УДК 629.191

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ЗАДАЧАХ КОМПЛЕКСНОГО ВАРИАЦИОННОГО ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

В. И. Миронов,
доктор техн. наук, профессор
Ю. В. Миронов,
доктор техн. наук, старший научный сотрудник
Р. М. Юсупов,
член-корреспондент РАН, доктор техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

Рассматривается применение вариационного подхода для решения задач совместного оптимального статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем и параметров моделей измерений по критерию наименьших квадратов.

Ключевые слова *— статистическое оценивание, нелинейные динамические системы, критерий наименьших квадратов.*

Введение

Решение задач статистического оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем на практике часто приходится решать в условиях неопределенности в отношении некоторых параметров моделей измерений. Такая ситуация, как правило, имеет место в задачах определения параметров орбитального движения космических аппаратов по результатам траекторных измерений, когда, например, недостаточно точно известны координаты наземных измерительных средств. Поэтому в процессе статистической обработки выборочных данных необходимо предусматривать возможность совместного определения как параметров движения объекта, так и параметров модели измерений.

Таким образом, в более общей постановке в рамках задачи оценивания параметров состояния нелинейных динамических систем необходимо комплексно предусматривать определение некоторого вектора параметров моделей измерений. Задачи такого рода достаточно сложны и имеют широкое распространение на практике.

Для решения данного круга задач часто применяется известный метод наименьших квадратов (МНК), который находит также широкое применение при обработке количественных результатов естественно-научных опытов, технических данных, астрономических и геодезических наблюдений и измерений.

Распространенность МНК во многом обусловлена тем, что при решении задач оценивания данным методом не требуется знания статистических характеристик ошибок измерений, которые во многих случаях неизвестны или известны с невысокой точностью.

Технология использования МНК для решения различных прикладных задач применительно к динамическим системам широко освещена в отечественной и зарубежной литературе [1–4, 7–11 и др.]. Она предусматривает составление критерия оптимальности, формирование нормальной системы уравнений и получение оптимальной оценки путем ее решения. По смыслу они представляют собой необходимые условия оптимальности, характерные для прямых методов оптимизации.

Вместе с тем МНК может быть реализован на основе использования условий оптимальности оценок вариационного типа. Вопросы обоснования и разработки соответствующей вариационной технологии рассматривались в работах авторов [5, 6 и др.] применительно к оцениванию параметров состояния нелинейных динамических систем.

Данная статья посвящена методическим аспектам применения указанного вариационного подхода к решению комплексной задачи, предусматривающей совместное оценивание параметров состояния нелинейных динамических систем и параметров модели измерений по критерию наименьших квадратов. При этом определяются и конкретизируются необходимые условия оптимальности оценок вариационного типа применительно к моделям дискретных и непрерывных измерений.

Постановка задачи

Достаточно общая задача оценивания параметров движения динамического объекта заключается в наилучшем в некотором смысле определении n-мерного вектора его исходного состояния $\mathbf{x}_0$ на заданный начальный момент времени $t = t_0$ по результатам измерений, проводимых в N точках t_i, заданных на интервале измерений $\tau = T - t_0$. В расширенной постановке одновременно требуется оценить и некоторый p-мерный вектор $\mathbf{c}$ параметров модели измерений.

В качестве базовой рассмотрим следующую задачу оптимального оценивания.

Задача. Пусть динамика объекта описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t), \; \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \; t \in [t_0, T].$$

Измерениям подвергается m-мерный вектор

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}].$$

Измеренное значение вектора $\boldsymbol{\psi}$ в момент t_i обозначим как $\mathbf{y}(t_i) = \mathbf{y}_i$ и представим модель измерений в виде

$$\mathbf{y}(t_i) = \psi[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}] + \boldsymbol{\delta}_i, \; t_i \in [t_0, T], \; i = 1(1)N,$$

где $\boldsymbol{\delta}_i$ — m-мерный вектор случайных ошибок измерений.

Требуется найти такие оценки векторов $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{c}$, которые обеспечивают минимальное значение функционала:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \left\{\mathbf{y}(t_i), \psi[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\right\}, \tag{1}$$

где

$$\rho_i = \{\mathbf{y}(t_i) - \psi[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\}^{\mathrm{T}} \mathbf{W}_i \{\mathbf{y}(t_i) - \psi[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\}, \quad i = 1(1)N; \tag{2}$$

$\mathbf{W}_i$ — симметрические матрицы весовых коэффициентов.

Функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ и $\boldsymbol{\psi}[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]$ будем считать однозначными, ограниченными, непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам во всей области их определения.

Предполагается выполнение известных условий наблюдаемости.

Вариационные условия оптимальности оценок

Для решения поставленной задачи представим функционал (1) в эквивалентной интегральной форме. Для этого введем функцию

$$\rho\{\mathbf{y}(t), \psi[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}]\} = \\ = \{\mathbf{y}(t) - \psi[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}]\}^{\mathrm{T}} \mathbf{W}(t) \{\mathbf{y}(t) - \psi[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}]\}, \tag{3}$$

где $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{W}(t)$ — произвольные непрерывные дифференцируемые функции, принимающие в моменты t_i, соответственно, значения $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{W}_i$ (например, полиномы Лагранжа).

Тогда для функционала (1) получим выражение

$$I = \int_{t_0}^{T} \rho\{\mathbf{y}(t), \psi[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}]\} \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i) \, \mathrm{d}t,$$

где $\delta(t - t_i)$ — импульсная дельта-функция.

Расширим затем пространство состояний путем введения дополнительного вектора $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{c}$ и системы

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \varphi_{x_1}(\mathbf{x}_1, t) \equiv 0; \; \mathbf{x}_1(t_0) = \mathbf{c}.$$

Применяя далее стандартную процедуру вариационного исчисления, по аналогии с работой [6] приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Оптимальные оценки векторов $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{c}$ и порождаемая ими оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, t); \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial \varphi^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{x}} \lambda + \dfrac{\partial \rho^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{y}, \psi(\mathbf{x}, \mathbf{c}), t] \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta(t - t_i); \\ \dot{\mu} = \dfrac{\partial \rho^{\mathrm{T}}}{\partial \mathbf{c}} [\mathbf{y}, \psi(\mathbf{x}), \mathbf{c}, t] \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta(t - t_i); \end{cases}$$

при граничных условиях

$$\lambda(t_0) = \lambda(T) = 0;$$

$$\mu(t_0) = \mu(T) = 0.$$

Эта краевая задача выражает необходимые условия оптимальности вариационного типа МНК для рассматриваемой расширенной постановки задачи оценивания.

Отметим особенность интегрирования сопряженной системы, которая определяется наличием в правых частях дифференциальных уравнений импульсных дельта-функций. Это вызывает в моменты t_i скачкообразное изменение соответствующих сопряженных переменных на величины производных от критериальной функции ρ по вектору текущего состояния динамического процесса $\mathbf{x}$ и вектору параметров модели измерений $\mathbf{c}$:

$$\lambda(t_i^+) = \lambda(t_i^-) + \Delta\lambda(t_i);$$

$$\mu(t_i^+) = \mu(t_i^-) + \Delta\mu(t_i),$$

где

$$\Delta\lambda(t_i) = \frac{\partial\rho^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{x}}\{\mathbf{y}_i, \psi[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\};$$

$$\Delta\mu(t_i) = \frac{\partial\rho^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{c}}\{\mathbf{y}_i, \psi[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\}, \quad i = 1(1)N.$$

С учетом скачков сопряженных переменных и зависимости (2) теорему 1 можно переформулировать в следующем эквивалентном виде.

Теорема 2. Оптимальные оценки векторов $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{c}$ и порождаемая ими оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, t); \\ \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial\varphi^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{x}}\lambda; \\ \dot{\mu} = 0; \end{cases}$$

при граничных условиях

$$\lambda(t_0) = \lambda(T) = 0;$$

$$\mu(t_0) = \mu(T) = 0;$$

$$\lambda(t_i^+) = \lambda(t_i^-) + \frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}(t_i)}{\partial\mathbf{x}_i}\mathbf{W}_i\{\mathbf{y}_i - \psi[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\};$$

$$\mu(t_i^+) = \mu(t_i^-) + \frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}(t_i)}{\partial\mathbf{c}}\mathbf{W}_i\{\mathbf{y}_i - \psi[\mathbf{x}(t_i), \mathbf{c}]\}, \; i = 1(1)N.$$

В этих выражениях функция $\rho[\cdot]$ определяется согласно (2).

При наличии непрерывных или дискретно-непрерывных измерений в приведенные выше вариационные условия оптимальности оценок вносятся соответствующие изменения.

Так, например, если вместо дискретных измерений (2) проводятся непрерывные измерения согласно модели

$$\mathbf{y}_1(t) = \psi_1[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}] + \delta_1(t),$$

где $\boldsymbol{\delta}_1(t)$ — вектор ошибок измерений, и если относительный вес этих измерений задается весовой матрицей $\mathbf{W}(t)$, то краевая задача комплексного оценивания принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}, t);$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial\varphi^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{x}}\lambda + \frac{\partial\psi_1^{\mathrm{T}}}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{W}(t)\{\mathbf{y}_1 - \psi_1[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}]\};$$

$$\dot{\mu} = \frac{\partial\psi^{\mathrm{T}}(t)}{\partial\mathbf{c}}\mathbf{W}(t)\{\mathbf{y}_1(t) - \psi_1[\mathbf{x}(t), \mathbf{c}]\};$$

$$\lambda(t_0) = \lambda(T) = 0; \; \mu(t_0) = \mu(T) = 0.$$

Согласно приведенным выше вариационным условиям, для получения оптимальных совместных оценок векторов $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{c}$ необходимо решить систему нелинейных краевых уравнений

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}, T) = 0; \quad \mu(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}, T) = 0,$$

заданных неявно на процедурах интегрирования сопряженных систем дифференциальных уравнений. Для этого можно применить известные численные методы поиска корней нелинейных уравнений, например метод Ньютона, его модификации и др.

Заключение

Предлагаемые методические средства могут быть использованы при разработке и модернизации алгоритмов оптимального статистического оценивания нелинейных динамических объектов различных типов в составе автоматизированных комплексов обработки наблюдений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-08-00259).

Литература

1. **Бажинов И. К., Алешин В. И., Почукаев В. Н., Поляков В. С.** Космическая навигация. — М.: Машиностроение, 1975. — 352 с.
2. **Брандин Н. К., Разоренов Г. Н.** Определение траекторий КА. — М.: Машиностроение, 1978. — 216 с.
3. **Космические** траекторные измерения / Под ред. П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича, А. А. Коростелева. — М.: Сов. радио, 1969. — 504 с.
4. **Линник Ю. В.** Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. — М.: Физматгиз, 1958. — 350 с.

5. **Миронов В. И., Миронов Ю. В., Юсупов Р. М.** Вариационное оценивание параметров движения космических аппаратов по критерию наименьших квадратов // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1. С. 9–13.
6. **Миронов В. И., Миронов Ю. В., Юсупов Р. М.** Метод наименьших квадратов в задачах вариационного оценивания состояния нелинейных динамических систем // Информационно-управляющие системы. 2009. № 6. С. 2–6.
7. **Мудров В. И., Кушко В. П.** Методы обработки измерений. — М.: Сов. радио, 1976. — 190 с.
8. **Основы** теории полета космических аппаратов / Под ред. Г. С. Нариманова и М. К. Тихонравова. — М.: Машиностроение, 1972. — 608 с.
9. **Репин В. Г., Тартаковский Г. П.** Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. — М.: Сов. радио, 1977. — 432 с.
10. **Статистические** методы обработки результатов наблюдений/Под ред. Р. М. Юсупова; МО СССР. — М., 1984. — 563 с.
11. **Эльясберг П. Е.** Определение движения по результатам измерений. — М.: Наука, 1976. — 416 с.

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

При подготовке рукописей статей редакция просит Вас руководствоваться следующими рекомендациями.

Объем статьи (текст, таблицы, иллюстрации и библиография) не должен превышать эквивалента в 20 страниц, напечатанных на бумаге формата А4 на одной стороне через 1,5 интервала в Word шрифтом Times New Roman размером 13, поля: слева три сантиметра, остальные не менее двух.

Обязательными элементами оформления статьи являются: индекс УДК, заглавие, инициалы и фамилия автора (авторов), ученая степень, звание, полное название организации, аннотация (7–10 строк) и ключевые слова на русском и английском языках, подрисуночные подписи.

Формулы в текстовой строке набирайте в Word, не используя формульный редактор (Mathtype или Equation), только в том случае, если средства Word не позволяют набрать формулу или символ (например, простая дробь, символы с «крышками» и т. д.), используйте имеющийся в Word формульный редактор Mathtype или Equation; формулы, стоящие в отдельной строке, могут быть набраны как угодно; при наборе формул в формульном редакторе знаки препинания, ограничивающие формулу, набирайте вместе с формулой; для установки размера шрифта никогда не пользуйтесь вкладкой Other..., используйте вкладку Define; в формулах не отделяйте пробелами знаки: + = –; не подгоняйте размер символов в формулах под размер шрифта в тексте статьи, не растягивайте и не сжимайте мышью формулы, вставленные в текст.

При наборе символов в тексте помните, что символы, обозначаемые латинскими буквами, набираются светлым курсивом, русскими и греческими — светлым прямым, векторы и матрицы — прямым полужирным шрифтом.

Иллюстрации:

— рисунки, графики, диаграммы, блок-схемы предоставляйте в виде отдельных исходных векторных файлов, поддающихся редактированию: *.vsd, *.cdr, *.xls, *.doc, *.ai, *.dxf;

— при наличии надписей на рисунке используйте тот же шрифт, что и в основном тексте (Times New Roman), размер шрифта не более 10 pt, но не менее 8 pt;

— если при изготовлении рисунка Вы используете стрелочки, руководствуйтесь принципом единообразия;

— фото и растровые — в формате *.tif, *.png с максимальным разрешением (не менее 300 pixels/inch).

В редакцию предоставляются:

— сведения об авторе (фамилия, имя, отчество, место работы, должность, ученое звание, учебное заведение и год его окончания, ученая степень и год защиты диссертации, область научных интересов, количество научных публикаций, домашний и служебный адреса и телефоны, факс, эл. адрес), фото авторов: анфас, в темной одежде на белом фоне, должны быть видны плечи и грудь, высокая степень четкости изображения без теней и отблесков на лице, фото можно представить в электронном виде в формате *.tif, *.png с максимальным разрешением — не менее 300 pixels/inch при минимальном размере фото 40 × 55 мм;

— экспертное заключение.

Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте и оформляется следующим образом:

— для книг и сборников — фамилия и инициалы авторов, полное название книги (сборника), город, издательство, год, общее количество страниц;

— для журнальных статей — фамилия и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала, год издания, номер журнала, номера страниц;

— ссылки на иностранную литературу следует давать на языке оригинала без сокращений;

— при использовании web-материалов указывайте адрес сайта и дату обращения.

Более подробную информацию см. на сайте: www.i-us.ru