УДК 519.614

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ АДАМАРА — ФЕРМА

Н. А. Балонин,
доктор техн. наук, профессор, старший научный сотрудник
М. Б. Сергеев,
доктор техн. наук, профессор, директор
НИИ информационно-управляющих систем Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики
Л. А. Мироновский,
доктор техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Приведено определение обобщенных матриц Адамара, порядок которых отвечает числовой последовательности Ферма. Рассмотрены свойства матриц Адамара — Ферма, описан алгоритм их построения, приведены числовые примеры.

Ключевые слова *— ортогональные матрицы, матрицы Адамара, матрицы Белевича, числа Ферма.*

Введение

Решению проблемы поиска ортогональных матриц, близких по смыслу к матрицам Адамара, порядков, для которых последние не существуют, посвящены работы [1–5]. Один из подходов состоит в поиске ортогональных матриц, у которых элементы близки по абсолютной величине и принимают два или три различных значения — уровня. Будем называть такие матрицы двухуровневыми и трехуровневыми М-матрицами [2].

В теории чисел существуют хорошо известные последовательности чисел Мерсенна и Ферма. Последовательность Мерсенна задается формулой $n = 2^k - 1$ и начинается с чисел 1, 3, 5, 15, 31, ..., она принадлежит подмножеству чисел вида $4k - 1$. Последовательность Ферма, определяемая соотношением $n = 2^{2^k} + 1$, начинается с чисел 3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297, 18446744073709551617, ... и принадлежит подмножеству чисел вида $4k + 1$.

В работе авторов [1] предложен итерационный способ построения последовательности двухуровневых ортогональных матриц (они названы матрицами Адамара — Мерсенна), порядки которых равны числам Мерсенна. В его основе лежит аналогия с классическим способом построения матриц Адамара порядков $n = 2^k$ с помощью формулы Сильвестра

$$\mathbf{S}_{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_n & \mathbf{S}_n \\ \mathbf{S}_n & -\mathbf{S}_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где в качестве начального значения используется число $\mathbf{S}_1 = 1$.

В настоящей статье предлагается итерационная процедура построения последовательности трехуровневых ортогональных матриц, порядки которых равны числам Ферма, а также числам вида $n = 2^k + 1$, где k — четное (за исключением $k = 1$): 3, 5, 17, 65, 257, 1025, ...

Матрицы, порождаемые этой процедурой, будем называть матрицами Адамара — Ферма и обозначать $\mathbf{F}_n$. Они обладают следующими свойствами:

— симметричны, ортогональны с тремя значениями элементов $a = 1$, $-b$ $(b < a)$, $b < s < a$;

— все элементы первых строки и столбца (и только они) равны s, кроме начального элемента, равного a.

Особо оговорим случай-исключение, матрицу $\mathbf{F}_3$ (k — нечетное число), когда значения $b = s = 2a$ (превышают на старте значение a).

Таким образом, задача сводится к отысканию матриц с минимальной m-нормой на множестве ортогональных трехуровневых матриц порядков, равных числам последовательности Ферма.

Модифицированная формула Сильвестра

Пусть имеется матрица Адамара — Ферма $\mathbf{F}_n$ порядка n. Обозначим через $\mathbf{S}_{n-1}$ симметричную

Пьер Ферма, современник и друг математика Марена Мерсенна, был организатором и руководителем блестящего научного семинара, который посещали такие крупные ученые, как Декарт, Паскаль и др. Он широко известен благодаря так называемой теореме Ферма, трехсотлетние поиски доказательства которой создали целые отрасли математики, возросшие на еще более древней почве задач античности, идущих от великого Диофанта

матрицу, получаемую из матрицы $\mathbf{F}_n$ удалением ее первых строки и столбца. Модифицируем формулу удвоения порядка Сильвестра (1), заменив ее учетверением порядка по правилу, описанному ниже.

Положение 1. Рассмотрим модифицированную формулу Сильвестра

$$\mathbf{S}_{4n-4}=\begin{pmatrix}\mathbf{S}^*_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1}\\ \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{S}^*_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1}\\ \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{S}^*_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1}\\ \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{S}^*_{n-1}\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где матрица $\mathbf{S}^*_{n-1}$ образована заменой значений уровней a на $-b$ и наоборот.

Полученная по формуле (2) матрица $\mathbf{S}_{4n-4}$ симметрична, но ее порядок четен и на единицу меньше порядка следующей матрицы Адамара — Ферма $\mathbf{F}_{4n-3}$. Для завершения рекурсивного перехода необходимо дополнительное окаймление матрицы (добавление строки и столбца). Важнейшим требованием является ортогональность матрицы, получаемой в результате окаймления.

Алгоритм построения матриц Адамара — Ферма

Для нахождения ортогонализирующего окаймления применим прием, описанный в работе [1]. Он основан на свойствах собственных чисел и собственных векторов блочных матриц.

Положение 2. Сформируем матрицу $\mathbf{F}_{4n-3}$ путем окаймления матрицы $\mathbf{S}_{4n-4}$ (2) в следующем виде:

$$\mathbf{F}_{4n-3}=\begin{pmatrix}-\lambda & \mathbf{e}'\\ \mathbf{e} & \mathbf{S}_{4n-4}\end{pmatrix},$$

где λ, $\mathbf{e}$ — соответственно собственное число и собственный вектор матрицы $\mathbf{S}_{4n-4}$.

Полученная таким образом матрица будет симметричной и ортогональной, если начинать итерационный процесс с матрицы

$$\mathbf{F}_5=\begin{pmatrix}a & s & s & s & s\\ s & a & -b & -b & -b\\ s & -b & a & -b & -b\\ s & -b & -b & a & -b\\ s & -b & -b & -b & a\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Матрицу $\mathbf{S}_4$ получаем удалением ее первой строки и первого столбца («каймы»). Здесь $a = -\lambda$ — собственное число матрицы $\mathbf{S}_4$, взятое с обратным знаком; s — элементы соответствующего собственного вектора, причем $b < s < a$.

При $n = 5$, в частности, имеем $b = s = 2a/3$, в общем случае $b=\dfrac{n-q}{q}a$, $s=\dfrac{\sqrt{np-2\sqrt{p}}}{2q}a$, $q=\dfrac{p+\sqrt{p}}{2}$, $p = n - 1$. Справедливость положения 2 следует непосредственно из условия ортогональности.

Вырожденный случай-исключение $\mathbf{F}_3$ получается из $\mathbf{F}_5$ усечением той же структуры, но только вдвое (вследствие чего $b = s = 2a$):

$$\mathbf{F}_3=\begin{pmatrix}a & s & s\\ s & a & -b\\ s & -b & a\end{pmatrix}.$$

Структура матрицы $\mathbf{F}_5$ и построенная по ней итерационно матрица $\mathbf{F}_{17}$ показаны на рис. 1, промежуточный уровень второй матрицы отвечает элементам отмеченного собственного вектора. Здесь белое поле — элемент матрицы вида $a = 1$, черное поле — элемент вида $-b$, серое поле — элемент каймы $b < s < a$.

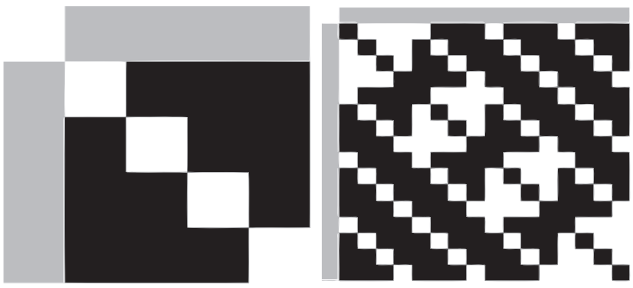


Рис. 1. Портреты матриц Адамара — Ферма $\mathbf{F}_5$, $\mathbf{F}_{17}$

Полузависимые значения уровней матриц являются корнями следующих алгебраических уравнений, называемых далее характеристическими:

$$qb-(n-q)a=0,\; q^2s^2-\left(np-2\sqrt{p}\right)a^2/4=0.$$

Уровни матриц Адамара — Мерсенна и Адамара — Ферма показаны на рис. 2, промежуточный уровень второй матрицы отвечает элементам собственного вектора симметричного вложения $\mathbf{S}_{16}$.

Примеры характеристических уравнений для уровней, отвечающих условию ортогональности столбцов матрицы Адамара — Ферма, приведены в таблице.

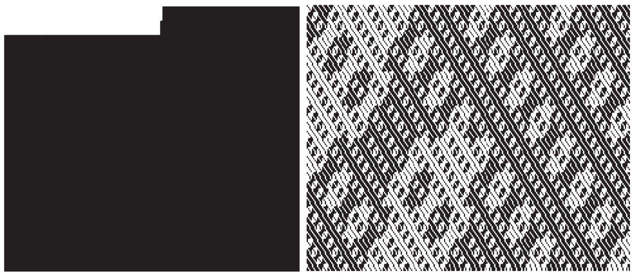
При построении матриц Адамара — Мерсенна [1] собственному значению $\lambda=-a$ соответствует собственный вектор **e**, составленный из обоих элементов внутреннего блока (у матриц Адамара элементы собственного вектора равны 1). Строительный блок матрицы Адамара — Ферма отличается от них только тем, что собственный вектор содержит некоторые новые элементы $b<s<a$. При этом с ростом порядка уровни матриц не остаются постоянными, но их значения сближаются. Иными словами, элементы матриц Адамара — Ферма с ростом n стремятся к {1, –1}, т. е. в пределе они точно такие же, как и матриц Адамара.

Пример. Для матрицы Адамара — Ферма (3) первая итерация модифицированного алгоритма Сильвестра дает

■ *Рис. 2.* Уровни матриц Адамара — Мерсенна $\mathbf{M}_{15}$ и Адамара — Ферма $\mathbf{F}_{17}$

■ Уравнения и значения уровней

k	Матрица	Уравнения	Уровни
1	$\mathbf{F}_3$	$b=2a,\ s=2a$	$b=s=2a$
2	$\mathbf{F}_5$	$3b=2a,\ 3^2s^2=4a^2$	$b=2a/3,\ s=2a/3$
4	$\mathbf{F}_{17}$	$10b=7a,$ $10^2s^2=66a^2$	$b=7a/10,$ $s=\sqrt{66}a/10$
6	$\mathbf{F}_{65}$	$36b=29a,$ $36^2s^2=1036a^2$	$b=29a/36,$ $s=\sqrt{1036}a/36$
8	$\mathbf{F}_{257}$	$136b=121a,$ $136^2s^2=16440a^2$	$b=121a/136,$ $s=\sqrt{16440}a/136$



■ *Рис. 3.* График уровней элементов и портрет матрицы Адамара — Ферма $\mathbf{F}_{257}$

$$\mathbf{S}_4=\begin{pmatrix} a & -b & -b & -b\\ -b & a & -b & -b\\ -b & -b & a & -b\\ -b & -b & -b & a\end{pmatrix},\quad \mathbf{S}_4^*=\begin{pmatrix} -b & a & a & a\\ a & -b & a & a\\ a & a & -b & a\\ a & a & a & -b\end{pmatrix}.$$

На их основе расширенный блок следующей матрицы будет представлен в виде

$$\mathbf{S}_{16}=\begin{pmatrix}
-b & a & a & a & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b\\
a & -b & a & a & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b\\
a & a & -b & a & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b\\
a & a & a & -b & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a\\
a & -b & -b & -b & -b & a & a & a & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b\\
-b & a & -b & -b & a & -b & a & a & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b\\
-b & -b & a & -b & a & a & -b & a & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b\\
-b & -b & -b & a & a & a & a & -b & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a\\
a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & -b & a & a & a & a & -b & -b & -b\\
-b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & a & -b & a & a & -b & a & -b & -b\\
-b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & a & a & -b & a & -b & -b & a & -b\\
-b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & a & a & a & -b & -b & -b & -b & a\\
a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & -b & a & a & a\\
-b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & a & -b & a & a\\
-b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & a & a & -b & a\\
-b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & -b & -b & -b & a & a & a & a & -b
\end{pmatrix}.$$

Среди собственных чисел $\mathbf{S}_{16}$, рассчитанной с учетом $a=1$ и $b=0{,}7$, выберем $\lambda=-1$, отвечающее уровню $a=1$ этой матрицы. Соответствующий собственный вектор будет содержать 16 одинаковых элементов. Их значения получаем из условия ортогональности: $s\cong 0{,}8124$.

После формирования матрицы F17 через две итерации получим матрицу $\mathbf{F}_{257}$ (рис. 3), порядок которой соответствует следующему числу Ферма. Интересно отметить, что все эти матрицы содержат на портретах стилизованную букву Ф.

Заключение

В процессе поиска ортогональных матриц нечетных порядков, близких по своим свойствам к матрицам Адамара, удалось выделить класс трехуровневых матриц, названных матрицами Адамара — Ферма, и разработать итерационный алгоритм их построения для порядков 2^k+1 при $k=1$ и при всех четных k. Элементы этих матриц с ростом k стремятся к значениям {1, –1}, как и у матриц Адамара.

С учетом ранее полученных итерационных процедур построения матриц Адамара, Белевича и Адамара — Мерсенна теперь порядки начальных матриц охватывают все целые числа начала числовой оси. Известные в теории пропуски среди матриц Белевича [6] также восполняются матрицами, близкими к матрицам Адамара — Мерсенна или Адамара — Ферма, что определяет их значимость.

Литература

1. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Мироновский Л. А.** Вычисление матриц Адамара — Мерсенна // Информационно-управляющие системы. 2012. № 5. С. 92–94.
2. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** М-матрицы // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1. С. 14–21.
3. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Матрицы Адамара нечетного порядка // Информационно-управляющие системы. 2006. № 3. С. 46–50.
4. **Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б.** М-матрица 22-го порядка // Информационно-управляющие системы. 2011. № 5. С. 87–90.
5. **Шинтяков Д. В.** Алгоритм поиска матриц Адамара нечетного порядка // Девятая научная сессия ГУАП: сб. докл. Ч. II. Технические науки. СПб.: ГУАП, 2006. С. 207–211.
6. **Belevitch V.** Theorem of 2n-terminal networks with application to conference telephony // Electr. Commun. 1950. Vol. 26. P. 231–244.

ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (80x@mail.ru).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию. Рукописи не возвращаются.

Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.