

УДК 621.391

ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ЧАСТОТНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ В СИСТЕМАХ С ДВУМЕРНЫМИ СИГНАЛАМИ М-КАМ, М-ФМ И М-АФМ

Д. Л. Бураченко,

канд. техн. наук, доцент

Н. В. Савищенко,

доктор техн. наук, профессор

Военная академия связи им. С. М. Буденного, г. Санкт-Петербург

Проведены исследования пропускной способности в дискретном и дискретно-непрерывном каналах связи. Оценена предельная частотно-энергетическая эффективность систем связи при использовании сигналов квадратурной амплитудной модуляции, фазовой модуляции и амплитудно-фазовой модуляции.

Ключевые слова — пропускная способность дискретного канала связи, пропускная способность дискретно-непрерывного канала связи, частотно-энергетическая эффективность систем связи, сигнальные конструкции квадратурной амплитудной модуляции, сигнальные конструкции фазовой модуляции, сигнальные конструкции амплитудно-фазовой модуляции.

Введение

Сравнение различных систем связи может быть осуществлено на основе показателей эффективности (частотной и энергетической), введенных Сандерсом [1]. Эта идея развита в работах А. Г. Зюко и В. Л. Банкет [2]. При сохранении общей идеи обозначения и функциональные зависимости между показателями могут различаться. Так, в работе [3] аналогичным образом вводится понятие плоскости «полоса — эффективность», которая характеризует зависимость R/F (нормированной к полосе пропускания скорости передачи) от отношения сигнал/шум E_{bc}/N_0 .

Из теоремы кодирования, сформулированной К. Шенноном, следует, что можно получить сколь угодно малую вероятность ошибки, если скорость передачи информации будет меньше пропускной способности канала. Поэтому для определения потенциальных возможностей системы связи необходимо уметь вычислять пропускную способность каналов связи. Данная задача является не только важной, но и достаточно сложной. В статье приведены результаты ее решения для дискретного симметричного канала связи, в котором используются сигналы фазовой модуляции, а также для дискретно-непрерывного канала связи при использовании сигналов квадратур-

ной амплитудной модуляции (М-КАМ), фазовой модуляции (М-ФМ) и амплитудно-фазовой модуляции (М-АФМ).

Основные обозначения и определения

Сигналы М-КАМ, М-ФМ и М-АФМ, предполагающие использование некоторой несущей частоты, принято называть полосовыми [3] сигналами, что учитывается в вводимых обозначениях, определениях и комментариях. Известно [4], что для моделей как T -финитных сигналов (занимающих теоретически неограниченную полосу частот), так и F -финитных сигналов Найквиста — Котельникова (имеющих теоретически неограниченную протяженность во времени), размерность пространства сигналов определяется равенством $N = 2FT$. В обоих случаях N есть число отличных от нуля комплексных коэффициентов обобщенного ряда Фурье (в их не прореженной последовательности длиной N), которым представлен либо в базисе T -финитных гармонических функций, либо в базисе F -финитных функций Котельникова формируемый ансамбль из M полосовых сигналов.

При этом для T -финитных сигналов $F = N/2T$ соответствует введенному Л. М. Финком [4] определению и понятию условной полосы частот. По-

нятие условной для T -финитных сигналов полосы частот F не вступает, по определению, как показано [4], в противоречие с теоретически неограниченной протяженностью их частотного спектра, являясь адекватной непротиворечивой мерой полосы частот, занимаемой системой сигналов, как в теоретических, так и в практических приложениях (фактически применяемой, например, при описании сигналов OFDM-систем).

Соответственно, применяемую для F -финитных сигналов величину $T = N/2F$, следуя Л. М. Финку, можно аналогично определить как условную длительность F -финитных сигналов, не вступая, по определению, в противоречие с теоретически неограниченной их протяженностью во времени.

Известно [1–3, 5], что энергетическая эффективность (β -эффективность) вычисляется на основе формулы $\beta = \frac{R}{P_c/N_0}$, где R — скорость пере-

дачи информации, бит/с; P_c — средняя мощность ансамбля из M сигналов, определяемая

как $P_c = \sum_{r=0}^{M-1} P(r)P_r$. Здесь, соответственно, $P(r)$

и P_r есть априорная вероятность передачи и средняя на длительности T мощность сигнала $s_r(t)$, $r = \overline{0, M-1}$, $t \in [0, T]$, где M — число сигналов, используемых системой передачи; N_0 — односторонняя спектральная плотность мощности аддитивного белого гауссова шума (АБГШ). В формуле для энергетической эффективности используется средняя мощность ансамбля из M сигналов, так как современные сигнальные конструкции строятся на основе как сферической, так и объемно-сферической упаковки, например сигналы M -КАМ или M -АФМ. Учитывая, что скорость передачи $R = 1/T_b$, где в реальных системах длительность одного бита (точнее, двоичного символа [3]) определяется как $T_b = T/\log_2 M$, $E_{bc} = P_c T_b$, $h_{bc}^2 = E_{bc}/N_0$, получаем, что $\beta = 1/h_{bc}^2$ или $\beta[\dot{a}\dot{A}] = -h_{bc}^2[\dot{a}\dot{A}]$. Для вычисления конкретных значений β^* выбирается некоторый порог вероятности битовой ошибки P_b^* , и тогда $h_{bc}^{2*} = \arg \left\{ P_b(h_{bc}^2) = P_b^* \right\}$, следовательно, $\beta^* = 1/h_{bc}^{2*}$ или, соответственно, $\beta^*[\dot{a}\dot{A}] = -h_{bc}^{2*}[\dot{a}\dot{A}]$.

Другой важный показатель эффективности системы передачи — частотный (спектральный) показатель $\gamma = \frac{R}{F} \left[\frac{\dot{a}\dot{e}\dot{o}}{\dot{n}\cdot\dot{A}\dot{O}} \right]$, где $F = N/2T$ — полоса частот, занимаемая в общем случае многомерным (N -мерным) сигналом, в рассматриваемых в работе случаях — двумерными ($N = 2$) сигналами или M -ФМ, или M -КАМ, или M -АФМ, для которых $F = 1/T$.

В задачах, посвященных расчетам пропускной способности и предельной частотно-энергети-

ческой эффективности и их сопоставлениям с β и γ реальных систем, необходимо также ввести определения понятий предельной энергетической эффективности $\beta_0 \triangleq \frac{C}{P_c/N_0} = \frac{C}{R} \frac{1}{h_{bc}^2}$ и предельной частотной эффективности $\gamma_0 \triangleq \frac{C}{F} = \frac{C}{R} \gamma$. Поскольку $R < C$, то очевидно, что $\beta < \beta_0$ и $\gamma < \gamma_0$.

В тех случаях, когда при анализе сигналов не акцентируют внимание на форме сигнала (полосе частот, занимаемой сигналом), а ограничиваются анализом сигнальной конструкции с учетом числа сигналов M и их размерности N , удобнее использовать величину $\gamma_N = \frac{R}{V_N} = \frac{R}{VN} = \frac{RT}{N} \left[\frac{\dot{a}\dot{e}\dot{o}}{\dot{e}\dot{c}\dot{i} \dot{a}\dot{o}\dot{a}\dot{i} \dot{e}\dot{a}} \right]$, где $V_N = VN$ имеет размерность $\left[\frac{\dot{e}\dot{c}\dot{i} \dot{a}\dot{o}\dot{a}\dot{i} \dot{e}\dot{a}}{c} \right]$. Пре-

дельное значение спектральной эффективности γ_N определяется исходя из того, что в этом случае

$\gamma_{N,0} = \frac{C}{V_N} = \frac{C^*}{N} = C_N$, где C_N — информационная емкость канала связи, нормированная к размерности сигнального пространства. Таким образом: $\gamma_0 = N\gamma_{N,0}$.

Аналогично можно определить соответствующую предельную энергетическую эффективность как $\beta_{N,0} = \frac{C_N}{E_N/N_0}$, где $E_N = E_c/N$ — средняя энергия, нормированная к размерности сигнального пространства. После несложных преобразований можно показать, что новая введенная предельная эффективность $\beta_{N,0}$ совпадает с величиной β_0 : $\beta_{N,0} = \frac{C^*}{P_c T/N_0} = \frac{C}{P_c/N_0} = \beta_0$.

Пределная частотно-энергетическая эффективность (β_0, γ_0) или ($\beta_{N,0}, \gamma_{N,0}$), по определению, соответствует оптимальному согласованию канала связи и источника сообщений. Другими словами, предельная частотно-энергетическая эффективность или максимальная эффективность использования частотного и энергетического ресурсов канала связи соответствует наилучшему обмену между энергетической и частотной эффективностями в канале связи за счет применения сколь угодно сложных методов кодирования и модуляции.

В качестве обобщенного показателя эффективности применяется коэффициент использования пропускной способности канала, называемый информационной эффективностью: $\eta = R/C$. Согласно теореме Шеннона, при соответствующих способах передачи (кодирования и модуляции) и приема (демодуляции и декодирования) значение информационной эффективности может быть сделано сколь угодно близким к единице. При

этом вероятность ошибки может быть сколь угодно малой. В результате из формулы Шеннона для пропускной способности непрерывного канала с АБГШ $C^{\dot{\epsilon}} = F \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{N_0 F} \right)$ получаем предельную зависимость между показателями эффективности: $\beta_0 = \gamma_0 / (2^{\gamma_0} - 1)$. При этом $\lim_{\gamma_0 \rightarrow 0} \beta_0 = 1 / \ln 2$ (1,592 дБ). Эта зависимость называется пределом Шеннона и используется для сравнения между собой различных реальных систем, каждой из которых соответствует конкретная точка (β^*, γ^*) на плоскости $\beta\gamma$. Получаемые точки, очевидно, располагаются ниже предела Шеннона. При этом в зависимости о целей можно осуществлять максимизацию либо энергетической, либо частотной (спектральной) эффективности, либо максимизацию (улучшение) по двум показателям эффективности.

Расчет пропускной способности дискретного канала связи

Рассмотрим канал с детерминированными параметрами и АБГШ. Предположим, что задана система сигналов с M -ФМ. Определим для этого случая одномерные условные вероятности при оптимальном (соответствующем правилу максимального правдоподобия) когерентном приеме $\pi_{ij} = P(r_j^* / r_i) = P(r_i \rightarrow r_j^*)$, где $\{r_i\}$, $i = \overline{0, M-1}$ — множество входных, а $\{r_j^*\}$, $j = \overline{0, M-1}$ — множество выходных сигналов. Тем самым найдем матрицу переходных вероятностей $\Pi = [\pi_{ij}]$. Полученная матрица может быть применена для решения широкого класса задач, например, для вычисления пропускной способности дискретного канала, вероятностей ошибки на символ или на бит при произвольном манипуляционном коде, определения среднеквадратичной ошибки приема непрерывных сообщений в цифровых системах передачи и т. д.

Матрица переходных вероятностей. Используя результаты работы [5, 6], нетрудно убедиться, что при $j = \overline{0, M-1}$ одномерные условные вероятности для M -ФМ

$$\pi_{00} = \pi_{jj} = 1 - Q \left(\sqrt{2h_n^2} \sin \frac{\pi}{M} \right) - 2T \left(\sqrt{2h_n^2} \sin \frac{\pi}{M}, \text{ctg} \frac{\pi}{M} \right). \quad (1a)$$

Здесь $h_c^2 = \frac{P_c T}{N_0}$ при $N = 2FT = 2$ и использовании базисной функции Найквиста — Котельникова с коэффициентом сглаживания $\alpha_0 = 0$. Тогда $V = 1/T = F$ и $h_c^2 = \frac{P_c T}{N_0} = \frac{P_c}{N_0 V} = \frac{P_c}{N_0 F}$.

Кроме этого, если $j = \overline{1, \frac{M-1}{2}}$ при M -четных или $j = \overline{1, \frac{M-1}{2}}$ при M -нечетных:

$$\pi_{0j} = \frac{1}{2} \left\{ Q \left(\sqrt{2h_m^2} \sin \frac{(2j-1)\pi}{M} \right) - Q \left(\sqrt{2h_m^2} \sin \frac{(2j+1)\pi}{M} \right) \right\} + \left\{ T \left(\sqrt{2h_m^2} \sin \frac{(2j-1)\pi}{M}, \text{ctg} \frac{(2j-1)\pi}{M} \right) - T \left(\sqrt{2h_m^2} \sin \frac{(2j+1)\pi}{M}, \text{ctg} \frac{(2j+1)\pi}{M} \right) \right\}; \quad (1a)$$

$$\pi_{0, M/2} = Q \left(\sqrt{2h_m^2} \sin \frac{\pi}{M} \right) - 2T \left(\sqrt{2h_m^2} \sin \frac{\pi}{M}, \text{ctg} \frac{\pi}{M} \right), \quad (1b)$$

а при $j = \overline{\frac{M}{2} + 1, M-1}$ при M -четных или $j = \overline{\frac{M+1}{2}, M-1}$ при M -нечетных:

$$\pi_{0j} = \pi_{0, M-j}. \quad (1g)$$

Выражение (1b) используется только при четном значении M . Здесь $h_c^2 = E_c / N_0 = P_c T / N_0$, E_c и P_c — соответственно значения средней энергии и мощности сигналов M -ФМ, N_0 — односторонняя спектральная плотность АБГШ;

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt$$

и

$$T(v, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \exp \left[-\frac{v^2}{2} (1+t^2) \right] \frac{1}{1+t^2} dt$$

— соответственно функция Гаусса и функция Оуэна [2, 5], где $v \geq 0$, $a \geq 0$.

Пусть

$$Q_\alpha \equiv Q \left(\sqrt{2h_n^2} \sin \frac{\alpha\pi}{M} \right), \quad T_\alpha \equiv T \left(\sqrt{2h_n^2} \sin \frac{\alpha\pi}{M}, \text{ctg} \frac{\alpha\pi}{M} \right).$$

Заметим, что сумма элементов первой строки равна единице. Действительно, при четном M (аналогичные вычисления и для нечетных M)

$$\sum_{j=0}^{M-1} \pi_{0j} = \pi_{00} + \pi_{0, M/2} + 2 \sum_{j=0}^{M/2-1} \pi_{0j} = 1 - 4T_1 + 2 \sum_{j=0}^{M/2-1} \left(T_{2j-1} - T_{2j+1} + \frac{1}{2} [Q_{2j-1} - Q_{2j+1}] \right) = 1.$$

Используя геометрическое представление сигналов M -ФМ, можно убедиться, что матрица переходных вероятностей относится к классу матриц теплицева типа и является симметричной относительно двух диагоналей, в частности, $\pi_{ij} = \pi_{ji}$, $i, j = \overline{0, M-1}$, $\pi_{ij} = \pi_{0, |i-j|}$, $i, j = \overline{1, M/2-1}$:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi_{00} & \pi_{01} & \pi_{02} & \dots & \pi_{0, M-1} \\ \pi_{01} & \pi_{00} & \pi_{01} & \dots & \pi_{0, M-2} \\ \pi_{02} & \pi_{01} & \pi_{00} & \dots & \pi_{0, M-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{0, M-1} & \pi_{0, M-2} & \pi_{0, M-3} & \dots & \pi_{00} \end{pmatrix}.$$

Пропускная способность дискретного канала. Одномерные условные вероятности задают данный канал. Известно, что дискретный канал называется симметричным по входу, если все строки матрицы переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}$ образованы перестановками элементов первой строки, и симметричным по выходу, если все столбцы матрицы $\mathbf{\Pi}$ образованы перестановками элементов первого столбца [7]. Дискретный канал называется симметричным, если он симметричен и по входу, и по выходу. Используя свойства матрицы переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}$, получаем, что данный дискретный канал является симметричным. В этом случае информационная емкость симметричного дискретного канала без памяти [7]

$$C^* = \log_2 M + \sum_{j=0}^{M-1} \pi_{0j} \log_2 \pi_{0j} \quad (2)$$

где π_{0j} — элементы первой строки матрицы переходных вероятностей. Пропускная способность канала $C^{д.к.} = VC^*$ [бит/с], где $V = 1/T$ [символ/с] — скорость передачи символов по каналу связи.

Свойства пропускной способности дискретного канала с учетом свойств непрерывного канала. В данном случае известно, что используются сигналы M -ФМ, оптимальный когерентный прием и, следовательно, для расчета пропускной способности можно применять (1) и (2). При фиксированных значениях P_c , N_0 и M можно так изменять скорость передачи V и, соответственно, длительность канальных символов T , что будет обеспечиваться наибольшая пропускная способность канала связи C в единицу времени. Таким образом, данная задача может быть формально записана как [4, 8]

$$C_{\infty}^{д.к.} \triangleq \max_V C(V) = \max_{h_n^2} C\left(\frac{P_n}{h_n^2 N_0}\right) = \frac{P_n}{N_0} \max_{h_n^2} \frac{1}{h_n^2} \left\{ \log_2 M + \sum_{j=0}^{M-1} \pi_{0j} \log_2 \pi_{0j} \right\}, \quad (3)$$

так как $V = P_n / h_n^2 N_0$. Здесь и далее используем два вида обозначений: $C(V) = C(V, M)$ и $C_{\infty}^{д.к.} = C_{\infty}^{д.к.}(M)$.

Анализируя выражения (1) и (2), можно прийти к выводу, что при уменьшении длительности сигнала $T \rightarrow 0$ ($V \rightarrow \infty$) пропускная способность монотонно возрастает, несмотря на уменьшение вели-

чины $h_n^2 = P_n T / N_0 = P_n / V N_0$ ($h_n^2 \rightarrow 0$ при $V \rightarrow \infty$), т. е. пропускной способностью дискретного канала при указанных ограничениях следует [4] считать предел $C_{\infty}^{д.к.} \triangleq \max_V C(V) = \lim_{V \rightarrow \infty} C(V) = \lim_{h_n^2 \rightarrow 0} C(V)$.

Максимум может быть найден аналитически, для чего в формулах (1), (2) используем асимптотические представления при $x \rightarrow 0$:

$$T(x, a) \cong \frac{\arctg(a)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(-2)^k k!} \left[\sum_{j=0}^{k-1} C_j^{k-1} \frac{a^{2j+1}}{2j+1} \right] = \frac{\arctg(a)}{2\pi} - \frac{a}{4\pi} x^2 + \frac{1}{16\pi} \left(a + \frac{a^3}{3} \right) x^4 - \dots; \quad (4a)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + \frac{x^3}{6\sqrt{2\pi}} - \dots \quad (4b)$$

Тогда

$$\max_V C(V) = \frac{P_n}{N_0} \lim_{h_n^2 \rightarrow 0} \frac{1}{h_n^2} \times \left\{ \log_2 M + \sum_{j=0}^{M-1} \pi_{0j} \log_2 \pi_{0j} \right\}. \quad (5)$$

Легко проверить, что при $h_n^2 \rightarrow 0$, $j = \overline{1, M/2 - 1}$:

$$\pi_{00} \cong \frac{1}{M} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\pi}{M} h_n + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{M} h_n^2 - \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sin^3 \frac{\pi}{M} h_n^3 - \dots; \quad (6a)$$

$$\log_2 \pi_{00} \cong \frac{\sqrt{\pi}}{\ln 2} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{M} h_n - \frac{\pi}{2 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} h_n^2 - \log_2 M; \quad (6b)$$

$$\pi_{0, M/2} \cong \frac{1}{M} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\pi}{M} h_n + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{M} h_n^2 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sin^3 \frac{\pi}{M} h_n^3 - \dots; \quad (6b)$$

$$\log_2 \pi_{0, M/2} \cong -\frac{\sqrt{\pi}}{\ln 2} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{M} h_n - \frac{\pi}{2 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} h_n^2 - \log_2 M; \quad (6r)$$

$$\pi_{0j} \cong \frac{1}{M} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin \frac{\pi}{M} \cos \frac{2\pi j}{M} h_n + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{M} \cos \frac{4\pi j}{M} h_n^2 + \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \times \left(\sin^3 \frac{(2j-1)\pi}{M} - \sin^3 \frac{(2j+1)\pi}{M} \right) h_n^3 + \dots; \quad (6d)$$

$$\log_2 \pi_{0j} \cong \frac{\sqrt{\pi}}{\ln 2} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{M} \cos \frac{2\pi j}{M} h_n - \frac{\pi}{2 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \cos^2 \frac{2\pi j}{M} h_n^2 - \log_2 M, \quad (6e)$$

где $\operatorname{sinc}(x) = \sin x/x$.

Подставляя при M четных формулы (4), (6) в выражение

$$C^* = \log_2 M + \pi_{00} \log_2 \pi_{00} + \pi_{0, M/2} \log_2 \pi_{0, M/2} + 2 \sum_{j=1}^{M/2-1} \pi_{0j} \log_2 \pi_{0j},$$

а при нечетных M — в выражение

$$C^* = \log_2 M + \pi_{00} \log_2 \pi_{00} + 2 \sum_{j=1}^{(M-1)/2} \pi_{0j} \log_2 \pi_{0j}$$

и используя формулу

$$\sum_{k=1}^n \cos(k\phi) = \left(\sin \frac{2n+1}{2} \phi - \sin \frac{\phi}{2} \right) / 2 \sin \frac{\phi}{2},$$

нетрудно получить, что из (3), (5) следует

$$C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}} \triangleq \lim_{V \rightarrow \infty} C(V) = \frac{\pi}{4 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \frac{P_{\dot{n}}}{N_0}, \quad M = 2^K; \quad K = 2, 3, \dots; \quad (7a)$$

$$C_{\infty, M=2}^{\dot{a}, \dot{e}} \triangleq \lim_{V \rightarrow \infty} C(V) = \frac{2}{\pi \ln 2} \frac{P_c}{N_0}. \quad (7б)$$

Отметим, что

$$\frac{\lim_{M \rightarrow \infty} C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}}(M)}{C_{\infty, M=2}^{\dot{a}, \dot{e}}} = \frac{\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{V \rightarrow \infty} C(V, M)}{\lim_{V \rightarrow \infty} C(V, M=2)} = \frac{\pi^2}{8} = 1,2337 \dots \quad (8)$$

Можно сделать несколько выводов.

Во-первых, переход от двоичных ФМ-сигналов к многопозиционным ФМ-сигналам при $V \rightarrow \infty$ ($F \rightarrow \infty$), т. е. при $h_{\dot{n}} \rightarrow 0$, увеличивает пропускную способность дискретного канала $C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}}(M)$ не более чем в $\pi^2/8$ раз [при $M \gg 1$ см. (8)], тогда как при $h_{\dot{n}}^2 \gg 1$ и $V = \text{const}(M)$ пропускная способность дискретного канала $C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}}(M)$ возрастает практически пропорционально $\log_2 M$.

Во-вторых, пропускная способность данного дискретного канала (при условии, что в непрерывном канале $F \rightarrow \infty$) меньше в $\frac{4}{\pi} \operatorname{sinc}^{-2} \frac{\pi}{M}$ при $M > 3$ и в $\frac{\pi}{2}$ при $M = 2$ по сравнению с пропускной способностью $C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}}$, соответствующей непрерывному каналу с АБГШ при $F \rightarrow \infty$:

$$C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}} = \lim_{V \rightarrow \infty} C(V) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}}, \quad (9a)$$

где $C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}} = \lim_{F \rightarrow \infty} F \log_2 \left(1 + \frac{P_{\dot{n}}}{N_0 F} \right) = \frac{1}{\ln 2} \frac{P_{\dot{n}}}{N_0}$;

$$\frac{C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}}}{\lim_{M \rightarrow \infty} C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}}(M)} = \frac{4}{\pi} = 1,273. \quad (9б)$$

Таким образом, при $F \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ и неограниченной сложности корректирующего кодирования весьма существенное ограничение на выбор сигнальной конструкции (выражающееся в применении M -ФМ) уменьшает пропускную способность дискретного канала лишь в $4/\pi = 1,273$ раза по сравнению со случаем, когда нет никаких ограничений на выбор сигнальных конструкций. Но полезнее сказать иначе: при передаче M -ичных сигналов по каналам с АБГШ отказ от декодирования с мягким решением практически преграждает пути повышения частотной и энергетической эффективности систем цифровой связи, проторенные достижениями искусства совершенствования сигнальных и сигнально-кодовых конструкций, т. е. искусства [9, 10] комбинирования (комплексирования) цифровой модуляции и корректирующих кодов.

В-третьих, выясняются ограничения на отношение сигнал/шум в $C_{\infty}^{\dot{a}, \dot{e}}$ при заданной информационной скорости передачи $R = 1/T_b$ и фиксированных значениях P_c, N_0 . Из теоремы кодирования для дискретного канала следует, что существует метод кодирования и декодирования, при котором сообщения передаются по дискретному каналу (при условии, что в непрерывном канале $F \rightarrow \infty$) со сколь угодно малой вероятностью ошибки, если

$$R = \frac{1}{T_b} < C \leq \max_V C(V) = \frac{\pi}{4 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \frac{P_{\dot{n}}}{N_0}, \quad M \geq 3;$$

$$R = \frac{1}{T_b} < C \leq \max_V C(V) = \frac{2}{\pi \ln 2} \frac{P_c}{N_0}, \quad M = 2.$$

Тогда при $M \geq 3$ и $V \rightarrow \infty$ отношение энергии бита E_b к односторонней спектральной плотности АБГШ N_0 должно удовлетворять неравенству

$$\frac{E_b}{N_0} \triangleq h_b^2 = \frac{P_m T_b}{N_0} > \frac{4}{\pi} \ln 2 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M}, \quad M \geq 3;$$

$$\frac{E_b}{N_0} \triangleq h_b^2 > \frac{\pi}{2} \ln 2, \quad M = 2. \quad (10)$$

Таким образом, определено минимальное значение отношения E_b/N_0 , при котором кодирование неограниченной сложности еще может обеспечить сколь угодно высокую верность приема:

$$\left[\frac{E_b}{N_0} \right]_{\min}^{\dot{a}, \dot{e}} \triangleq h_{b, \min, \dot{a}, \dot{e}}^2(M) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln 2, & M = 2; \\ \frac{4}{\pi} \ln 2 \operatorname{sinc}^{-2} \left(\frac{\pi}{M} \right), & M = 2^K, K = 2, 3, \dots; \\ \frac{4}{\pi} \ln 2, & M \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (11)$$

Потенциальные возможности применения сигнально-кодовых конструкций, основанных на совместном использовании M -ФМ и кодирования неограниченной сложности в дискретном канале, представлены соответственно в третьем и пятом столбцах (в децибелах — в четвертом и шестом столбцах) табл. 1, а потенциальные возможности применения сигналов M -ФМ без кодирования — в седьмом и восьмом столбцах.

Анализ табличных значений показывает, например, что при использовании помехоустойчивого кодирования с ростом позиционности M минимальное значение $h_{b, M\min}^2$ уменьшается по сравнению с $h_{b, 2\min}^2$ практически на 1 дБ, а без кодирования это значение неограниченно возрастает.

Вероятность ошибки в многопозиционном сигнале M -ФМ. Условные вероятности переходов можно использовать и для расчета вероятности ошибки. Приведем пример. Известно, что вероятность ошибки в символе равна

$$P_e = \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{r^*=0}^{M-1} P(r)P(r^*/r) = \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{r^*=0}^{M-1} P(r)\pi_{rr^*}.$$

Используя (1), нетрудно получить, что вероятность ошибки P_e в M -ичном символе двумерного сигнала M -ФМ

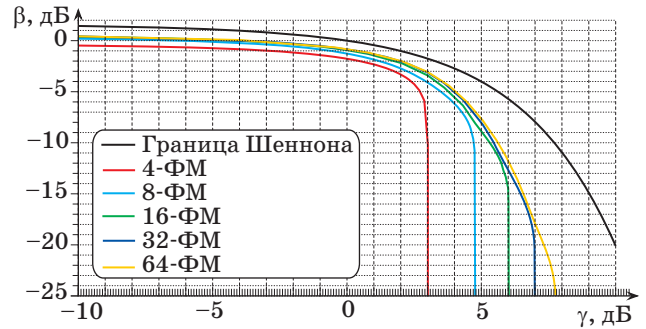
$$P_e = Q\left(\sqrt{2h_{\eta}^2} \sin \frac{\pi}{M}\right) + 2T\left(\sqrt{2h_{\eta}^2} \sin \frac{\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}\right). \quad (12)$$

Данная формула совпала с формулой, приведенной в работе [5].

По формулам (11), (12) можно определить максимально допустимое значение вероятности ошиб-

■ Таблица 1. Минимальные значения отношения сигнал/шум $h_{b, \min}^2$ в дискретном канале связи при использовании сигналов M -ФМ, $M = 2^K$

K	M	$h_{b, M\min}^2$	$h_{b, M\min}^2$, дБ	$\left(\frac{h_{b, M\min}^2}{h_{b, 2\min}^2}\right)$	$\left(\frac{h_{b, M\min}^2}{h_{b, 2\min}^2}\right)$, дБ	$h_{b, M}^2$, дБ, для $P_b = 10^{-5}$	$\left(\frac{h_{b, M}^2}{h_{b, 2\min}^2}\right)$, дБ, для $P_b = 10^{-5}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1,089	0,369	1	0	9,588	0
2	4	1,089	0,369	1	0	9,588	0
3	8	0,929	-0,388	1,172	-0,688	12,972	3,384
4	16	0,894	-0,487	1,218	-0,856	17,436	7,848
5	32	0,885	-0,529	1,230	-0,898	22,335	12,747
6	64	0,883	-0,539	1,233	-0,909	27,461	17,873
8	256	0,883	-0,542	1,234	-0,912	38,100	28,513
12	4096	0,883	-0,543	1,234	-0,912	60,203	50,615



■ Рис. 1. Предельные кривые частотно-энергетической эффективности для дискретного канала, использующего режим с когерентной максимально-правдоподобной демодуляцией сигналов M -ФМ с точно известными постоянными параметрами на фоне АБГШ

ки (для заданной информационной скорости передачи), при которой кодирование неограниченной сложности еще может обеспечить сколь угодно высокую верность приема ($M = 2^K$, $K = 2, 3$):

$$P_e^{\max} = Q\left(\frac{2}{M}\sqrt{2\pi \ln M}\right) + 2T\left(\frac{2}{M}\sqrt{2\pi \ln M}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}\right),$$

а при $M = 2$ $P_e^{\max} = Q(\sqrt{\pi \ln 2}) = 7,001697 \cdot 10^{-2}$ и совпадает с результатом, полученным в работах [4, 8]. Кроме этого, $P_e^{\max}(M=4) = 1,351316 \cdot 10^{-1}$; $P_e^{\max}(M=8) = 3,651832 \cdot 10^{-1}$ и при $M \rightarrow \infty$ значение $P_e^{\max} = 1 - \epsilon$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Если для заданной информационной скорости передачи вероятность ошибки $P_e \geq P_e^{\max}$, то любое кодирование в целях повышения помехоустойчивости оказывается бесполезным, и для повышения помехоустойчивости необходимо изменять вид модуляции или увеличивать отношение P_c/N_0 [8].

Результаты расчетов, полученные для зависимости энергетической эффективности β от частотной эффективности γ , представлены на рис. 1.

Расчет пропускной способности дискретно-непрерывного канала связи

Пусть C_N — пропускная способность дискретно-непрерывного (полунепрерывного) канала связи в битах на одно измерение (вход канала — дискретный, выход канала — непрерывный). Предельные значения показателей эффективности достигаются при $R = C$ [2] как

$$\gamma_N = C_N, \quad \beta_N = \frac{C_N}{E_N/N_0},$$

где N_0 — односторонняя спектральная плотность мощности АБГШ; $E_N = E_c/N$ — средняя энергия на измерение, $E_c = \sum_{r=0}^{M-1} P(r)E_r$. Здесь E_r ,

$r = \overline{0, M-1}$ — энергия сигнала $s_r(t)$, $t \in [0, T]$ длительностью T ; M — число сигналов, используемых в данной системе.

Пусть $\mathbf{s}_r = (s_{r,1}, \dots, s_{r,N})$ — N -мерный сигнал на входе канала, априорная вероятность передачи сигнала $s_r(t)$ равна $P(r)$ и $\mathbf{y}_r = (y_{r,1}, \dots, y_{r,N})$ — вектор смеси сигнала и помехи на выходе канала. Пропускная способность канала — это максимум удельной скорости (взаимной информации на одно измерение) по всем возможным распределениям входного сигнала \mathbf{s}_r :

$$C_N = \frac{1}{N} \max_{P(r)} [H(X) - H(Y|X)],$$

где $H(X) = -\sum_{r=0}^{M-1} P(r) \log_2 P(r)$ — энтропия входного сигнала, а

$$H(Y|X) = -\sum_{r=0}^{M-1} P(r) \int_{-\infty}^{\infty} w(\mathbf{y}/r) \times \log_2 \frac{P(r)w(\mathbf{y}/r)}{\sum_{k=0}^{M-1} P(k)w(\mathbf{y}/k)} d\mathbf{y}$$

— условная энтропия; $w(\mathbf{y}/r)$ — условная многомерная плотность вероятности, которая предполагается известной.

Рассмотрим сначала симметричные каналы. Известно, что в симметричных каналах максимум взаимной информации достигается при равновероятных сигналах на входе, $P(r) = 1/M$, $r = \overline{0, M-1}$. Тогда энтропия $H(X) = \log_2 M$, а условная энтропия будет определяться как

$$H(Y|X) = -\frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} w(\mathbf{y}/r) \log_2 \frac{w(\mathbf{y}/r)}{\sum_{k=0}^{M-1} w(\mathbf{y}/k)} d\mathbf{y}$$

или

$$H(Y|X) = \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} w(\mathbf{y}/r) \log_2 \left(\sum_{k=0}^{M-1} \Lambda_{kr} \right) d\mathbf{y},$$

где $\Lambda_{kr} = \frac{w(\mathbf{y}/k)}{w(\mathbf{y}/r)}$ — отношение условных плотностей вероятностей. Окончательно после несложных преобразований получаем формулу для расчета пропускной способности дискретно-непрерывного симметричного канала в виде [2]

$$C_N^{\text{äi.ë}} = \frac{1}{N} \left[\log_2 M - \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} w(\mathbf{y}/r) \log_2 \left(\sum_{k=0}^{M-1} \Lambda_{kr} \right) d\mathbf{y} \right]$$

Условие симметричности канала является достаточно жестким и выполняется, например, для

двумерных сигналов M -ФМ. Если канал не является симметричным (например, это будет в случае использования сигналов M -КАМ, широко применяемых в современных системах связи), то полученное выражение определяет максимум удельной скорости передачи информации по несимметричному полунепрерывному каналу при условии равной вероятности входных сигналов, $P(r) = 1/M$, $r = \overline{0, M-1}$.

Рассмотрим канал связи с АБГШ. Известно, что условная плотность вероятности определяется как

$$w(\mathbf{y}/r) = w(y_{r,1}, \dots, y_{r,N}/r) = \frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^N} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \sum_{v=1}^N (y_{r,v} - s_{r,v})^2 \right\},$$

и, следовательно, отношение условных плотностей вероятностей

$$\Lambda_{kr} = \frac{w(\mathbf{y}/k)}{w(\mathbf{y}/r)} = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \sum_{v=1}^N \left[2y_{r,v} (s_{r,v} - s_{k,v}) + (s_{k,v}^2 - s_{r,v}^2) \right] \right\}.$$

Сделаем замену переменных $x_v = \frac{y_v - s_{r,v}}{\sqrt{E_N}}$, $v = \overline{1, N}$, тогда после несложных преобразований, учитывая, что определитель якобиана преобразования $\Delta = \left[\frac{\partial y_v}{\partial x_\mu} \right]_{v,\mu=1,N}$ равен $|\Delta| = (\sqrt{E_N})^N$, получаем

$$C_N^{\text{äi.ë}} = \frac{1}{N} \left[\log_2 M - \frac{1}{M} \times \sum_{r=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{E_N}{\pi N_0}} \right)^N \exp \left\{ -\frac{E_N}{N_0} \sum_{v=1}^N x_v^2 \right\} \times \log_2 \left(\sum_{k=0}^{M-1} \exp \left\{ -\frac{E_N}{N_0} \sum_{v=1}^N \left[2x_v \left(\frac{s_{r,v}}{\sqrt{E_N}} - \frac{s_{k,v}}{\sqrt{E_N}} \right) + \left(\frac{s_{r,v}}{\sqrt{E_N}} - \frac{s_{k,v}}{\sqrt{E_N}} \right)^2 \right] \right\} \right) dx_1 \dots dx_N \right]$$

или

$$C_N^{\text{äi.ë}} = \frac{1}{N} \left[\log_2 M - \frac{1}{M} \times \sum_{r=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{E_N}{\pi N_0}} \right)^N \exp \left\{ -\frac{E_N}{N_0} \sum_{v=1}^N x_v^2 \right\} \times \right]$$

$$\times \log_2 \left[\sum_{k=0}^{M-1} \exp \left\{ -\frac{E_N}{N_0} \sum_{v=1}^N \left[2x_v (\tilde{s}_{r,v} - \tilde{s}_{k,v}) + (\tilde{s}_{r,v} - \tilde{s}_{k,v})^2 \right] \right\} \right] dx_1 \dots dx_N,$$

где $\tilde{s}_{r,v} = s_{r,v} / \sqrt{E_N}$, $r = \overline{0, M-1}$, $v = \overline{1, N}$ — нормированные координаты сигнальной конструкции.

Очевидно, что при $E_N/N_0 \gg 1$, $C_N^{\text{äf.ê}} \cong \frac{1}{N} \log_2 M$, соответственно, $\gamma_N \cong \frac{1}{N} \log_2 M$, $\beta_N \cong \frac{1}{h_{bc}^2}$.

В результате получаем, что пропускная способность дискретно-непрерывного канала связи зависит от величин: N — размерности пространства; M — числа сигналов, используемых в данной системе; E_N/N_0 — отношения средней энергии на измерение к односторонней плотности белого шума и нормированной разности $\tilde{d}_{r,k}^{(v)} = \frac{s_{r,v} - s_{k,v}}{\sqrt{E_N}}$, $r, k = \overline{0, M-1}$.

Таким образом, вводя матрицы размерности $\mathbf{D}_v = [\tilde{d}_{r,k}^{(v)}]$, $r, k = \overline{0, M-1}$, $v = \overline{1, N}$, элементами которой являются все возможные комбинации разностей координат сигналов $s_r = (s_{r,1}, \dots, s_{r,N})$, $r = \overline{0, M-1}$, получаем, что пропускная способность дискретно-непрерывного канала связи определяется как

$$C_N^{\text{äf.ê}} = C_N^{\text{äf.ê}}(N, M, E_N/N_0, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_N).$$

Данная матрица \mathbf{D}_v , $v = \overline{1, N}$, очевидно, является кососимметрической, и для расчета ее элементов достаточно всего $M(M-1)/2$ вычислений.

Исходная формула для вычисления пропускной способности дискретно-непрерывного канала связи в матричном виде может быть представлена как

$$C_N^{\text{äf.ê}} = \frac{1}{N} \log_2 M - \frac{1}{M} \times \sum_{r=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{E_N}{\pi N_0}} \right)^N \exp \left\{ -\frac{E_N}{N_0} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \right\} \times \log_2 \left[\sum_{k=0}^{M-1} \exp \left\{ -\frac{E_N}{N_0} \left[2\mathbf{x} \mathbf{d}_{r,k} + \frac{\|\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_k\|^2}{E_N} \right] \right\} \right] d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$; $\mathbf{d}_{r,k} = (d_{r,k}^{(1)}, \dots, d_{r,k}^{(N)})$, $r, k = \overline{0, M-1}$.

Дальнейшие преобразования формулы для расчета пропускной способности дискретно-непрерывного канала связаны с необходимостью осуществлять численное интегрирование вычислительными методами.

Осуществляя замену переменных $z_v = \sqrt{\frac{E_N}{N_0}} x_v$, $v = \overline{1, N}$, получаем

$$C_N^{\text{äf.ê}} = \frac{1}{N} \log_2 M - \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{\pi}} \right)^N \exp \left\{ -\sum_{v=1}^N z_v^2 \right\} \times \log_2 \left[\sum_{k=0}^{M-1} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{E_N}{N_0}} \sum_{v=1}^N \left[2z_v (\tilde{s}_{r,v} - \tilde{s}_{k,v}) - \frac{E_N}{N_0} \sum_{v=1}^N (\tilde{s}_{r,v} - \tilde{s}_{k,v})^2 \right] \right\} \right] dz_1 \dots dz_N.$$

Замечание. Вычисление N -кратного интеграла вида $\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N$ сводится к вычислению однократного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, ко-

торое можно осуществлять различными способами. Один из способов основывается на том, что соответствующей заменой переменных исключаются бесконечные пределы интегрирования. Например, замена $x = (1-t)/t$ приводит к соотношению $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2} \left[f\left(\frac{1-t}{t}\right) + f\left(-\frac{1-t}{t}\right) \right] dt$, а, соответственно, замена переменных $x = t/(1-t^2)$ — к формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{t}{1-t^2}\right) \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} dt.$$

Полученные в результате преобразований интегралы с конечными пределами могут быть вычислены любыми известными формулами [11]: Симпсона, Гаусса, Гаусса — Кронрода и т. д. Другой способ может заключаться в том, что для интегрирования по бесконечным пределам можно ввести неравномерную сетку, шаги которой будут нарастать при стремлении к бесконечности. Для вычисления несобственного интеграла в данной статье использовалась квадратурная формула Эрмита (ее называют также квадратурной формулой с весом Чебышева — Эрмита) [11]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

где весовые коэффициенты w_i и узлы x_i , $i = \overline{1, n}$, для $n = 9$ взяты из справочника [11]. В результате при $N = 2$ использовалась формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2 - y^2) f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(x_i, y_j).$$

Приведем основные результаты расчета.

1. Рассмотрим двумерную сигнальную конструкцию *M*-КАМ, $M = 2^K$, где K — четно. Координаты сигналов *M*-КАМ можно представить в виде ($j = 0, \sqrt{M}-1$)

$$\begin{cases} s_{r,1} = -\frac{\sqrt{M}-1}{2}d + jd, \\ s_{r,2} = (-1)^j \frac{\sqrt{M}-1}{2}d - (-1)^j (r - j\sqrt{M})d, \end{cases}$$

$$\text{где } j\sqrt{M} \leq r \leq (j+1)\sqrt{M}-1,$$

где d — минимальное евклидово расстояние. Так как для многомерной многопозиционной

M-КАМ средняя энергия $E_c = \frac{d^2 N (M^{2/N} - 1)}{12}$ [5],

то $E_N = \frac{E_c}{N} = \frac{d^2 (M^{2/N} - 1)}{12}$, и для двумерных сигналов, т. е. при $N = 2$, получаем, что $E_N = \frac{d^2 (M-1)}{12}$.

Отсюда следует, что $\frac{d}{\sqrt{E_N}} = \sqrt{\frac{12}{M-1}}$ и, соответ-

ственно, нормированные координаты двумерной *M*-КАМ определяются по формуле

$$\begin{cases} \frac{s_{r,1}}{\sqrt{E_N}} = -\sqrt{3} \sqrt{\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}+1}} + j \sqrt{\frac{12}{M-1}}, \\ \frac{s_{r,2}}{\sqrt{E_N}} = (-1)^j \sqrt{3} \sqrt{\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}+1}} - (-1)^j (r - j\sqrt{M}) \sqrt{\frac{12}{M-1}}, \end{cases}$$

$$\text{где } j\sqrt{M} \leq r \leq (j+1)\sqrt{M}-1.$$

2. Рассмотрим двумерную сигнальную конструкцию *M*-ФМ, $M = 2^K$, где $K \geq 1$. Так как $s_{r,1} = \sqrt{E_m} \cos \frac{2\pi r}{M}$, $s_{r,2} = \sqrt{E_m} \sin \frac{2\pi r}{M}$, $r = 0, M-1$, то нормированные к размерности сигнального про-

странства координаты определяются как $\frac{s_{r,1}}{\sqrt{E_N}} = \sqrt{2} \cos \frac{2\pi r}{M}$, $\frac{s_{r,2}}{\sqrt{E_N}} = \sqrt{2} \sin \frac{2\pi r}{M}$, $r = 0, M-1$.

3. Рассмотрим двумерную сигнальную конструкцию 16-АФМ, $M = 16$ (стандарта MIL-STD). Пусть число сигналов $M_1 = 4$ имеет максимальную энергию $E_{m,1}$, а $M_2 = 12$ — максимальную энергию $E_{m,2}$. Причем в стандарте MIL-STD, в отличие от 16-АФМ, применяемой в стандарте DVB-S2, отношение $\gamma^2 = E_{m,2}/E_{m,1}$ фиксированно: $\gamma = 1 + \sqrt{3}$. Средняя энергия $E_c = \frac{1}{16}(4E_{m,1} + 12E_{m,2})$ и, следовательно:

$$\frac{s_{r,1}}{\sqrt{E_N}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+3\gamma^2}} \cos \left(\frac{2\pi r}{M_1} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\frac{s_{r,2}}{\sqrt{E_N}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+3\gamma^2}} \sin \left(\frac{2\pi r}{M_1} + \frac{\pi}{4} \right)$$

при $0 \leq r \leq 3$ и

$$\frac{s_{r,1}}{\sqrt{E_N}} = \frac{2\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{1+3\gamma^2}} \cos \left(\frac{2\pi(r-M_1)}{M_2} \right),$$

$$\frac{s_{r,2}}{\sqrt{E_N}} = \frac{2\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{1+3\gamma^2}} \sin \left(\frac{2\pi(r-M_1)}{M_2} \right)$$

при $4 \leq r \leq 15$.

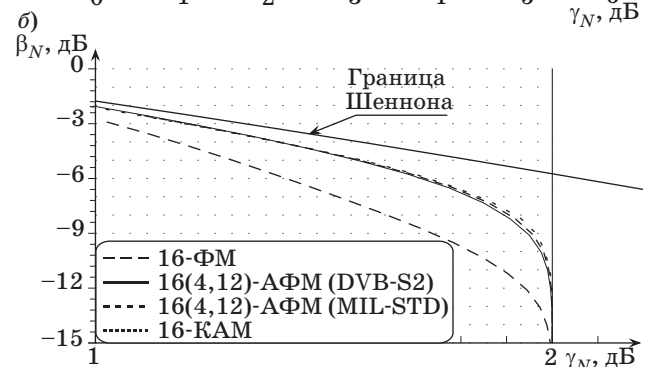
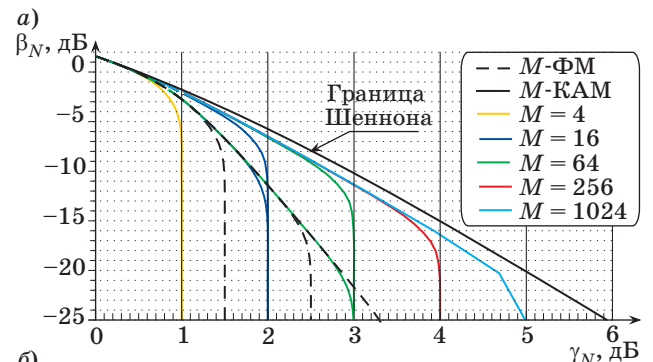
Из табл. 2 следует, например, что при $M = 16$ энергетический проигрыш сигналов ФМ по сравнению с сигналами КАМ составляет 4 дБ.

Анализ предельных кривых (рис. 2, а, б) показывает, что эффективность дискретных систем пе-

■ Таблица 2. Частотно-энергетическая эффективность сигналов КАМ, ФМ, АФМ и ГЕКС*

M	M / $\gamma_N \approx \log_2 M/N$	β_N , дБ			
		M-КАМ	M-ФМ	АФМ-16/ 32-MIL	ГЕКС-16
4	1	-9,587858	-9,587858	-	-
8	1,5	-	-12,971633	-	-
16	2	-13,434522	-17,435894	-13,812203	-13,017189
32	2,5	-	-22,335120	-15,668038	-
64	3	-17,786888	-27,461252	-	-

* ГЕКС — гексагональные сигналы.



■ Рис. 2. Предельная эффективность систем для дискретно-непрерывных каналов при использовании двумерных сигналов: а — *M*-КАМ и *M*-ФМ; б — 16-КАМ, 16-ФМ и 16-АФМ (4,12) (стандарта DVB-S2 и MIL-STD)

редачи можно существенно повысить, если в месте приема принять решение о переданных символах с использованием знания непрерывного сигнала на выходе согласованного фильтра (выход дискретно-непрерывного канала), т. е. осуществлять обработку в дискретно-непрерывном канале (мягкое решение) и вместо двоичных сигналов применять многопозиционные сигналы.

При этом в дискретно-непрерывном канале при малой частотной эффективности $\gamma_N \ll 1$ кривая энергетической эффективности β асимптотически приближается к предельной кривой гауссова непрерывного канала (граница Шеннона). Такая ситуация, например, характерна для современных систем, в которых используется турбокодирование при $\gamma_N \ll 1$. Снижение γ_N при фиксированном числе сигналов в сигнальной конструкции может интерпретироваться как уменьшение информационной скорости при использовании достаточно длинных помехоустойчивых кодов [2]. Кривые предельной эффектив-

ности (см. рис. 2) характеризуют потенциальные возможности системы связи при полном согласовании модема и кодека.

Заключение

Таким образом, проведено исследование пропускной способности дискретного канала связи при использовании сигналов *M*-ФМ и дискретно-непрерывного канала связи при использовании сигналов *M*-ФМ, *M*-КАМ и *M*-АФМ. Для пропускной способности дискретного канала связи получены точные соотношения, справедливые во всем диапазоне изменения отношения сигнал/шум, а также для любых значений позиционности сигналов *M*. Показано, что одним из путей повышения частотной и энергетической эффективности систем цифровой связи является использование декодирования с мягким решением при комбинировании методов цифровой модуляции и корректирующих кодов.

Литература

1. Сандерс Р. В. Сравнение эффективности некоторых систем связи // Зарубежная радиоэлектроника. 1960. № 12. С. 52–74.
2. Зюко А. Г. и др. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / под ред. А. Г. Зюко. — М.: Радио и связь, 1985. — 272 с.
3. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: пер. с англ. — М.: Вильямс, 2003. — 1104 с.
4. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. — М.: Сов. радио, 1970. — 728 с.
5. Савищенко Н. В. Многомерные сигнальные конструкции: их частотная эффективность и потенциальная помехоустойчивость приема / под ред. Д. Л. Бураченко. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. — 420 с.
6. Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи: пер. с англ. / под ред. Р. Л. Добрушина. — М.: Мир, 1969. — 640 с.
7. Колесник В. Д., Полтырев Г. Ш. Курс теории информации. — М.: Наука, 1982. — 416 с.
8. Зюко А. Г., Кловский Д. Д., Коржик В. И., Назаров М. В. Теория электрической связи: учебник для вузов / под ред. Д. Д. Кловского. — М.: Радио и связь, 1998. — 432 с.
9. Schlegel C. B., Perez L. C. Trellis and turbo coding. — Chichester: John Wiley & Sons, 2004. — 393 p.
10. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. — М.: Техносфера, 2005. — 320 с.
11. Справочник по специальным функциям / под ред. А. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.