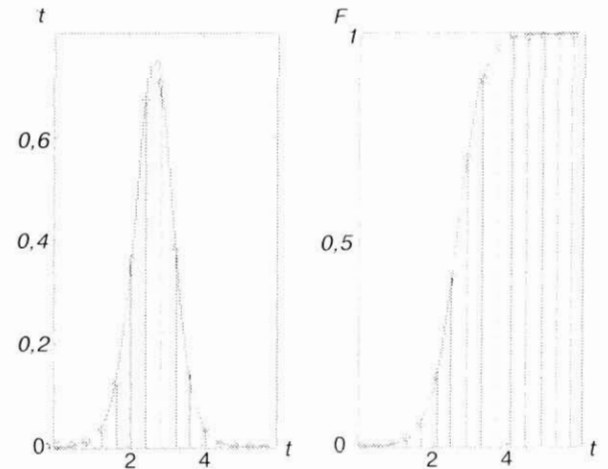


Рис. 10. Характеристики времени прихода

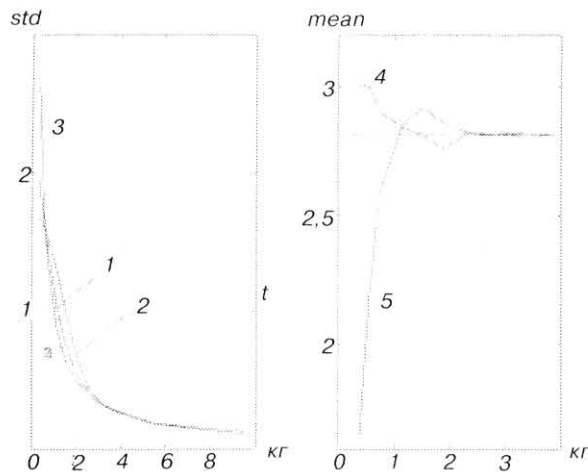


Рис. 11. Оценки среднеквадратичного отклонения и среднего времени прихода

Замена фронта $u_m(t)$ фронтом $u(t)$ исключает искажения плотности распределения и при большом отношении сигнал – шум. На рис. 10 показаны характеристики времени прихода t и F при амплитуде $A = 5$ (они не являются плотностью и функцией распределения, так как около 60 реализаций из 10 000 превышают уровень при $t = 0$).

В таблице и на рис. 11 приведены примеры оценок первых моментов времени прихода при нескольких значениях крутизны фронта $kr = 0,38A$, $\sigma^2 = 1$.

Оценки среднеквадратичного отклонения (функция std) близки при $kr \geq 3$, при меньших значениях крутизны марковская модель дает завышенные оценки: $\hat{t}_m > \hat{t}_3$ (см. рис. 11, кривые 1, 2). Средние значения оценок (функция $mean$) устанавливаются близкими к $t_c = 2,825$ при $kr \geq 2,5$ (см. рис. 11, кривые 4, 5); среднее t_m смещено примерно на $\Delta/2$. Усреднение t_m расчетных значений при $kr < 2$ приводит к большим погрешностям (см. рис. 11, кривая 5).

При крутизне несимметричного фронта (дискриминационной характеристики) $kr \geq 3$ плотность распределения (10) не противоречит экспериментальным данным.

В известной линейной модели фронта сигнала [10, 13] считается

$$t \in N(t_c, 1/kr). \quad (11)$$

Среднеквадратичное отклонение $\sigma = 1/kr$ (рис. 11, кривая 3) может служить оценкой σ , снизу при $kr > 1$, но гауссово распределение (11) не адекватно плотностям (3) и (10), например, по коэффициенту эксцесса $\gamma_2 \approx 3$ при $kr \leq 10$. Плотность $f_3(t)$ можно аппроксимировать суммой вида ряда Эдварта [13]:

Таблица

kr	0,38	0,76	1,52	1,90	2,28	2,66	3,42	3,80
\hat{t}_3	3,013	2,900	2,814	2,811	2,818	2,813	2,816	2,814
\hat{t}_m	1,541	2,503	2,821	2,760	2,727	2,717	2,716	2,717
$\hat{\sigma}_3^2$	3,734	2,034	0,594	0,351	0,226	0,160	0,093	0,074
$\hat{\sigma}_m^2$	2,792	2,299	1,070	0,567	0,296	0,175	0,091	0,072

$$f_a(t) = f_0(t) \sum_{i=0}^k b_i H_i(\tilde{t}), \quad f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}}} \exp\left(-\frac{(t-\hat{m})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right),$$

$$\tilde{t} = t/\hat{\sigma}; \quad (12)$$

$H_0(t) = 1, H_1(t) = t, H_2(t) = t^2 - 1, H_3(t) = t^3 - 3t, H_4(t) = t^4 - 6t^2 + 3$ – полиномы Чебышева – Эрмита. Оценивание коэффициентов методом наименьших квадратов в 19 узлах с интервалом $\Delta = 0,15$ дает для процессов с типовыми функциями корреляции $b_0 \neq 0, \hat{b}_1 \neq 0, \hat{b}_2 \neq 0, \hat{b}_3 \neq 0, \hat{b}_i \approx 0$ при $i \geq 4$. Аппроксимирующая плотность (12) записывается как

$$f_a(t) = \frac{c_0 + c_1\tilde{t} + c_2\tilde{t}^2 + c_3\tilde{t}^3 + c_4\tilde{t}^4}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}}} \exp\left(-\frac{(t-\hat{m})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right),$$

где $c_0 = b_0 - b_2 + 3b_4, c_1 = b_1 - 3b_3, c_2 = b_2 - 6b_4, c_3 = b_3, c_4 = b_4$.

Заключение

При оценивании времени прихода сигнала по пересечению переднего фронта аппроксимация гауссова шума на выходе фильтра Баттерворта марковским процессом потребовала внесения поправок в общую модель, адекватную симметричным пересекаемым уровням. Асимметрия переднего фронта сигнала может компенсироваться соответствующим заданием дискриминационной характеристики, и поправки могут не понадобиться. Плотность распределения (10) достаточно проста для инженерных расчетов.

Литература

1. Тихонов В. И., Хименко В. И. Проблема пересечений уровней случайными процессами // Радиотехнические приложения. Радиотехника и электроника. – 1998. Т. 43. – № 5. – С. 501 – 523.
2. Тихонов В. И., Хименко В. И. Выбросы траекторий случайных процессов. – М.: Наука. – 304 с.
3. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. – Л.: Судпромгиз, 1961. – 252 с.
4. Митяшев Б. Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. – М.: Советское радио, 1962. – 199 с.
5. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
6. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. – М.: Советское радио, 1978. – 296 с.
7. Бакулев П. А., Степин В. М. Методы и устройства селекции движущихся целей. – М.: Радио и связь, 1986. – 288 с.
8. Мирошин Р. Н. Пересечения кривых гауссовскими процессами. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. – 212 с.
9. Потемкин В. Г. Система MATLAB: Справ. пособ. – М.: Диалог – МИФИ, 1997. – 350 с.
10. Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986. – 296 с.
11. Воробьев С. Н. Пересечение гауссовым марковским процессом детерминированного уровня // Информационно-управляющие системы. – 2004. – № 2. – С. 16–20.
12. Воробьев С. Н. Эффективное обнаружение детерминированных сигналов. СПб.: Изд-во ГУАП, 2003. – 139 с.
13. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 677 с.